ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 4, с. 519–533

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1

ОБ А-ОРБИТАЛЬНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ ТРЁХМЕРНЫХ АФФИННЫХ СИСТЕМ С ОДНИМ УПРАВЛЕНИЕМ

© 2022 г. Д. А. Фетисов

Рассматривается задача об А-орбитальной линеаризации нелинейных систем, аффинных по управлению. В известных к настоящему времени условиях А-орбитальной линеаризуемости предполагается, что C^{∞}-модуль, порождённый векторными полями, соответствующими системе, имеет постоянный ранг. В настоящей работе это предположение не выполнено. Доказывается необходимое и достаточное локальное условие, при котором трёхмерная аффинная система с одним управлением А-орбитально эквивалентна по обратной связи и состоянию линейной управляемой системе, рассматриваемой в окрестности положения равновесия.

DOI: 10.31857/S0374064122040082, EDN: CABTCS

Введение. Задача преобразования нелинейной системы с управлением в линейную управляемую систему (т.е. в линейную систему, удовлетворяющую условию управляемости Р. Калмана) является одной из классических задач теории управления. Первые результаты в этой области были получены для аффинных систем с одним управлением при специальном классе преобразований [1]. Впоследствии эти результаты были обобщены в работах [2, 3].

Напомним [2], что если одну аффинную систему можно преобразовать в другую с использованием гладких невырожденных замен состояния и управления, то такие системы называют *эквивалентными по обратной связи и состоянию*. В случае, если аффинная система эквивалентна по обратной связи и состоянию линейной управляемой системе, то говорят, что эта аффинная система *линеаризуема обратной связью*. Условия линеаризуемости обратной связью [2, 3] для многих систем не выполняются, в связи с чем были предложены многочисленные обобщения этого понятия, позволившие распространить идею линеаризации на более широкие классы систем. Среди таких обобщений выделим приближённую линеаризацию обратной связью [4], линеаризацию обратной связью по выходу [5] и орбитальную линеаризацию [6].

Напомним [6], что две аффинные системы называют *орбитально эквивалентными по обратной связи и состоянию*, если одну из них можно преобразовать в другую с помощью гладких невырожденных замен состояния, управления и независимой переменной, при этом предполагается, что замена независимой переменной не зависит от управления. В случае, если аффинная система орбитально эквивалентна по обратной связи и состоянию линейной управляемой системе, то говорят, что эта аффинная система *орбитально линеаризуема* [6]. Необходимые и достаточные условия орбитальной линеаризуемости для аффинных систем с одним управлением получены в работах [6, 7], а для систем с векторным управлением – в работе [8].

Как оказалось, использование замен независимой переменной, зависящих от управления, позволяет преобразовать в линейную управляемую систему даже системы, не линеаризуемые орбитально [9]. Напомним [10], что две аффинные системы называют *А-орбитально эквивалентными по обратной связи и состоянию*, если одна система преобразуется в другую с использованием гладких невырожденных замен состояния, управления и независимой переменной, причём замены независимой переменной могут зависеть как от состояния, так и от управления. Если аффинная система А-орбитально эквивалентна по обратной связи и состоянию линейной управляемой системе, то говорят, что эта аффинная система *А-орбитально линеаризуема*. Необходимые и достаточные условия А-орбитальной линеаризуемости для систем с одним управлением получены в работах [11, 12], а для систем с векторным управлением – в работе [10]. Все указанные условия найдены на основе построения производного флага кораспределения, ассоциированного с системой. При этом предполагалось, что ранги всех элементов производного флага постоянны в окрестности рассматриваемой точки. Такое допущение автоматически выводит из рассмотрения положения равновесия аффинной системы.

Вместе с тем, линеаризация системы в окрестности положений равновесия имеет приоритетное значение с точки зрения приложений. В настоящей работе для трёхмерных аффинных систем с одним управлением формулируется и доказывается необходимое и достаточное локальное условие А-орбитальной эквивалентности по обратной связи и состоянию линейной управляемой системе, рассматриваемой в окрестности нулевого положения равновесия.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{j=1}^{m} f_j(x)u_j, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{т}} \in M$ – состояние, $u = (u_1, \ldots, u_m)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^m$ – управление, $\dot{x} \equiv dx/dt$, M – открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$,

$$f_j = \sum_{k=1}^{n} f_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad f_{jk} \in C^\infty(M), \quad j = \overline{0,m}, \quad k = \overline{1,n},$$

$C^\infty(M)$ – кольцо гладких функций $M \to \mathbb{R}$. На протяжении всей статьи под *гладкостью* понимается бесконечная дифференцируемость.

Напомним понятие A-орбитальной эквивалентности аффинных систем по обратной связи и состоянию. Для этого рассмотрим наряду с системой (1) систему

$$y' = h_0(y) + \sum_{j=1}^{m} h_j(y)v_j, \tag{2}$$

где $y = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{т}} \in P$ – состояние, $v = (v_1, \ldots, v_m)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^m$ – управление, $y' \equiv dy/d\tau$, P – открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$,

$$h_j = \sum_{k=1}^{n} h_{jk} \frac{\partial}{\partial y_k}, \quad h_{jk} \in C^\infty(P), \quad j = \overline{0,m}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Говорят [10], что системы (1) и (2) *A-орбитально эквивалентны по обратной связи и состоянию* на множествах M и P, если существует матрица $A = (\alpha_{ij})_{i,j=\overline{0,m}}$, $\alpha_{ij} : M \to \mathbb{R}$, $i, j = \overline{0,m}$, гладкая и невырожденная на множестве M, и диффеоморфизм $\Phi : M \to P$ такие, что

$$\begin{pmatrix} h_0 \\ \ldots \\ h_m \end{pmatrix} = \Phi_* \left((A^{-1})^{\mathrm{т}} \begin{pmatrix} f_0 \\ \ldots \\ f_m \end{pmatrix} \right),$$

где Φ_* – касательное отображение, индуцированное диффеоморфизмом Φ.

Пусть $x_0 \in M$, $y_0 \in P$. Будем говорить, что системы (1) и (2) *A-орбитально эквивалентны по обратной связи и состоянию в паре точек* (x_0, y_0), если существуют окрестности $U(x_0)$ и $V(y_0)$ точек x_0 и y_0 соответственно такие, что системы (1) и (2) A-орбитально эквивалентны по обратной связи и состоянию на множествах $U(x_0)$ и $V(y_0)$, причём соответствующий диффеоморфизм $\Phi : U(x_0) \to V(y_0)$ удовлетворяет условию $\Phi(x_0) = y_0$.

Как показано в работе [10], A-орбитальная эквивалентность систем (1) и (2) по обратной связи и состоянию на множествах M и P означает, что система (1) заменой независимой переменной

$$\dot{\tau} = \alpha_{00}(x) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{0j}(x)u_j,$$

заменой управления

$$v_i = \frac{\alpha_{i0}(x) + \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{ij}(x) u_j}{\alpha_{00}(x) + \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{0j}(x) u_j}, \quad i = \overline{1, m},$$

и заменой состояния $y = \Phi(x)$ преобразуется на множестве

$$M_{xu} = \left\{ (x, u) : x \in M, \alpha_{00}(x) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{0j}(x) u_j \neq 0 \right\}$$

в систему (2), ограниченную на множество $M_{yv} = \{(y, v) : y \in P,\ \Delta(\Phi^{-1}(y), v) \neq 0\}$, где

$$\Delta(x, v) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_{01}(x) & \ldots & \alpha_{0m}(x) \\ v_1 & \alpha_{11}(x) & \ldots & \alpha_{1m}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_m & \alpha_{m1}(x) & \ldots & \alpha_{mm}(x) \end{vmatrix}.$$

Отметим, что известные из работ [2] и [6] понятия эквивалентности и орбитальной эквивалентности аффинных систем по обратной связи и состоянию являются частными случаями A-орбитальной эквивалентности по обратной связи и состоянию, а именно: системы (1) и (2) эквивалентны по обратной связи и состоянию, если они A-орбитально эквивалентны по обратной связи и состоянию с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m0} & \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mm} \end{pmatrix};$$

системы (1) и (2) орбитально эквивалентны по обратной связи и состоянию, если они A-орбитально эквивалентны по обратной связи и состоянию с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & 0 & \ldots & 0 \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m0} & \alpha_{m1} & \ldots & \alpha_{mm} \end{pmatrix}.$$

Наибольший интерес представляет A-орбитальная эквивалентность по обратной связи и состоянию системы (1) линейной управляемой системе

$$\begin{gathered} (y_1^1)' = y_2^1, \quad \ldots, \quad (y_{\rho_1-1}^1)' = y_{\rho_1}^1, \quad (y_{\rho_1}^1)' = v_1, \\ \ldots \\ (y_1^m)' = y_2^m, \quad \ldots, \quad (y_{\rho_m-1}^m)' = y_{\rho_m}^m, \quad (y_{\rho_m}^m)' = v_m, \end{gathered} \tag{3}$$

где $\rho_1 + \ldots + \rho_m = n,$ либо системе

$$\begin{gathered} (y^0)' = 1, \\ (y_1^1)' = y_2^1, \quad \ldots, \quad (y_{\rho_1-1}^1)' = y_{\rho_1}^1, \quad (y_{\rho_1}^1)' = v_1, \\ \ldots \\ (y_1^m)' = y_2^m, \quad \ldots, \quad (y_{\rho_m-1}^m)' = y_{\rho_m}^m, \quad (y_{\rho_m}^m)' = v_m, \end{gathered} \tag{4}$$

где $\rho_1 + \ldots + \rho_m = n - 1,$ которая становится линейной управляемой системой после перехода к новой независимой переменной y^0.

Задача нахождения условий A-орбитальной эквивалентности по обратной связи и состоянию системы (1) системе (4) в случае $m > 1$ рассматривалась в работе [10], а в случае $m = 1$ – в работе [12]. Различные аспекты задачи об A-орбитальной эквивалентности по обратной связи и состоянию системы (1) системе (3) в случае $m = 1$ обсуждались в работах [9, 11]. В работе [9] получена система уравнений в частных производных, решив которую можно найти линеаризующие преобразования. В работе [11] в случае $m = 1$ найдено необходимое и достаточное условие A-орбитальной эквивалентности по обратной связи и состоянию системе (3). С использованием этого условия разработан алгоритм построения линеаризующих преобразований, основанный на построении производного флага кораспределения, ассоциированного с системой.

Отметим, что условие и алгоритм из работы [11] применимы лишь к регулярным точкам производного флага, т.е. к таким точкам, в окрестности которых все кораспределения, составляющие производный флаг, имеют постоянный ранг. Это предположение исключает из рассмотрения положения равновесия системы. Вместе с тем, для приложений важны условия A-орбитальной эквивалентности по обратной связи и состоянию системе (3) именно в окрестностях положений равновесия.

Целью настоящей работы является нахождение для трёхмерных аффинных систем условий A-орбитальной эквивалентности по обратной связи и состоянию линейной управляемой системе, рассматриваемой в окрестности нулевого положения равновесия.

Далее будем рассматривать систему

$$\dot{x} = f_0(x) + f_1(x)u, \tag{5}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{т}} \in M$ – состояние, $u \in \mathbb{R}$ – управление, $\dot{x} \equiv dx/dt$, M – открытое подмножество $\mathbb{R}^3$,

$$f_j = \sum_{k=1}^{3} f_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad f_{jk} \in C^\infty(M), \quad j = 0, 1, \quad k = 1, 2, 3.$$

Пусть $x_0 \in M$. Рассмотрим задачу об A-орбитальной эквивалентности системы (5) и системы

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = y_3, \quad y_3' = v \tag{6}$$

по обратной связи и состоянию в паре точек $(x_0, 0)$. A-орбитальная эквивалентность систем (5) и (6) по обратной связи и состоянию в паре точек $(x_0, 0)$ означает существование окрестности $U(x_0)$ точки x_0, окрестности $V(0)$ точки $y = 0$, матрицы $A = (\alpha_{ij})_{i,j=0,1}$, $\alpha_{ij} \in C^\infty(U(x_0))$, $i, j = 0, 1$, невырожденной в $U(x_0)$, и диффеоморфизма $\Phi : U(x_0) \to V(0)$ таких, что $\Phi(x_0) = 0$, и заменами независимой переменной

$$\dot{\tau} = \alpha_{00}(x) + \alpha_{01}(x)u,$$

управления

$$v = \frac{\alpha_{10}(x) + \alpha_{11}(x)u}{\alpha_{00}(x) + \alpha_{01}(x)u}$$

и состояния $y = \Phi(x)$ система (5) преобразуется на множестве

$$M_{xu} = \{(x, u) : x \in U(x_0), \quad \alpha_{00}(x) + \alpha_{01}(x)u \neq 0\}$$

в линейную управляемую систему (6), ограниченную на множество $M_{yv} = \{(y, v) : y \in V(0),$ $\alpha_{11}(\Phi^{-1}(y)) - \alpha_{01}(\Phi^{-1}(y))v \neq 0\}$.

Отметим, что в окрестности точки $y = 0$ модуль, порождённый векторными полями, соответствующими системе (6), имеет переменный ранг, поэтому рассматриваемая в настоящей работе задача не может быть решена методом, предложенным в статье [11]. Условие орбитальной эквивалентности систем (5) и (6) по обратной связи и состоянию в паре точек $(x_0, 0)$

известно [6], в настоящей работе это условие обобщается на более широкий класс преобразований.

2. Условие линеаризуемости. Будем далее обозначать $C^\infty(M)$-модуль гладких векторных полей, заданных на множестве M, через $\mathcal{T}(M)$. Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_k \in \mathcal{T}(M)$. Запись $\mathcal{P} = \operatorname{span}\{\xi_1,\ldots,\xi_k\}$ означает, что

$$\mathcal{P} = \left\{\xi \in \mathcal{T}(M) : \xi = \sum_{j=1}^{k} \beta_j\xi_j, \quad \beta_j \in C^\infty(M)\right\},$$

т.е. $\mathcal{P}$ – подмодуль модуля $\mathcal{T}(M)$, порождённый векторными полями $\xi_1, \ \ldots, \ \xi_k$. Через $[\xi,\eta]$ обозначаем коммутатор векторных полей $\xi,\eta \in \mathcal{T}(M)$. Используем также обозначения

$$\operatorname{ad}^0_\xi\eta = \eta, \quad \operatorname{ad}^{k+1}_\xi\eta = [\xi, \operatorname{ad}^k_\xi\eta], \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Поставим в соответствие системе (5) модуль $\mathcal{F} = \operatorname{span}\{f_0, f_1\}$. Напомним, что *производным флагом* модуля $\mathcal{F}$ называют последовательность модулей $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots$, построенную по правилу

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}, \quad \mathcal{F}_{k+1} = \mathcal{F}_k + [\mathcal{F}_k, \mathcal{F}_k], \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Будем использовать обозначения $d_k = \dim \mathcal{F}_k(x_0)$, $k = 0,1,2,\ldots$ Пусть

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \dim \mathcal{F}_1(x) < 3\}.$$

Известно [6], что если выполнены равенства $d_0 = 1$, $d_1 = 2$, $d_2 = 3$, то S – гладкая двумерная поверхность.

Главным результатом настоящей работы является

Теорема. *Системы (5) и (6) A-орбитально эквивалентны по обратной связи и состоянию в паре точек $(x_0, 0)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) $d_0 = 1$, $d_1 = 2$, $d_2 = 3$;

2) существует векторное поле $f \in \mathcal{F}$, касательное к поверхности S и такое, что $f(x_0) \neq 0$.

Доказательство. Достаточность. Поскольку $f \in \mathcal{F}$, то $f = \beta_0 f_0 + \beta_1 f_1$, где β_0 и β_1 – некоторые гладкие функции. Так как $f(x_0) \neq 0$, то по крайней мере для одного значения индекса $k \in \{0,1\}$ имеют место соотношения $\beta_k(x_0) \neq 0$, $f_k(x_0) \neq 0$. Не ограничивая общности, считаем, что $k = 1$. Заменим образующую f_1 модуля $\mathcal{F}$ на образующую f. Очевидно, имеет место равенство

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix},$$

причём матрица

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{pmatrix}$$

невырождена в точке x_0, так как $\det\beta(x_0) = \beta_1(x_0) \neq 0$. Следовательно, модуль $\mathcal{F}$ представим в окрестности точки x_0 в виде $\mathcal{F} = \operatorname{span}\{f_0, f\}$. Отметим, что векторные поля f_0 и f_1 выражаются через векторные поля f_0 и f по формуле

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = \beta^{-1} \begin{pmatrix} f_0 \\ f \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Так как $f(x_0) \neq 0$, то векторное поле f имеет в окрестности точки x_0 два функционально независимых первых интеграла z_1 и z_2. Дополним z_1 и z_2 функцией z_3 до системы из трёх функций, независимых в окрестности точки x_0. Отметим, что функции z_1, z_2, z_3 всегда можно выбрать так, чтобы выполнялись равенства $z_i(x_0)=0$, $i=1,2,3$. Отображение Φ_1, задаваемое соотношениями

$$z_1=z_1(x),\quad z_2=z_2(x),\quad z_3=z_3(x),$$

является локальным диффеоморфизмом, при этом имеет место равенство $\Phi_1(x_0)=0$. Образами векторных полей f и f_0 при касательном отображении Φ_{1*}, индуцированном отображением Φ_1, являются векторные поля

$$\Phi_{1*}f=\gamma_1\frac{\partial}{\partial z_1}+\gamma_2\frac{\partial}{\partial z_2}+\gamma_3\frac{\partial}{\partial z_3},\quad \Phi_{1*}f_0=\gamma_{01}\frac{\partial}{\partial z_1}+\gamma_{02}\frac{\partial}{\partial z_2}+\gamma_{03}\frac{\partial}{\partial z_3},$$

где γ_i, γ_{0i} – некоторые функции, гладкие в окрестности точки $z=0$, $i=1,2,3$. Поскольку в окрестности точки x_0 выполнены равенства $fz_1=0$ и $fz_2=0$, то $\gamma_1=\gamma_2=0$ и, следовательно, векторное поле $\Phi_{1*}f$ в окрестности точки $z=0$ представимо в виде

$$\Phi_{1*}f=\gamma_3\frac{\partial}{\partial z_3}. \tag{8}$$

Так как $f(x_0)\neq 0$, то $\Phi_{1*}|_{x_0}f(x_0)\neq 0$ и, следовательно, $\gamma_3(0)\neq 0$. Модуль $\Phi_{1*}\mathcal{F}$ в результате принимает вид

$$\Phi_{1*}\mathcal{F}=\operatorname{span}\left\{\Phi_{1*}f_0,\gamma_3\frac{\partial}{\partial z_3}\right\}=\operatorname{span}\left\{\Phi_{1*}f_0,\frac{\partial}{\partial z_3}\right\},$$

где

$$\Phi_{1*}f_0=\gamma_{01}\frac{\partial}{\partial z_1}+\gamma_{02}\frac{\partial}{\partial z_2}\mod\left\{\frac{\partial}{\partial z_3}\right\}. \tag{9}$$

Так как $\dim\mathcal{F}(x_0)=1$, то $\dim\Phi_{1*}|_{x_0}\mathcal{F}(x_0)=1$ и поэтому $\gamma_{01}(0)=\gamma_{02}(0)=0$.

Построим модуль $\Phi_{1*}\mathcal{F}_1$. Из сравнения (9) следует, что

$$\Phi_{1*}\mathcal{F}_1=\operatorname{span}\left\{\Phi_{1*}f_0,\frac{\partial}{\partial z_3}\right\}+\operatorname{span}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial z_3},\gamma_{01}\frac{\partial}{\partial z_1}+\gamma_{02}\frac{\partial}{\partial z_2}\right]\right\}=$$

$$=\operatorname{span}\left\{\Phi_{1*}f_0,\frac{\partial}{\partial z_3}\right\}+\operatorname{span}\left\{(\gamma_{01})'_{z_3}\frac{\partial}{\partial z_1}+(\gamma_{02})'_{z_3}\frac{\partial}{\partial z_2}\right\}.$$

Введём обозначения

$$\gamma_{11}=(\gamma_{01})'_{z_3},\quad \gamma_{12}=(\gamma_{02})'_{z_3} \tag{10}$$

и перепишем выражение для модуля $\Phi_{1*}\mathcal{F}_1$ в виде

$$\Phi_{1*}\mathcal{F}_1=\operatorname{span}\left\{\Phi_{1*}f_0,\gamma_{11}\frac{\partial}{\partial z_1}+\gamma_{12}\frac{\partial}{\partial z_2},\frac{\partial}{\partial z_3}\right\}. \tag{11}$$

Покажем, что хотя бы для одного номера $j\in\{1,2\}$ выполнены соотношения $\gamma_{1j}(0)\neq 0$, $(\det\gamma)'_{z_j}(0)\neq 0$, где

$$\gamma=\begin{pmatrix}\gamma_{01} & \gamma_{02}\\ \gamma_{11} & \gamma_{12}\end{pmatrix}.$$

Так как $\dim\mathcal{F}_1(x_0)=2$, то $\dim\Phi_{1*}|_{x_0}\mathcal{F}_1(x_0)=2$ и, следовательно, хотя бы одна из функций γ_{11}, γ_{12} отлична от нуля в точке $z=0$. Не ограничивая общности рассуждений, предположим, что $\gamma_{12}(0)\neq 0$. Это предположение позволяет записать выражение (11) в виде

$$\Phi_{1*}\mathcal{F}_1=\operatorname{span}\left\{\Phi_{1*}f_0,\frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}}\frac{\partial}{\partial z_1}+\frac{\partial}{\partial z_2},\frac{\partial}{\partial z_3}\right\}.$$

Из сравнения (9) вытекает, что

$$\Phi_{1*}f_0 = \frac{\det\gamma}{\gamma_{12}}\frac{\partial}{\partial z_1} + \gamma_{02}\left(\frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}}\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}\right) \bmod \left\{\frac{\partial}{\partial z_3}\right\}. \tag{12}$$

В силу определения множества S с учётом сравнения (12) получаем, что $S = \{z \in \mathbb{R}^3 : \det\gamma(z) = 0\}$. Из соотношения (8) вытекает, что векторное поле $\partial/\partial z_3$ является касательным к поверхности S. Отметим, что из равенств $\gamma_{01}(0) = \gamma_{02}(0) = 0$ следует равенство $\det\gamma(0) = 0$. Отсюда заключаем, что $0 \in S$.

Так как функция $(\det\gamma)/\gamma_{12}$ равна нулю на поверхности S и векторное поле $\partial/\partial z_3$ является касательным к S, то на поверхности S имеет место равенство

$$\left(\frac{\det\gamma}{\gamma_{12}}\right)'_{z_3} = 0.$$

Перепишем его в виде

$$\left(\gamma_{01} - \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}}\gamma_{02}\right)'_{z_3} = 0, \quad z \in S.$$

Учитывая обозначения (10), приходим к равенству

$$\left(\frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}}\right)'_{z_3}\gamma_{02} = 0, \quad z \in S. \tag{13}$$

Пусть $V(0)$ – окрестность точки $z = 0$, в которой функция γ_{12} не обращается в нуль. Покажем, что $(\gamma_{11}/\gamma_{12})'_{z_3} = 0$ на множестве $S \bigcap V(0)$. Предположим, что в некоторой точке $z_0 \in S \bigcap V(0)$ выполнено соотношение $(\gamma_{11}/\gamma_{12})'_{z_3}(z_0) \neq 0$. Вследствие непрерывности функции $(\gamma_{11}/\gamma_{12})'_{z_3}$ это означает, что соотношение $(\gamma_{11}/\gamma_{12})'_{z_3} \neq 0$ выполнено и в некоторой окрестности $W(z_0)$ точки z_0. Всегда можем считать, что $W(z_0)$ целиком содержится в $V(0)$. В силу соотношения (13) получаем, что на множестве $S \bigcap W(z_0)$ выполнено равенство $\gamma_{02} = 0$. Так как векторное поле $\partial/\partial z_3$ является касательным к S, то на участке поверхности S, который расположен в $W(z_0)$, имеет место равенство $(\gamma_{02})'_{z_3} = 0$, или, что то же самое, $\gamma_{12} = 0$. Полученное противоречие доказывает, что $(\gamma_{11}/\gamma_{12})'_{z_3} = 0$ на множестве $S \bigcap V(0)$, в том числе и в точке $z = 0$.

В силу сравнения (12) модуль $\Phi_{1*}\mathcal{F}_2$ имеет вид

$$\Phi_{1*}\mathcal{F}_2 = \Phi_{1*}\mathcal{F}_1 + \operatorname{span}\left\{\left[\det\gamma\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}}\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}\right], \left[\frac{\partial}{\partial z_3}, \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}}\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}\right]\right\}.$$

Поскольку

$$\left[\frac{\partial}{\partial z_3}, \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}}\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}\right] = \left(\frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}}\right)'_{z_3}\frac{\partial}{\partial z_1},$$

$(\gamma_{11}/\gamma_{12})'_{z_3}(0) = 0$ и $\dim \Phi_{1*}|_{x_0}\mathcal{F}_2(x_0) = 3$, то

$$\Phi_{1*}\mathcal{F}_2 = \Phi_{1*}\mathcal{F}_1 + \operatorname{span}\left\{\left[\det\gamma\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}}\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}\right]\right\}.$$

Введём обозначение

$$\xi = \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}}\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Так как

$$\left[\det\gamma\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}}\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}\right] = \det\gamma\left[\frac{\partial}{\partial z_1}, \xi\right] - \xi(\det\gamma)\frac{\partial}{\partial z_1},$$

то

$$\Phi_{1*}\mathcal{F}_2 = \Phi_{1*}\mathcal{F}_1 + \operatorname{span}\left\{\det\gamma\left[\frac{\partial}{\partial z_1}, \xi\right] - \xi(\det\gamma)\frac{\partial}{\partial z_1}\right\}.$$

Поскольку $\dim \Phi_{1*}|_{x_0}\mathcal{F}_2(x_0) = 3$ и $\det\gamma(0) = 0,$ то $\xi(\det\gamma)(0) \neq 0.$ С учётом вида векторного поля ξ полученный результат означает, что по крайней мере одна из частных производных $(\det\gamma)'_{z_1},$ $(\det\gamma)'_{z_2}$ отлична от нуля в точке $z = 0.$ Если $(\det\gamma)'_{z_2}(0) \neq 0,$ то требуемое утверждение доказано. Если же $(\det\gamma)'_{z_2}(0) = 0,$ то

$$\xi(\det\gamma)(0) = \frac{\gamma_{11}(0)}{\gamma_{12}(0)}(\det\gamma)'_{z_1}(0).$$

Так как $\xi(\det\gamma)(0) \neq 0,$ то $\gamma_{11}(0) \neq 0,$ $(\det\gamma)'_{z_1}(0) \neq 0.$ Таким образом, показано, что существует номер $j \in \{1, 2\},$ для которого выполнены неравенства $\gamma_{1j}(0) \neq 0,$ $(\det\gamma)'_{z_j}(0) \neq 0.$

Далее будем предполагать, что имеют место соотношения $\gamma_{12}(0) \neq 0,$ $(\det\gamma)'_{z_2}(0) \neq 0.$ Тогда, согласно теореме о неявной функции, уравнение $\det\gamma(z) = 0$ разрешимо относительно z_2 в окрестности точки $z = 0$ и может быть записано в этой окрестности в виде $z_2 = \psi(z_1, z_3),$ где ψ – некоторая гладкая функция, удовлетворяющая условию $\psi(0, 0) = 0.$ Поскольку функция $z_2 - \psi(z_1, z_3)$ равна нулю на поверхности S и векторное поле $\partial/\partial z_3$ является касательным к $S,$ то на поверхности S имеет место равенство

$$(z_2 - \psi(z_1, z_3))'_{z_3} = 0.$$

Запишем его в виде

$$\psi'_{z_3}(z_1, z_3)|_{z_2=\psi(z_1,z_3)} = 0$$

и заметим, что поскольку функция $\psi'_{z_3}(z_1, z_3)$ не зависит от $z_2,$ то в окрестности точки $z = 0$ выполнено равенство

$$\psi'_{z_3}(z_1, z_3) = 0.$$

Следовательно, поверхность S в окрестности точки $z = 0$ задаётся уравнением $z_2 = \psi(z_1),$ в котором функция ψ удовлетворяет условию $\psi(0) = 0.$ Из доказанного вытекает, что функция $\det\gamma$ в окрестности точки $z = 0$ представима в виде $\det\gamma(z) = (z_2 - \psi(z_1))C(z),$ где $C(z)$ – некоторая гладкая функция. Из соотношения $(\det\gamma)'_{z_2}(0) \neq 0$ вытекает, что $C(0) \neq 0.$ Отсюда следует, что модуль $\Phi_{1*}\mathcal{F}_1$ в окрестности точки $z = 0$ имеет вид

$$\Phi_{1*}\mathcal{F}_1 = \operatorname{span}\left\{(z_2 - \psi(z_1))\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}}\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial z_3}\right\}.$$

Как показано выше, на участке поверхности $S,$ расположенном в некоторой окрестности точки $z = 0,$ имеет место равенство $(\gamma_{11}/\gamma_{12})'_{z_3} = 0,$ поэтому в окрестности точки $z = 0$ функция $(\gamma_{11}/\gamma_{12})'_{z_3}$ представима в виде

$$\left(\frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}}\right)'_{z_3} = (z_2 - \psi(z_1))B(z),$$

где $B(z)$ – некоторая функция, гладкая в окрестности точки $z = 0.$ Интегрируя полученное равенство по переменной $z_3,$ находим

$$\frac{\gamma_{11}(z)}{\gamma_{12}(z)} = (z_2 - \psi(z_1))D(z) + \varphi(z_1, z_2), \tag{14}$$

где $D(z),$ $\varphi(z_1, z_2)$ – некоторые гладкие функции. Модуль $\Phi_{1*}\mathcal{F}_1,$ таким образом, принимает вид

$$\Phi_{1*}\mathcal{F}_1 = \operatorname{span}\left\{(z_2 - \psi(z_1))\frac{\partial}{\partial z_1}, ((z_2 - \psi(z_1))D(z) + \varphi(z_1, z_2))\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial z_3}\right\}.$$

Вычитая из второй образующей первую образующую, умноженную на $D(z)$, получаем

$$\Phi_{1*}\mathcal{F}_1 = \operatorname{span}\left\{(z_2 - \psi(z_1))\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2} + \varphi(z_1, z_2)\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_3}\right\}.$$

Из сравнения (12) и равенства (14) вытекает, что

$$\Phi_{1*}f_0 = (z_2 - \psi(z_1))\tilde{\varepsilon}_{00}\frac{\partial}{\partial z_1} \operatorname{mod}\left\{\frac{\partial}{\partial z_2} + \varphi(z_1, z_2)\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_3}\right\},$$

где

$$\tilde{\varepsilon}_{00} = \frac{C}{\gamma_{12}} + \gamma_{02}D.$$

Так как $C(0) \neq 0$ и $\gamma_{02}(0) = 0$, то $\tilde{\varepsilon}_{00}(0) \neq 0$.

Выпрямляя векторное поле $\partial/\partial z_2 + \varphi(z_1, z_2)\partial/\partial z_1$, оставляя для упрощения записи прежние обозначения z_1, z_2, z_3 для переменных состояния и опуская специальное обозначение для выпрямляющего диффеоморфизма, представим модуль $\Phi_{1*}\mathcal{F}_1$ в виде

$$\Phi_{1*}\mathcal{F}_1 = \operatorname{span}\left\{(z_2 - \hat{\psi}(z_1))\frac{\partial}{\partial z_1}, \frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial z_3}\right\}, \tag{15}$$

где $\hat{\psi}(z_1)$ – гладкая функция, удовлетворяющая условию $\hat{\psi}(0) = 0$,

$$\Phi_{1*}f_0 = (z_2 - \hat{\psi}(z_1))\hat{\varepsilon}_{00}\frac{\partial}{\partial z_1} \operatorname{mod}\left\{\frac{\partial}{\partial z_2}, \frac{\partial}{\partial z_3}\right\}, \tag{16}$$

$\hat{\varepsilon}_{00}$ – гладкая функция такая, что $\hat{\varepsilon}_{00}(0) \neq 0$.

Рассмотрим диффеоморфизм Φ_2, задаваемый равенствами

$$\overline{y}_1 = z_1, \quad \overline{y}_2 = z_2 - \hat{\psi}(z_1), \quad \overline{y}_3 = z_3.$$

Отметим, что поскольку $\hat{\psi}(0) = 0$, то $\Phi_2(0) = 0$. Установим образы при отображении Φ_{2*} векторных полей, порождающих, согласно равенству (15), модуль $\Phi_{1*}\mathcal{F}_1$. Обозначим через Φ_{12} композицию диффеоморфизмов Φ_1 и Φ_2, т.е. $\Phi_{12} = \Phi_2 \circ \Phi_1$. Матрица Якоби отображения Φ_2 имеет вид

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\hat{\psi}' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\Phi_{2*}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right) = -\hat{\psi}'(\overline{y}_1)\frac{\partial}{\partial \overline{y}_2} + \frac{\partial}{\partial \overline{y}_1}, \quad \Phi_{2*}\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right) = \frac{\partial}{\partial \overline{y}_2}, \quad \Phi_{2*}\left(\frac{\partial}{\partial z_3}\right) = \frac{\partial}{\partial \overline{y}_3}.$$

Так как

$$\Phi_{2*}\left((z_2 - \hat{\psi}(z_1))\frac{\partial}{\partial z_1}\right) = \overline{y}_2\left(-\hat{\psi}'(\overline{y}_1)\frac{\partial}{\partial \overline{y}_2} + \frac{\partial}{\partial \overline{y}_1}\right) = \overline{y}_2\frac{\partial}{\partial \overline{y}_1} \ \operatorname{mod}\ \left\{\frac{\partial}{\partial \overline{y}_2}\right\}, \tag{17}$$

то модуль $\Phi_{12*}\mathcal{F}_1$ принимает вид

$$\Phi_{12*}\mathcal{F}_1 = \operatorname{span}\left\{\overline{y}_2\frac{\partial}{\partial \overline{y}_1}, \frac{\partial}{\partial \overline{y}_2}, \frac{\partial}{\partial \overline{y}_3}\right\}.$$

Из сравнений (16) и (17) следует, что

$$\Phi_{12*}f_0 = \overline{\varepsilon}_{00}\overline{y}_2\frac{\partial}{\partial \overline{y}_1} \ \operatorname{mod}\ \left\{\frac{\partial}{\partial \overline{y}_2}, \frac{\partial}{\partial \overline{y}_3}\right\},$$

где $\overline{\varepsilon}_{00}$ – гладкая функция, удовлетворяющая условию $\overline{\varepsilon}_{00}(0) \neq 0$. Отсюда, в свою очередь, вытекает сравнение

$$\Phi_{12*} f_0 = \overline{\varepsilon}_{00}\left(\overline{y}_2 \frac{\partial}{\partial \overline{y}_1} + \mu \frac{\partial}{\partial \overline{y}_2}\right) \mod \left\{\frac{\partial}{\partial \overline{y}_3}\right\}, \tag{18}$$

в котором μ – некоторая гладкая функция. Из доказанного следует также равенство

$$\Phi_{12*} f = \overline{\varepsilon}_{11} \frac{\partial}{\partial \overline{y}_3}, \tag{19}$$

где $\overline{\varepsilon}_{11}$ – гладкая функция, удовлетворяющая условию $\overline{\varepsilon}_{11}(0) \neq 0$.

Поскольку $\overline{\varepsilon}_{00}(0) \neq 0$ и $\overline{\varepsilon}_{11}(0) \neq 0$, то из равенства $\Phi_{12*}\mathcal{F}_0 = \operatorname{span}\{\Phi_{12*} f_0, \Phi_{12*} f\}$ вытекает соотношение

$$\Phi_{12*}\mathcal{F}_0 = \operatorname{span}\left\{\overline{y}_2 \frac{\partial}{\partial \overline{y}_1} + \mu \frac{\partial}{\partial \overline{y}_2}, \frac{\partial}{\partial \overline{y}_3}\right\}. \tag{20}$$

Из условия $\dim \Phi_{12*}|_{x_0}\mathcal{F}_0(x_0) = 1$ следует, что $\mu(0) = 0$.

Покажем, что $\mu'_{\overline{y}_3}(0) \neq 0$. Действительно, модуль $\Phi_{12*}\mathcal{F}_1$ представим в виде

$$\Phi_{12*}\mathcal{F}_1 = \Phi_{12*}\mathcal{F}_0 + \operatorname{span}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial \overline{y}_3}, \overline{y}_2 \frac{\partial}{\partial \overline{y}_1} + \mu \frac{\partial}{\partial \overline{y}_2}\right]\right\}.$$

Из равенств

$$\left[\frac{\partial}{\partial \overline{y}_3}, \overline{y}_2 \frac{\partial}{\partial \overline{y}_1} + \mu \frac{\partial}{\partial \overline{y}_2}\right] = \mu'_{\overline{y}_3} \frac{\partial}{\partial \overline{y}_2}$$

и $\dim \Phi_{12*}|_{x_0}\mathcal{F}_1(x_0) = 2$ вытекает, что $\mu'_{\overline{y}_3}(0) \neq 0$.

Рассмотрим диффеоморфизм Φ_3, задаваемый равенствами

$$y_1 = \overline{y}_1, \quad y_2 = \overline{y}_2, \quad y_3 = \mu(\overline{y}).$$

Так как $\mu(0) = 0$, то $\Phi_3(0) = 0$. Найдём образы при отображении Φ_{3*} векторных полей, порождающих модуль $\Phi_{12*}\mathcal{F}_0$. Пусть Φ – композиция диффеоморфизмов Φ_{12} и Φ_3, т.е. $\Phi = \Phi_3 \circ \Phi_{12}$. Матрица Якоби отображения Φ_3 имеет вид

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial \overline{y}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \mu'_{\overline{y}_1} & \mu'_{\overline{y}_2} & \mu'_{\overline{y}_3} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\Phi_{3*}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{y}_i}\right) = \frac{\partial}{\partial y_i} + \mu'_{\overline{y}_i}(\Phi_3^{-1}(y)) \frac{\partial}{\partial y_3}, \quad i = 1, 2, \quad \Phi_{3*}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{y}_3}\right) = \mu'_{\overline{y}_3}(\Phi_3^{-1}(y)) \frac{\partial}{\partial y_3}.$$

Поскольку

$$\Phi_{3*}\left(\overline{y}_2 \frac{\partial}{\partial \overline{y}_1} + \mu \frac{\partial}{\partial \overline{y}_2}\right) = y_2\left(\frac{\partial}{\partial y_1} + \mu'_{\overline{y}_1}(\Phi_3^{-1}(y)) \frac{\partial}{\partial y_3}\right) + \mu(\Phi_3^{-1}(y))\left(\frac{\partial}{\partial y_2} + \mu'_{\overline{y}_2}(\Phi_3^{-1}(y)) \frac{\partial}{\partial y_3}\right),$$

то в силу равенства $\mu(\Phi_3^{-1}(y)) = y_3$ будем иметь

$$\Phi_*\left(\overline{y}_2 \frac{\partial}{\partial \overline{y}_1} + \mu \frac{\partial}{\partial \overline{y}_2}\right) = y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_3 \frac{\partial}{\partial y_2} \mod \left\{\frac{\partial}{\partial y_3}\right\}.$$

В силу соотношения (20) и того, что $\mu'_{\overline{y}_3}(0) \neq 0$, получаем

$$\Phi_*\mathcal{F}_0 = \operatorname{span}\left\{y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_3 \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3}\right\}.$$

Из равенства (19) вытекает, что

$$\Phi_* f = \varepsilon_{11}\frac{\partial}{\partial y_3},$$

а из сравнения (18) – равенство

$$\Phi_* f_0 = \varepsilon_{00}\left(y_2\frac{\partial}{\partial y_1} + y_3\frac{\partial}{\partial y_2}\right) + \varepsilon_{01}\frac{\partial}{\partial y_3},$$

в котором $\varepsilon_{00},\ \varepsilon_{01},\ \varepsilon_{11}$ – гладкие функции, удовлетворяющие условиям $\varepsilon_{00}(0)\neq 0,\ \varepsilon_{11}(0)\neq 0.$

Таким образом, установлено, что

$$\begin{pmatrix}\Phi_* f_0\\ \Phi_* f\end{pmatrix} = \varepsilon(y)\begin{pmatrix} y_2\dfrac{\partial}{\partial y_1} + y_3\dfrac{\partial}{\partial y_2}\\ \dfrac{\partial}{\partial y_3}\end{pmatrix},$$

где

$$\varepsilon = \begin{pmatrix}\varepsilon_{00} & \varepsilon_{01}\\ 0 & \varepsilon_{11}\end{pmatrix}.$$

Так как $\varepsilon_{00}(0)\neq 0,\ \varepsilon_{11}(0)\neq 0,$ то $\det\varepsilon(0)\neq 0.$ Используя формулу (7), окончательно приходим к представлению

$$\begin{pmatrix}\Phi_* f_0\\ \Phi_* f_1\end{pmatrix} = \beta^{-1}(\Phi^{-1}(y))\varepsilon(y)\begin{pmatrix} y_2\dfrac{\partial}{\partial y_1} + y_3\dfrac{\partial}{\partial y_2}\\ \dfrac{\partial}{\partial y_3}\end{pmatrix}. \tag{21}$$

Введём в рассмотрение матрицу $\tilde A = (\tilde\alpha_{ij})_{i,j=0,1}$ по формуле $\tilde A(y) = \beta^{-1}(\Phi^{-1}(y))\varepsilon(y).$ Поскольку обе матрицы в правой части этого равенства невырождены в точке $y=0,$ то и матрица $\tilde A(y)$ невырождена в точке $y=0.$ Из представления (21) вытекает, что диффеоморфизм Φ преобразует в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 систему (5) в систему

$$\dot y_1 = \tilde\alpha_{00}(y)y_2 + \tilde\alpha_{10}(y)y_2u,\quad \dot y_2 = \tilde\alpha_{00}(y)y_3 + \tilde\alpha_{10}(y)y_3u,\quad \dot y_3 = \tilde\alpha_{01}(y) + \tilde\alpha_{11}(y)u. \tag{22}$$

Несложно видеть, что замена независимой переменной

$$\dot\tau = \tilde\alpha_{00}(y) + \tilde\alpha_{10}(y)u$$

и замена управления

$$v = \frac{\tilde\alpha_{01}(y) + \tilde\alpha_{11}(y)u}{\tilde\alpha_{00}(y) + \tilde\alpha_{10}(y)u}$$

преобразуют систему (22) на множестве $M_{yu} = \{(y,u) : y\in\Phi(U(x_0)),\ \tilde\alpha_{00}(y) + \tilde\alpha_{10}(y)u\neq 0\}$ в линейную управляемую систему (6), ограниченную на множество

$$M_{yv} = \{(y,v) : y\in\Phi(U(x_0)), \tilde\alpha_{11}(y) - \tilde\alpha_{10}(y)v\neq 0\}.$$

Отметим, что матрица A из определения A-орбитальной эквивалентности по обратной связи и состоянию связана с матрицей $\tilde A$ соотношением $A(x) = \tilde A^{\mathrm{т}}(\Phi(x)).$

Необходимость. Пусть системы (5) и (6) A-орбитально эквивалентны в паре точек $(x_0,0).$ Системе (6) соответствуют векторные поля

$$h_0 = y_2\frac{\partial}{\partial y_1} + y_3\frac{\partial}{\partial y_2},\quad h_1 = \frac{\partial}{\partial y_3},$$

порождающие модуль $\mathcal{H} = \operatorname{span}\{h_0, h_1\}$. A-орбитальная эквивалентность систем (5) и (6) в паре точек $(x_0, 0)$ означает, что существуют окрестности $U(x_0)$ и $V(0)$, матрица $A = (\alpha_{ij})_{i,j=0,1}$, $\alpha_{ij} \in C^\infty(U(x_0))$, $i, j = 0, 1$, невырожденная в $U(x_0)$, и диффеоморфизм $\Phi : U(x_0) \to V(0)$, удовлетворяющие условиям $\Phi(x_0) = 0$ и

$$\begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} = \Phi_* \left((A^{-1})^{\text{т}} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} \right).$$

Из последнего равенства следует представление

$$\Phi_* \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} = A^{\text{т}}(\Phi^{-1}(y)) \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix},$$

означающее, что заменой переменных $y = \Phi(x)$ система (5) преобразуется в систему $\dot{y} = g_0(y) + g_1(y)u$, где

$$g_0 = \alpha_{00}(\Phi^{-1}(y))h_0 + \alpha_{10}(\Phi^{-1}(y))h_1, \quad g_1 = \alpha_{01}(\Phi^{-1}(y))h_0 + \alpha_{11}(\Phi^{-1}(y))h_1.$$

Так как матрица $A(x)$ невырождена при $x \in U(x_0)$, то матрица $A^{\text{т}}(\Phi^{-1}(y))$ невырождена при $y \in V(0)$. Поэтому в окрестности точки $y = 0$ модуль, порождённый векторными полями g_0 и g_1, совпадает с модулем $\mathcal{H}$. Таким образом, $\Phi_*\mathcal{F} = \mathcal{H}$. Построение производного флага модуля $\mathcal{H}$ даёт следующий результат:

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}, \quad \mathcal{H}_1 = \operatorname{span}\left\{ y_2 \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3} \right\}, \quad \mathcal{H}_2 = \left\{ \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3} \right\}.$$

Нетрудно видеть, что $\dim \mathcal{H}_0(0) = 1$, $\dim \mathcal{H}_1(0) = 2$, $\dim \mathcal{H}_2(0) = 3$. Отсюда вытекает, что имеют место равенства $d_0 = 1$, $d_1 = 2$, $d_2 = 3$.

Множество $S_y = \{y \in \mathbb{R}^3 : \dim \mathcal{H}_1(y) < 3\}$, очевидно, принимает вид $S_y = \{y \in \mathbb{R}^3 : y_2 = 0\}$. Поскольку $h_1 y_2 = 0$, то векторное поле $h_1 \in \mathcal{H}$ является касательным к поверхности S_y. Из доказанного следует, что в качестве векторного поля f из условия теоремы может быть взято векторное поле $\Phi_*^{-1} h_1$.

3. Алгоритм линеаризации. Из доказательства достаточности теоремы вытекает следующий алгоритм преобразования системы (5) в систему (6).

Построим производный флаг модуля $\mathcal{F} = \operatorname{span}\{f_0, f_1\}$, т.е. найдём модули $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$. Вычислим размерности $d_k = \dim \mathcal{F}_k(x_0)$, $k = 0, 1, 2$, и проверим выполнение равенств $d_0 = 1$, $d_1 = 2$, $d_2 = 3$. Построим множество $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : \dim \mathcal{F}_1(x) < 3\}$ и найдём векторное поле $f \in \mathcal{F}$, касательное к S и отличное от нуля в точке x_0.

Определим независимые первые интегралы z_1 и z_2 векторного поля f в окрестности точки x_0. Дополним z_1 и z_2 функцией z_3 до системы функций, независимых в окрестности точки x_0. Выберем все функции z_i такими, чтобы выполнялись равенства $z_i(x_0) = 0$, $i = 1, 2, 3$. Обозначим через Φ_1 диффеоморфизм, задаваемый системой функций

$$z_1 = z_1(x), \quad z_2 = z_2(x), \quad z_3 = z_3(x).$$

Из равенства $d_0 = 1$ следует, что найдётся номер $k \in \{0, 1\}$ такой, что $f_k(x_0) \neq 0$. Найдём образ векторного поля f_{1-k} при отображении Φ_{1*}:

$$\Phi_{1*} f_{1-k} = \gamma_{01} \frac{\partial}{\partial z_1} + \gamma_{02} \frac{\partial}{\partial z_2} \mod \left\{ \frac{\partial}{\partial z_3} \right\},$$

положим $\gamma_{11} = (\gamma_{01})'_{z_3}$, $\gamma_{12} = (\gamma_{02})'_{z_3}$ и обозначим $\gamma = (\gamma_{ij})_{i=0,1;j=1,2}$. Как показано в доказательстве теоремы, хотя бы для одного номера $j \in \{1, 2\}$ выполнены соотношения $\gamma_{1j}(0) \neq 0$, $(\det \gamma)'_{z_j}(0) \neq 0$. В дальнейших рассуждениях будем предполагать, что $j = 2$. Тогда уравнение

$\det\gamma(z)=0$ в окрестности точки $z=0$ разрешимо относительно z_2. Как показано в доказательстве теоремы, при этом получается соотношение вида $z_2=\psi(z_1)$, где ψ – некоторая гладкая функция.

В доказательстве теоремы показано, что существуют гладкие функции $D(z)$ и $\varphi(z_1,z_2)$, для которых имеет место равенство (14). Пусть $\overline{z}_1=\sigma(z_1,z_2)$, $\overline{z}_2=z_2$, $\overline{z}_3=z_3$ – диффеоморфизм, выпрямляющий векторное поле $\partial/\partial z_2+\varphi(z_1,z_2)\partial/\partial z_1$. Положим

$$y_1=\sigma(z_1(x),z_2(x)),\quad y_2=z_2(x)-\psi(z_1(x)).$$

Вычислим производную $\dot y_1$ функции y_1 в силу системы (5) и разделим её на y_2. В результате получим соотношение вида

$$\frac{\dot y_1}{y_2}=\alpha_{00}(x)+\alpha_{01}(x)u,$$

в котором α_{00} и α_{01} – некоторые функции, являющиеся, как показано в доказательстве теоремы, гладкими в окрестности точки x_0. Вычислим производную $\dot y_2$ функции y_2 в силу системы (5) и положим

$$y_3=\frac{\dot y_2}{\alpha_{00}(x)+\alpha_{01}(x)u}.$$

Как показано в доказательстве теоремы, функция y_3 зависит только от состояния x и является гладкой в окрестности точки x_0. Наконец, вычислим производную функции y_3 в силу системы (5):

$$\dot y_3=\alpha_{10}(x)+\alpha_{11}(x)u.$$

Функции y_1, y_2 и y_3 задают линеаризующий диффеоморфизм Φ в пространстве состояний, а функции α_{ij}, $i,j=0,1$, – матрицу A, которая определяет линеаризующие замены управления и независимой переменной.

4. Пример. Покажем, что система

$$\dot x_1=u,\quad \dot x^2=x_3+x_1^3+(2x_1-x_2x_3-x_1^3x_2)u,\quad \dot x_3=x_1-(x_1x_2+3x_1^2)u \tag{23}$$

A-орбитально эквивалентна системе (6) в паре точек $(0,0)$ и построим линеаризующие преобразования. Отметим, что точка $x=0$ является положением равновесия системы (23).

Системе (23) соответствуют векторные поля

$$f_0=(x_3+x_1^3)\frac{\partial}{\partial x_2}+x_1\frac{\partial}{\partial x_3},\quad f_1=\frac{\partial}{\partial x_1}+(2x_1-x_2x_3-x_1^3x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}-(x_1x_2+3x_1^2)\frac{\partial}{\partial x_3}$$

и модуль $\mathcal F=\operatorname{span}\{f_0,f_1\}$. Построим производный флаг модуля $\mathcal F$. По определению $\mathcal F_0=\mathcal F$. Очевидно, что $\dim\mathcal F_0(0)=1$. Вычисления показывают, что векторное поле $\operatorname{ad}_{f_0}f_1$ имеет вид

$$\operatorname{ad}_{f_0}f_1=-(x_3+x_1^3)^2\frac{\partial}{\partial x_2}-(1+x_1x_3+x_1^4)\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Так как $\operatorname{ad}_{f_0}f_1\notin\mathcal F_0$, то $\mathcal F_1=\operatorname{span}\{f_0,f_1,\operatorname{ad}_{f_0}f_1\}$. Нетрудно проверить, что $\dim\mathcal F_1(0)=2$. Векторные поля $\operatorname{ad}^2_{f_0}f_1$ и $[f_1,\operatorname{ad}_{f_0}f_1]$ имеют вид

$$\operatorname{ad}^2_{f_0}f_1=(1-x_1x_3-x_1^4)\frac{\partial}{\partial x_2}-x_1^2\frac{\partial}{\partial x_3},$$

$$[f_1,\operatorname{ad}_{f_0}f_1]=(-x_2+x_1x_2x_3+x_1^4x_2-(x_3+x_1^3)^3)\frac{\partial}{\partial x_2}+(-x_3-x_1^3+x_1^2x_2-x_1(x_3+x_1^3)^2)\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Непосредственная проверка показывает, что $\operatorname{ad}^2_{f_0}f_1\notin\mathcal F_1$ и

$$[f_1,\operatorname{ad}_{f_0}f_1]=-x_2\operatorname{ad}^2_{f_0}f_1+(x_3+x_1^3)\operatorname{ad}_{f_0}f_1.$$

Следовательно, $\mathcal{F}_2 = \operatorname{span}\{f_0, f_1, \operatorname{ad}_{f_0} f_1, \operatorname{ad}^2_{f_0} f_1\}$. Нетрудно убедиться, что $\dim \mathcal{F}_2(0) = 3$. Таким образом, условие 1) теоремы выполнено.

Построим множество S. Чтобы найти множество точек x, в которых $\dim \mathcal{F}_1(x) < 3$, приравняем к нулю определитель, столбцами которого являются столбцы координат векторных полей f_0, f_1, $\operatorname{ad}_{f_0} f_1$. В результате получим уравнение

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x_3 + x_1^3 & 2x_1 & 0 \\ x_1 & -3x_1^2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

или $x_3 + x_1^3 = 0$. Следовательно, $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 + x_1^3 = 0\}$. Проверим, найдётся ли в модуле $\mathcal{F}$ векторное поле f, отличное от нуля в точке $x = 0$ и касательное к поверхности S. Будем искать поле f в виде $f = \beta_0 f_0 + \beta_1 f_1$, где функции β_0, β_1 необходимо найти. В силу условия $f(x_3 + x_1^3) = 0$, $x \in S$, получаем равенство $\beta_0 f_0(x_3 + x_1^3) + \beta_1 f_1(x_3 + x_1^3) = 0$, $x \in S$, которое приводит к соотношению $\beta_0 x_1 - \beta_1 x_1 x_2 = 0$, $x \in S$. Найденное соотношение превращается в тождество (выполненное не только на поверхности S, но и всюду в $\mathbb{R}^3$), если положить, например, $\beta_0 = x_2$, $\beta_1 = 1$. Отсюда следует, что в качестве векторного поля f можно взять поле

$$f = x_2 f_0 + f_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - 3x_1^2 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Двумя независимыми первыми интегралами векторного поля f являются, например, функции $z_1 = x_2 - x_1^2$ и $z_2 = x_3 + x_1^3$. Дополним z_1 и z_2 функцией $z_3 = x_1$ до системы из трёх независимых функций и рассмотрим диффеоморфизм Φ_1, задаваемый равенствами

$$z_1 = x_2 - x_1^2, \quad z_2 = x_3 + x_1^3, \quad z_3 = x_1.$$

Поскольку $f_1(0) \neq 0$, то необходимо найти образ векторного поля f_0 при касательном отображении Φ_{1*}. Так как матрица Якоби отображения Φ_1 имеет вид

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \begin{pmatrix} -2x_1 & 1 & 0 \\ 3x_1^2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то

$$\Phi_{1*} f_0 = z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_3 \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Из полученного представления вытекает, что $\gamma_{01} = z_2$, $\gamma_{02} = z_3$. Следовательно, $\gamma_{11} = 0$, $\gamma_{12} = 1$ и $\det \gamma(z) = z_2$. Равенство $\det \gamma(z) = 0$ эквивалентно соотношению $z_2 = 0$. Следовательно, $\psi(z_1) = 0$. Представление (14) выполнено с $D(z) = 0$, $\varphi(z_1, z_2) = 0$. Так как $\varphi = 0$, то диффеоморфизм, выпрямляющий векторное поле $\partial/\partial z_2 + \varphi(z_1, z_2)\partial/\partial z_1$, является тождественным отображением. Первые два соотношения, задающие линеаризующую замену состояния, имеют, таким образом, вид $y_1 = z_1(x)$, $y_2 = z_2(x)$ или, что то же самое, $y_1 = x_2 - x_1^2$, $y_2 = x_3 + x_1^2$.

Чтобы завершить нахождение линеаризующих преобразований, осталось найти функцию y_3 и матрицу A. Вычисления показывают, что производная функции y_1 в силу системы (23) имеет вид $\dot{y}_1 = x_3 + x_1^3 - x_2(x_3 + x_1^3)u$. Следовательно, $\dot{y}_1/y_2 = 1 - x_2 u$. Отсюда вытекает, что $\alpha_{00} = 1$, $\alpha_{01} = -x_2$ и

$$y_3 = \frac{\dot{y}_2}{1 - x_2 u} = \frac{x_1 - x_1 x_2 u}{1 - x_2 u} = x_1.$$

Так как производной функции y_3 в силу системы (23) будет $\dot{y}_3 = u$, то $\alpha_{10} = 0$, $\alpha_{11} = 1$.

Таким образом, линеаризующая замена состояния в системе (23) задаётся равенствами

$$y_1 = x_2 - x_1^2, \quad y_2 = x_3 + x_1^2, \quad y_3 = x_1, \tag{24}$$

а матрица A, определяющая линеаризующие замены управления и независимой переменной, имеет вид
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Нетрудно проверить, что заменой состояния (24), заменой управления $v = u/(1 - x_2u)$ и заменой независимой переменной $\dot{\tau} = 1 - x_2u$ система (23) преобразуется на множестве
$$M_{xu} = \{(x, u) : x \in \mathbb{R}^3, \quad 1 - x_2u \neq 0\}$$
в линейную управляемую систему (6), ограниченную на множество
$$M_{yv} = \{(y, v) : y \in \mathbb{R}^3, \quad 1 + (y_1 + y_3^2)v \neq 0\}.$$

В заключение отметим, что поскольку $f_1(x_3 + x_1^3) = -x_1x_2$, то векторное поле f_1 не является касательным к поверхности S. Следовательно [6], системы (23) и (6) не являются орбитально эквивалентными по обратной связи и состоянию в паре точек $(0, 0)$. Таким образом, применение замен независимой переменной, зависящих от управления, позволило линеаризовать систему, не линеаризуемую орбитально.

Заключение. Для трёхмерных аффинных систем в работе получено необходимое и достаточное локальное условие A-орбитальной эквивалентности по обратной связи и состоянию линейной управляемой системе, рассматриваемой в окрестности положения равновесия. Найденное условие позволяет распространить результаты в области A-орбитальной линеаризации на случай, когда векторные поля, соответствующие системе, порождают C^∞-модуль переменного ранга. Предложен алгоритм A-орбитальной линеаризации, с помощью которого трёхмерная аффинная система может быть преобразована в линейную управляемую систему, рассматриваемую в окрестности положения равновесия.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-07-00279).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brockett R.W.* Feedback invariants for nonlinear systems // Proc. of IFAC Congress. Helsinki, 1978. P. 1115–1120.
2. *Jakubczyk B., Respondek W.* On linearization of control systems // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. 1980. V. 28. P. 517–522.
3. *Hunt L.R., Su R.* Linear equivalents of nonlinear time-varying systems // Proc. of the MTNS. 1981. P. 119–123.
4. *Krener A.* Approximate linearization by state feedback and coordinate change // Systems and Contr. Lett. 1984. № 5. P. 181–185.
5. *Isidori A.* Nonlinear Control Systems. London, 1995.
6. *Respondek W.* Orbital feedback linearization of single-input nonlinear control systems // Proc. of the IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems. Enschede, 1998. P. 499–504.
7. *Guay M.* An algorithm for orbital feedback linearization of single-input control affine systems // Systems and Contr. Lett. 1999. V. 38. № 4–5. P. 271–281.
8. *Li S.-J., Respondek W.* Orbital feedback linearization for multi-input control systems // Int. J. of Robust and Nonlin. Contr. 2015. V. 25. P. 1352–1378.
9. *Фетисов Д.А.* Линеаризация аффинных систем на основе замен независимой переменной, зависящих от управления // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 11. С.1514–1525.
10. *Fetisov D.A.* A-orbital feedback linearization of multiinput control affine systems // Int. J. of Robust and Nonlin. Contr. 2020. V. 30. № 14. P. 5602–5627.
11. *Фетисов Д.А.* A-орбитальная линеаризация аффинных систем // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 11. С. 1518–1532.
12. *Fetisov D.A.* On some approaches to linearization of affine systems // IFAC-PapersOnline. 2019. V. 52. № 16. P. 700–705.

Московский государственный технический университет
им. Н.Э. Баумана

Поступила в редакцию 30.01.2022 г.
После доработки 30.01.2022 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.