ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 4, с. 509–518

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.225

О РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ОБЛАСТЯХ С СИЛЬНО (СЛАБО) ПРОНИЦАЕМЫМИ ПЛЁНКАМИ В ВИДЕ ОТРЕЗКА

© 2022 г. С. Е. Холодовский

Рассмотрены краевые задачи для уравнения Пуассона на плоскости с плёнкой, представляющей собой отрезок, который при исследовании моделируется семейством конфокальных эллипсов, пересечение которых совпадает с этим отрезком. Выведены условия сопряжения и граничные условия как для сильно, так и для слабо проницаемых плёнок. Построены явные решения различных краевых задач с плёнками внутри и на границе областей. Решения задач с плёнками выражены в квадратурах через известные решения аналогичных задач без плёнок.

DOI: 10.31857/S0374064122040070, EDN: CABITP

Введение. Реальные среды, в которых протекают процессы тепломассопереноса, зачастую содержат теплоизоляторы, наноразмерные покрытия, экраны, дренажи, мембраны, трещины и т.п. – все они моделируются плёночными включениями или покрытиями.

В монографиях [1, 2] решения краевых задач ищутся в виде интегралов типа Коши по контуру плёнки с неизвестной плотностью при выполнении обобщённых условий сопряжения на плёнке и сводятся к решению сингулярных интегральных уравнений. Общие задачи для сильно проницаемой плёнки произвольной формы приводят к решению интегро-дифференциального уравнения [1, с. 111]. Метод потенциалов с неизвестной плотностью получил развитие в работах [3–7]. Краевые задачи для гармонических функций вне криволинейных разрезов на плоскости с различными условиями на сторонах разрезов изучались в работах [8–10]. В статьях [11–14] решены задачи с аналогичными условиями сопряжения на плёнках без концевых точек. В данной работе решаются задачи для плёнок, имеющих концевые точки.

1. Вывод условий сопряжения и граничных условий на плёнках. На плоскости $z = x + iy$ будем рассматривать эллиптическую систему координат (ξ, η), т.е.

$$x = a\operatorname{ch}\xi\cdot\cos\eta,\quad y = a\operatorname{sh}\xi\cdot\sin\eta,\quad 0\leqslant\xi<\infty,\quad -\pi<\eta\leqslant\pi,$$

где $a = \mathrm{const} > 0$.

Рассмотрим на плоскости $z = x + iy$ какую-либо область D, содержащую отрезок $S = \{-a < x < a\}\times\{y = 0\} = \{\xi = 0\}\times\{-\pi < \eta < \pi\}$, который будем моделировать сильно или слабо проницаемой плёнкой. Для вывода условий сопряжения на плёнке S используем язык задач тепломассопереноса. Заменим плёнку S областью $D_0(0\leqslant\xi<l, -\pi<\eta<\pi)$ с постоянной проницаемостью k_0, ограниченную эллипсом $\xi = l$, где $\overline{D_0}\subset D$. Пусть внешняя область $D\setminus\overline{D_0}$ имеет постоянную проницаемость k.

Рассмотрим для функций $u(\xi,\eta)$ в $D\setminus\overline{D_0}$ и $u_0(\xi,\eta)$ в D_0 для уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0,\quad \xi > l;\quad \Delta u_0 = 0,\quad 0<\xi<l, \tag{1}$$

задачу с классическими условиями сопряжения на ∂D_0:

$$u_0(l,\eta) = u(l,\eta),\quad k_0\,\partial_\xi u_0(l,\eta) = k\,\partial_\xi u(l,\eta), \tag{2}$$

$$u_0(0,\eta) = u_0(0,-\eta),\quad \partial_\xi u_0(0,\eta) = -\partial_\xi u_0(0,-\eta), \tag{3}$$

где $\Delta u = \partial_{\xi\xi}u + \partial_{\eta\eta}u$, $\partial_{\xi\xi} = \partial^2/\partial\xi^2$, $\partial_\xi = \partial/\partial\xi$.

Из условий (3) следует, что потенциал и нормальная скорость непрерывны на разрезе $S(\xi = 0, -\pi < \eta < \pi)$, т.е. разрезом S можно пренебречь.

Найдём приращения функции $u(\xi, \eta)$ (потенциала) и нормальной скорости $k\,\partial_\xi u$ в точках $(l, \pm\eta)$ (эти точки при каждом фиксированном η при вырождении области D_0 в отрезок S (при $l \to 0$) сливаются в одну точку). Из условий (2), (3) с учётом теоремы Лагранжа о среднем получаем

$$u(l,\eta) - u(l,-\eta) = u_0(l,\eta) - u_0(0,\eta) - u_0(l,-\eta) + u_0(0,-\eta) = \\ = \frac{l}{k_0}(k_0\,\partial_\xi u_0(c_1,\eta) - k_0\,\partial_\xi u_0(c_2,-\eta)), \tag{4}$$

$$k(\partial_\xi u(l,\eta) + \partial_\xi u(l,-\eta)) = k_0(\partial_\xi u_0(l,\eta) - \partial_\xi u_0(0,\eta) + \\ + \partial_\xi u_0(l,-\eta) - \partial_\xi u_0(0,-\eta)) = lk_0(\partial_{\xi\xi} u_0(c_3,\eta) + \partial_{\xi\xi} u_0(c_4,-\eta)), \tag{5}$$

где $c_i = c_i(l) \in (0, l)$.

Пусть в равенствах (4), (5) имеют место сходимости

$$l \to 0, \quad k_0 \to \infty, \quad lk_0 \to A. \tag{6}$$

При этом область D_0 вырождается в сильно проницаемую плёнку (с параметром A) в виде отрезка $S(\xi = 0, -\pi < \eta < \pi)$. Из условия $u_0(l,\eta) - u_0(0,\eta) = l\,\partial_\xi u_0(c_1,\eta)$ следует равенство $\lim u_0(l,\eta) = \lim u_0(0,\eta)$ при $l \to 0$. Отсюда с учётом того, что, согласно первому условию в (2), $u_0(l,\eta) = u(l,\eta)$, для любого $c = c(l) \in (0, \xi_0)$ при $l \to 0$ получаем

$$\lim u_0(c,\eta) = \lim u_0(l,\eta) = \lim u(l,\eta), \tag{7}$$

так как если для некоторых $c = c(l) \in (0, l)$, $\eta_0 \in (-\pi, \pi)$ выполняется соотношение

$$\lim u_0(c,\eta_0) \neq \lim u_0(l,\eta_0),$$

то кривизна $\partial_{\xi\xi} u_0(\xi,\eta_0)$ графика $u_0(\xi,\eta_0)$, а значит, в силу уравнения Лапласа (1) и величина $\partial_{\eta\eta} u_0(\xi,\eta_0)$, стремится к ∞ при $l \to 0$, что для гармонической функции $u_0(\xi,\eta)$ в D_0 невозможно.

Дифференцируя равенство (7) дважды по η, найдём с учётом уравнений Лапласа (1), что $\lim \partial_{\xi\xi} u_0(c,\eta) = \lim \partial_{\xi\xi} u(l,\eta)$ для любого $c = c(l) \in (0, l)$. Отсюда, переходя в равенствах (4), (5) к пределу (6), приходим к условиям сопряжения на сильно проницаемой плёнке в виде отрезка $S(\xi = 0, -\pi < \eta < \pi)$:

$$u(0,\eta) = u(0,-\eta), \quad \partial_\xi u(0,\eta) + \partial_\xi u(0,-\eta) = \frac{2A}{k}\,\partial_{\xi\xi} u(0,\eta). \tag{8}$$

Здесь второе условие упрощено с учётом второго условия в (3) и соотношения (5).

Пусть в равенствах (4), (5) имеют место сходимости

$$l \to 0, \quad k_0 \to 0, \quad l/k_0 \to B. \tag{9}$$

При этом область D_0 вырождается в слабо проницаемую плёнку (с параметром B) в виде отрезка S.

Из условия $\partial_\xi u_0(l,\eta) - \partial_\xi u_0(0,\eta) = l\,\partial_{\xi\xi} u_0(c_3,\eta)$ следует, что $\lim \partial_\xi u_0(l,\eta) = \lim \partial_\xi u_0(0,\eta)$ при $l \to 0$. Отсюда с учётом второго равенства в (2) имеем $\lim k_0\,\partial_\xi u_0(c,\eta) = \lim k_0\,\partial_\xi u_0(l,\eta) = \lim k\,\partial_\xi u(l,\eta)$ для любого $c = c(l) \in (0, l)$. Тогда, переходя в равенствах (4), (5) к пределу (9), приходим к условиям сопряжения на слабо проницаемой плёнке в виде отрезка $S(\xi = 0, -\pi < \eta < \pi)$:

$$u(0,\eta) - u(0,-\eta) = 2Bk\,\partial_\xi u(0,\eta), \quad \partial_\xi u(0,\eta) = -\partial_\xi u(0,-\eta). \tag{10}$$

Здесь первое условие упрощено с учётом второго условия в (2).

Из условий сопряжения (8) следует, что на сильно проницаемой плёнке потенциал непрерывен, а нормальная скорость при $u(0,\eta) \neq \mathrm{const}$ имеет разрыв. Последнее объясняется тем, что частицы подвижной среды при входе в сильно проницаемую плёнку под углом $\theta \neq \pi/2$ протекают внутри плёнки и вытекают из неё в точках, отличных от точек втекания. На слабо проницаемой плёнке нормальная скорость непрерывна, а потенциал при $\partial_\xi u(0,\eta) \neq 0$ имеет разрыв (10), при этом скорость потока сквозь плёнку пропорциональна разности потенциалов на сторонах плёнки, что согласуется с физическими представлениями.

Если область динамического процесса D расположена в верхней полуплоскости $y > 0$ ($\xi > 0,\ \ 0 < \eta < \pi$) и плёнка $S(\xi = 0, 0 < \eta < \pi)$ находится на её границе, то в условиях сопряжения (8), (10) функции $u(0,-\eta)$ и $\partial_\xi u(0,-\eta)$ соответственно в случае граничных условий 1-го и 2-го рода являются функциями $\varphi(\eta)$ и $\psi(\eta)$, заданными на внешней стороне плёнки. При этом граничные условия на сильно и слабо проницаемых плёнках имеют соответственно вид

$$\partial_\xi u(0,\eta) - \frac{2A}{k}\,\partial_{\xi\xi} u(0,\eta) = -\psi(\eta), \tag{11}$$

$$u(0,\eta) - 2Bk\,\partial_\xi u(0,\eta) = \varphi(\eta). \tag{12}$$

Значения потенциала на сторонах сильно проницаемой плёнки совпадают между собой (см. (8)). Отсюда вытекает, что сильно проницаемая плёнка, на которой задано граничное условие 1-го рода, не влияет на процесс. На сторонах слабо проницаемой плёнки значения нормальной скорости совпадают между собой (см. (10)). Отсюда следует, что слабо проницаемая плёнка, на которой задано граничное условие 2-го рода, не влияет на процесс.

Отметим, что классическое граничное условие 3-го рода является граничным условием 1-го рода на слабо проницаемой плёнке при заданном потенциале на внешней стороне плёнки (12) (при отсутствии плёнки, т.е. при идеальном контакте области D с внешней средой, скачок потенциала в граничном условии 3-го рода приводит к бесконечной скорости в точках границы).

2. Плёнки на плоскости при отсутствии границ. Рассмотрим на плоскости $z = x + iy$ для функции $u(\xi,\eta)$ уравнение Пуассона

$$\Delta u = F(\xi,\eta), \quad \xi > 0, \tag{13}$$

с условиями сопряжения (8) или (10) соответственно на сильно или слабо проницаемой плёнке $S(\xi = 0, -\pi < \eta < \pi)$, где ξ, η – эллиптические координаты плоскости $z = x + iy$, функция $F(\xi,\eta)$ является периодической по η с периодом 2π и в окрестности плёнки тождественно нулевой.

На вспомогательной плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ рассмотрим для функции $f(\xi,\eta)$ в полосе $G(-\infty < \xi < \infty, -\pi < \eta < \pi)$ аналогичное уравнение (без плёнки)

$$\Delta f = \begin{cases} F(\xi,\eta), & \xi > 0, \\ 0, & \xi \leqslant 0, \end{cases} \tag{14}$$

в предположении, что существует классическое решение $f(\xi,\eta)$ этого уравнения, удовлетворяющее при $\xi \to -\infty$ условию

$$f(\xi,\eta) = O(e^{c|\xi|}), \quad 0 < c < \gamma,$$

где постоянная γ равна k/A для сильно проницаемой плёнки и $1/(Bk)$ для слабо проницаемой плёнки (см. ниже (21) и (23) соответственно).

Функцию $f(\xi,\eta)$ можно найти по известному на всей плоскости $\omega = \alpha + i\beta = re^{i\eta}$, где $r = e^\xi$, решению $f_0(r,\eta)$ уравнения Пуассона

$$\Delta_{r,\eta} f_0 = \begin{cases} F(\ln r,\eta), & r > 1, \\ 0, & r \leqslant 1, \end{cases}$$

здесь $\Delta_{r,\eta}$ – оператор Лапласа в полярных координатах r, η. При этом $f(\xi,\eta) = f_0(e^{\xi},\eta)$. В частности, рассматривая на плоскости ω гармоническую функцию $f_0(r,\eta)$, имеющую произвольные особые точки при $r > 1$, получим функцию $f(\xi,\eta) = f_0(e^{\xi},\eta)$. Например, потенциал источника (фундаментальное решение) с особой точкой (ξ_0,η_0), $\xi_0 > 0$, $-\pi < \eta_0 < \pi$ имеет вид

$$f(\xi,\eta) = Q\ln(e^{2\xi} + e^{2\xi_0} - 2e^{\xi+\xi_0}\cos(\eta-\eta_0)).$$

Методом свёртывания разложений Фурье [11] выразим решения задач (13), (8) и (13), (10) соответственно с сильно и слабо проницаемой плёнкой через решение $f(\xi,\eta)$ задачи (14).

Функция $f(\xi,\eta)$ при $\xi \leqslant 0$ (где она удовлетворяет уравнению Лапласа (14)) представима в виде

$$f(\xi,\eta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{n\xi}(a_n\cos(n\eta) + b_n\sin(n\eta)), \quad \xi \leqslant 0, \tag{15}$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(0,\eta)\cos(n\eta)\,d\eta, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(0,\eta)\sin(n\eta)\,d\eta.$$

Отсюда следуют равенства

$$f(\xi,\eta) - f(\xi,-\eta) = 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{n\xi} b_n\sin(n\eta), \tag{16}$$

$$f(\xi,\eta) + f(\xi,-\eta) - a_0 = 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{n\xi} a_n\cos(n\eta). \tag{17}$$

Заменяя в равенствах (16), (17) переменную $\xi \leqslant 0$ на $\xi - t$, умножая полученные выражения на $e^{-\gamma t}$, $\gamma > 0$, и интегрируя по $t \in (0,\infty)$, найдём, что

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma t}(f(\xi-t,\eta) - f(\xi-t,-\eta))\,dt = 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{n\xi}\frac{b_n}{n+\gamma}\sin(n\eta), \tag{18}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma t}(f(\xi-t,\eta) + f(\xi-t,-\eta) - a_0)\,dt = 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{n\xi}\frac{a_n}{n+\gamma}\cos(n\eta). \tag{19}$$

Решения задач (13), (8) и (13), (10) будем искать в виде

$$u(\xi,\eta) = f(\xi,\eta) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\xi}(p_n\cos(n\eta) + q_n\sin(n\eta)), \quad \xi > 0, \tag{20}$$

где постоянные p_n, q_n подлежат определению; в частности, функция $u(\xi,\eta)$ должна удовлетворять уравнению (13) (при условии сходимости и дифференцируемости ряда (20)).

Рассмотрим случай сильно проницаемой плёнки. Подставляя функции (20), (15) в условия сопряжения (8) и приравнивая в получившемся равенстве коэффициенты при $\cos(n\eta)$ и $\sin(n\eta)$ слева и справа, для коэффициентов p_n, q_n получаем систему алгебраических уравнений, решение которой имеет вид

$$q_n = -b_n, \quad p_n = \left(\frac{2\gamma}{n+\gamma} - 1\right)a_n, \quad \gamma = \frac{k}{A} > 0. \tag{21}$$

Отсюда с учётом разложения (15) функции $f(-\xi,\eta)$ при $\xi>0$ и равенства (19) решение (20) задачи (13), (8) с сильно проницаемой плёнкой $S(\xi=0,-\pi<\eta<\pi)$ выражается непосредственно через решение $f(\xi,\eta)$ уравнения (14) по формуле (без разложений Фурье, т.е. без сильных осцилляций):

$$u(\xi,\eta)=f(\xi,\eta)-f(-\xi,\eta)+\gamma\int\limits_0^\infty e^{-\gamma t}(f(-\xi-t,\eta)+f(-\xi-t,-\eta))\,dt,\quad \xi>0, \tag{22}$$

где постоянная γ определена в (21).

В случае слабо проницаемой плёнки $S(\xi=0,-\pi<\eta<\pi)$, рассуждая аналогично, решение задачи (13), (10) с учётом равенства (18) найдём в виде

$$u(\xi,\eta)=f(\xi,\eta)+f(-\xi,\eta)-\gamma\int\limits_0^\infty e^{-\gamma t}(f(-\xi-t,\eta)-f(-\xi-t,-\eta))\,dt,\quad \xi>0, \tag{23}$$

где $\gamma=1/(Bk)>0$, а $f(\xi,\eta)$ – решение уравнения (14).

При отсутствии плёнки решение $u(\xi,\eta)$ уравнения (13) с классическими условиями сопряжения $u(0,\eta)=u(0,-\eta)$, $\partial_\xi u(0,\eta)=-\partial_\xi u(0,-\eta)$ на разрезе S получим в виде

$$U(\xi,\eta)=f(\xi,\eta)+f(-\xi,-\eta),\quad \xi>0. \tag{24}$$

Свойства решений.

2.1. Рассмотрим предельные случаи параметров плёнки $0<A,B<\infty$.

При $A\to 0$ $(\gamma\to\infty$, см. (21)) сильно проницаемая плёнка $S(\xi=0,-\pi<\eta<\pi)$ исчезает, при этом из формулы (22) с помощью интегрирования по частям получаем, что

$$u(\xi,\eta)=f(\xi,\eta)+f(-\xi,-\eta)+\int\limits_0^\infty e^{-\gamma t}(\partial_\xi f(-\xi-t,\eta)+\partial_\xi f(-\xi-t,-\eta))\,dt\to U(\xi,\eta),$$

где функция $U(\xi,\eta)$ определена равенством (24).

При $A\to\infty$ $(\gamma\to 0)$ из формулы (22) непосредственно находим

$$u(\xi,\eta)\to f(\xi,\eta)-f(-\xi,\eta),$$

а значит, предельная функция $u(\xi,\eta)$ является решением задачи (13), $u(0,\eta)=0$, т.е. плёнка S вырождается в линию нулевого потенциала (при этом линии тока перпендикулярны плёнке). В данном случае плёнка является абсолютно проницаемым отрезком S (каверной).

При $B\to 0$ $(\gamma\to\infty$, см. (23)) из формулы (23) с помощью интегрирования по частям получаем, что $u(\xi,\eta)\to U(\xi,\eta)$, где функция $U(\xi,\eta)$ задана в (24), т.е. слабо проницаемая плёнка $S(\xi=0,-\pi<\eta<\pi)$ исчезает.

При $B\to\infty$ $(\gamma\to 0)$ из представления (24) находим

$$u(\xi,\eta)\to f(\xi,\eta)+f(-\xi,\eta),$$

а значит, предельная функция $u(\xi,\eta)$ является решением задачи (13), $\partial_\xi u(0,\eta)=0$, т.е. в данном случае имеем обтекание непроницаемого отрезка S заданным потоком.

Таким образом, потенциалы (22), (23) описывают процессы тепломассопереноса на плоскости с сильно и слабо проницемыми плёнками в виде отрезка $S(\xi=0,-\pi<\eta<\pi)$ в диапазоне от абсолютно проницаемой каверны до непроницаемого экрана.

2.2. Обозначим функции $u(\xi,\eta)$, $f(\xi,\eta)$ через $u_1(\xi,\eta)$, $f_1(\xi,\eta)$ в случае задачи (13), (8) с сильно проницаемой плёнкой и через $u_2(\xi,\eta)$, $f_2(\xi,\eta)$ в случае задачи (13), (10) со слабо проницаемой плёнкой.

Тогда, если в задачах (13), (8) и (13), (10) $k/A = 1/(Bk) = \gamma$, а $f_1(\xi,\eta)$ и $f_2(\xi,\eta)$ – сопряжённые друг другу гармонические функции ($\partial_\xi f_1 = \partial_\eta f_2$, $\partial_\eta f_1 = -\partial_\xi f_2$ вне особых точек), решения $u_1(\xi,\eta)$ (22) и $u_2(\xi,\eta)$ (23) задач с сильно и слабо проницаемыми плёнками также являются сопряжёнными друг другу гармоническими функциями, что проверяется непосредственно.

2.3. Рассмотрим на плоскости с разрезом S в эллиптических координатах ξ, η потенциал некоторого процесса без плёнки: $U(\xi,\eta) = f(\xi,\eta) + f(-\xi,-\eta)$ (см. (24)). При внесении в указанный поток сильно проницаемой плёнки в виде отрезка S потенциал в каждой точке изменится на величину

$$\Delta_1 u(\xi,\eta) = u(\xi,\eta) - U(\xi,\eta),$$

где функция $u(\xi,\eta)$ определена равенством (22). Из выражения (22) следует, что $u(\xi,\eta) - u(\xi,-\eta) = U(\xi,\eta) - U(\xi,-\eta)$. Отсюда получаем равенство

$$\Delta_1 u(\xi,\eta) = \Delta_1 u(\xi,-\eta),$$

т.е. приращения $\Delta_1 u(\xi,\eta)$ потенциалов в точках, симметричных относительно прямой, на которой расположена сильно проницаемая плёнка (относительно оси x), одинаковые.

При внесении в невозмущённый поток с потенциалом $U(\xi,\eta)$ (см. (24)) слабо проницаемой плёнки S потенциал изменится на величину

$$\Delta_2 u(\xi,\eta) = u(\xi,\eta) - U(\xi,\eta),$$

где функция $u(\xi,\eta)$ определена равенством (23). Из выражения (23) следует, что $u(\xi,\eta) + u(\xi,-\eta) = U(\xi,\eta) + U(\xi,-\eta)$. Отсюда получаем равенство

$$\Delta_2 u(\xi,\eta) = -\Delta_2 u(\xi,-\eta),$$

т.е. приращения $\Delta_2 u(\xi,\eta)$ потенциалов в точках, симметричных относительно прямой, на которой расположена слабо проницаемая плёнка, отличаются лишь знаками.

3. Плёнки внутри областей. Рассмотрим в области $D(0<\xi<\infty, -b<\eta<b)$, $0<b<\pi$, для функции $u(\xi,\eta)$ краевую задачу

$$\Delta u = F(\xi,\eta), \quad Lu|_{\eta=b} = h_1(\xi), \quad Lu|_{\eta=-b} = h_2(\xi) \tag{25}$$

с условиями сопряжения (8) или (10) на плёнке. Здесь L – оператор граничных условий 1-го или 2-го рода: $Lu \equiv u$ или $Lu \equiv \partial_\eta u$. В данном случае область D ограничена гиперболой $\eta = \pm b$ и содержит сильно или слабо проницаемую плёнку $S(\xi = 0, 0 < \eta < b)$ в виде отрезка, примыкающего правым концом к границе в точке $(\xi = 0, \eta = b)$. В частности при $b = \pi/2$ область D является правой полуплоскостью $x > 0$ с плёнкой $S(0 < x < a, y = 0)$, перпендикулярной границе.

На плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ в полосе $G(-\infty<\xi<\infty, -b<\eta<b)$ рассмотрим аналогичную краевую задачу без плёнки для уравнения Пуассона (14) с граничными условиями вида

$$Lf|_{\eta=b} = \begin{cases} h_1(\xi), & \xi > 0, \\ 0, & \xi \leqslant 0, \end{cases} \quad Lf|_{\eta=-b} = \begin{cases} h_2(\xi), & \xi > 0, \\ 0, & \xi \leqslant 0. \end{cases} \tag{26}$$

Отметим, что решение задачи (14), (26), как и решения рассмотренных ниже классических задачи (14), (30) и задач (38) и (45), строится в квадратурах методами функции Грина и конформных отображений полосы G на полуплоскость или квадрант.

Решения $u(\xi,\eta)$ краевых задач (25), (8) и (25), (10) с плёнкой $S(\xi = 0, 0 < \eta < b)$ выражаются через решение $f(\xi,\eta)$ классической задачи (14), (26) соответственно по формулам (22) и (23), что проверяется непосредственно.

4. Плёнки на границе областей.

4.1. Однородные граничные условия на плёнках. Рассмотрим область $D(0 < \xi < \infty, b < \eta < d)$, $0 \leqslant b < d \leqslant \pi$, ограниченную гиперболами $\eta = b$, $\eta = d$ и отрезком

$S(\xi = 0, b < \eta < d)$ в виде сильно или слабо проницаемых плёнок. При $b = 0$, $d = \pi$ область D является верхней полуплоскостью $y > 0$ с плёнкой $S(-a < x < a, y = 0)$ на границе.

Для функции $u(\xi, \eta)$ рассмотрим в области D краевую задачу

$$\Delta u = F(\xi, \eta), \quad L_1 u|_{\eta=b} = h_1(\xi), \quad L_2 u|_{\eta=d} = h_2(\xi) \tag{27}$$

с однородными граничными условиями на сильно или слабо проницаемой плёнке соответственно вида (11), (12):

$$(\partial_{\xi\xi} u - \gamma\,\partial_\xi u)|_{\xi=0} = 0 \tag{28}$$

или

$$(\partial_\xi u - \mu u)|_{\xi=0} = 0, \tag{29}$$

где $\gamma = k/(2A) > 0$, $\mu = 1/(2Bk) > 0$, L_i – операторы граничных условий 1-го или 2-го рода в произвольном сочетании.

Выразим решения задач (27), (28) и (27), (29) через решение $f(\xi, \eta)$ аналогичной классической задачи (без плёнки) в полосе $G(-\infty < \xi < \infty, b < \eta < d)$ для уравнения Пуассона (14) с граничными условиями вида

$$L_1 f|_{\eta=b} = \begin{cases} h_1(\xi), & \xi > 0, \\ 0, & \xi \leqslant 0, \end{cases} \quad L_2 f|_{\eta=d} = \begin{cases} h_2(\xi), & \xi > 0, \\ 0, & \xi \leqslant 0. \end{cases} \tag{30}$$

Для вывода общих формул рассмотрим задачи (27), (28) и (27), (29) и (14), (30) при $b = 0$, $d = \pi$, $h_i(\xi) = 0$, $L_i u \equiv u$. Тогда решение $f(\xi, \eta)$ задачи (14), (30) при $\xi \leqslant 0$ представимо в виде

$$f(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{n\xi} b_n \sin(n\eta), \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(0, \eta) \sin(n\eta)\, d\eta. \tag{31}$$

Отсюда следует равенство (аналогичное (18), (19))

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma t} f(\xi - t, \eta)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} e^{n\xi} \frac{b_n}{n + \gamma} \sin(n\eta), \quad \xi \leqslant 0, \quad \gamma > 0. \tag{32}$$

Решения задач (27), (28) и (27), (29) будем искать в виде

$$u(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\xi} p_n \sin(n\eta), \quad \xi > 0; \tag{33}$$

в частности, функция $u(\xi, \eta)$ удовлетворяет уравнению и граничным условиям (27).

В случае сильно проницаемой плёнки из граничного условия (28) и разложений (31), (33) найдём $p_n = (2\gamma/(n + \gamma) - 1)b_n$. Отсюда с учётом равенства (32) решение (33) задачи (27), (28) с плёнкой $S(\xi = 0, b < \eta < d)$ получаем в виде

$$u(\xi, \eta) = f(\xi, \eta) - f(-\xi, \eta) + 2\gamma \int\limits_0^{\infty} e^{-\gamma t} f(-\xi - t, \eta)\, dt, \quad \xi > 0, \tag{34}$$

где $f(\xi, \eta)$ – решение задачи (14), (30) без плёнки.

В случае слабо проницаемой плёнки из граничного условия (29) и разложений (31), (33) находим $p_n = (1 - 2\mu/(n+\mu))b_n$. Отсюда, учитывая представление (32), решение (33) задачи (27), (29) приводим к виду

$$u(\xi,\eta) = f(\xi,\eta) + f(-\xi,\eta) - 2\mu \int_0^\infty e^{-\mu t} f(-\xi - t,\eta)dt, \quad \xi > 0, \tag{35}$$

где $f(\xi,\eta)$ – решение задачи (14), (30).

Для общего случая задач (27), (28) и (27), (29) и задачи (14), (30) при $0 \leqslant b < d \leqslant \pi$, $h_i(\xi) \neq 0$, $L_i u \equiv u$ или $L_i u \equiv \partial_\eta u$ формулы (34), (35) сохраняются, что проверяется непосредственно.

4.2. Неоднородные граничные условия на плёнках. Рассмотрим задачу (27), (28) с неоднородным условием на сильно проницаемой плёнке вида

$$\Delta u = 0, \quad L_1 u|_{\eta=b} = 0, \quad L_2 u|_{\eta=d} = 0, \tag{36}$$

$$(\partial_{\xi\xi} u - \gamma\, \partial_\xi u)|_{\xi=0} = \gamma\psi(\eta), \tag{37}$$

где $\gamma = k/(2A)$. Выразим её решение через решение $f(\xi,\eta)$ аналогичной задачи (без плёнки) в полуполосе $G_1(0 < \xi < \infty, b < \eta < d)$:

$$\Delta f = 0, \quad L_1 f|_{\eta=b} = 0, \quad L_2 f|_{\eta=d} = 0, \quad \partial_\xi f|_{\xi=0} = \psi(\eta). \tag{38}$$

Для вывода общих формул, как и выше, рассмотрим обе задачи (36), (37) и (38) при $b = 0$, $d = \pi$, $L_i u \equiv u$. Представим решение задачи (38) в виде разложения Фурье

$$f(\xi,\eta) = \sum_{n=1}^\infty e^{-n\xi} b_n \sin(n\eta), \quad \xi \geqslant 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(0,\eta)\sin(n\eta)\,d\eta. \tag{39}$$

Тогда из граничного условия (38) при $\xi = 0$ вытекает равенство

$$\psi(\eta) = -\sum_{n=1}^\infty n b_n \sin(n\eta), \tag{40}$$

а из равенства (39) следует, что

$$\int_0^\infty e^{-\gamma t} f(\xi + t,\eta)dt = \sum_{n=1}^\infty e^{-n\xi} \frac{b_n}{n+\gamma} \sin(n\eta), \quad \xi \geqslant 0, \quad \gamma > 0. \tag{41}$$

Решение задачи (36), (37) будем искать в виде

$$u(\xi,\eta) = \sum_{n=1}^\infty e^{-n\xi} p_n \sin(n\eta), \quad \xi > 0; \tag{42}$$

в частности, функция $u(\xi,\eta)$ удовлетворяет уравнению и граничным условиям (36). Из граничного условия (37) и равенства (40) найдём $p_n = -\gamma b_n/(n+\gamma)$. Отсюда с учётом представления (41) решение (42) задачи (36), (37) с сильно проницаемой плёнкой $S(\xi = 0, b < \eta < d)$ получаем в виде

$$u(\xi,\eta) = -\gamma \int_0^\infty e^{-\gamma t} f(\xi + t,\eta)\,dt, \quad \xi > 0, \tag{43}$$

где $f(\xi,\eta)$ – решение задачи (38) без плёнки. Для общего случая задач (36), (37) и (38) при $0 \leqslant b < d \leqslant \pi$, $L_i u \equiv u$ или $L_i u \equiv \partial_\eta u$ формула (43) сохраняется, что проверяется непосредственно.

В случае слабо проницаемой плёнки $S(\xi = 0, b < \eta < d)$ граничное условие (37) заменяется условием

$$(\partial_\xi u - \mu u)|_{\xi=0} = \mu\varphi(\eta), \tag{44}$$

где $\mu = 1/(2Bk)$. Выразим решение задачи (36), (44) через решение $f(\xi,\eta)$ классической задачи

$$\Delta f = 0, \quad L_1 f|_{\eta=b} = 0, \quad L_2 f|_{\eta=d} = 0, \quad f|_{\xi=0} = \varphi(\eta) \tag{45}$$

в полуполосе $G_1(0 < \xi < \infty, b < \eta < d)$. Рассматривая обе задачи (36), (44) и (45) при $b = 0$, $d = \pi$, $L_i u \equiv u$ и представляя граничную функцию $\varphi(\eta)$ из (44), (45) в виде ряда

$$\varphi(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\eta), \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \varphi(\eta)\sin(n\eta)\,d\eta, \tag{46}$$

решение задачи (45) найдём в виде разложения (39) с коэффициентами b_n вида (46). При этом равенство (41) сохраняется. Представляя решение задачи (36) в виде (42), из граничного условия (44) с учётом равенств (46) найдём $p_n = -\mu b_n/(n+\mu)$. Отсюда и из равенства (41) решение (42) задачи (36), (44) со слабо проницаемой плёнкой $S(\xi = 0, b < \eta < d)$ получаем в виде

$$u(\xi,\eta) = -\mu\int\limits_0^{\infty} e^{-\mu t} f(\xi + t, \eta)\,dt, \quad \xi > 0, \tag{47}$$

где $f(\xi,\eta)$ – решение задачи (45) без плёнки. В общем случае при $0 \leqslant b < d \leqslant \pi$, $L_i u = u$ или $L_i u = \partial_\eta u$ решение задачи (36), (44) строится также по формуле (47).

Решения краевых задач (27), (37) и (27), (44) с неоднородными условиями в области $D(0 < < \xi < \infty, b < \eta < d)$ имеют вид суммы соответствующих решений (34), (43) и (35), (47).

Заключение. Найденные явные решения дополняют результаты о краевых задачах математической физики в областях, содержащих плёночные включения.

Работа выполнена в рамках гранта Совета по научной и инновационной деятельности Забайкальского государственного университета (проект 358-ГР).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пилатовский В.П.* Основы гидромеханики тонкого пласта. М., 1966.
2. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
3. *Дмитриев В.И., Захаров Е.В.* Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. М., 1987.
4. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987.
5. *Ерофеенко В.Т., Козловская И.С.* Интегральные уравнения в задачах экранирования электромагнитных полей для цилиндрических тел // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 2. С. 242–247.
6. *Сетуха А.В.* О построении фундаментальных решений краевой задачи Неймана в области вне разомкнутой плоской поверхности // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 4. С. 505–515.
7. *Крутицкий П.А., Прозоров К.В.* К задаче для уравнения Гельмгольца вне разрезов на плоскости с заданием условия Дирихле и условия с косой производной на разных сторонах разрезов // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 9. С. 1268–1283.
8. *Крутицкий П.А.* Обобщение задачи Неймана для гармонических функций вне разрезов на плоскости // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 9. С. 1100–1112.
9. *Крутицкий П.А., Сгибнев А.И.* Метод интегральных уравнений в обобщенной задаче о скачке для уравнения Лапласа вне разрезов на плоскости // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 9. С. 1199–1213.

10. *Крутицкий П.А.* Краевая задача для уравнения Лапласа вне разрезов на плоскости с разными условиями третьего рода на разных сторонах разрезов // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 1. С. 86–100.
11. *Холодовский С.Е.* Метод свертывания разложений Фурье. Случай обобщенных условий сопряжения типа трещины (завесы) в кусочно-неоднородных средах // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 6. С. 855–859.
12. *Холодовский С.Е.* О решении краевых задач для уравнения Лапласа в шаре, ограниченном многослойной пленкой // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 7. С. 919–926.
13. *Холодовский С.Е.* Об установившихся процессах на плоскости с круговым включением, экранированным двухслойной пленкой // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2019. Т. 59. № 9. С. 89–97.
14. *Холодовский С.Е.* О многослойных пленках на границе полупространства // Мат. заметки. 2016. Т. 99. Вып. 3. С. 421–427.

Забайкальский государственный университет,
г. Чита

Поступила в редакцию 19.04.2021 г.
После доработки 02.03.2022 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.