ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 4, с. 534–544

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ

© 2022 г. А. С. Фурсов, Ю. М. Мосолова

Для переключаемых интервальных линейных систем установлены достаточные условия существования стабилизирующих регуляторов. В частности, для переключаемой интервальной системы с режимами различных порядков условие существования стабилизатора в форме статической обратной связи по состоянию сводится к разрешимости системы линейных матричных неравенств, а для переключаемой интервальной системы с медленными переключениями условие существования цифрового стабилизирующего регулятора в форме динамической обратной связи по выходу сформулировано в терминах разрешимости системы нелинейных матричных неравенств.

DOI: 10.31857/S0374064122040094, EDN: CAGTXK

1. Достаточное условие существования статического регулятора. В работе [1] рассматривалась задача стабилизации переключаемой интервальной системы с режимами различных динамических порядков

$$\dot{x}^{(\sigma)} = [A_\sigma]x^{(\sigma)} + [b_\sigma]u, \quad \sigma \in S(\Omega), \quad Z(\Omega) = \{Z_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j} : (i,j) \in \Omega\}, \tag{1}$$

где $\sigma : \mathbb{R}_+ \to I = \{1, \ldots, m\}$ – кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал) с конечным числом разрывов (переключений) на любом конечном промежутке, I – множество индексов, нумерующих режимы функционирования системы (1); $[A_\sigma] = [A] \circ \sigma$ – композиция отображения $[A] : I \to \{[A_1], \ldots, [A_m]\}$ $([A_i] \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i})$ и переключающего сигнала σ, $[b_\sigma] = [b] \circ \sigma$ – аналогичная композиция для отображения $[b] : I \to \{[b_1], \ldots, [b_m]\}$ $([b_i] \in \mathbb{R}^{n_i})$; пары интервальных матриц $([A_i], [b_i])$, $i = \overline{1, m}$, определяют режимы функционирования системы (1); $u \in \mathbb{R}^1$ – управляющий скалярный вход; $\Omega \subseteq I \times I$ – множество, определяющее допустимые переключения между режимами, т.е. пара индексов (i, j) принадлежит множеству Ω, если и только если возможно переключение с j-го на i-й режим функционирования; $S(\Omega)$ – множество допустимых переключающих сигналов σ, т.е. если $\sigma \in S(\Omega)$, то для любой его точки разрыва $\tilde{t}$ такой, что

$$\lim_{t \to \tilde{t}-0} \sigma(t) = j, \quad \lim_{t \to \tilde{t}+0} \sigma(t) = i,$$

выполняется условие $(i, j) \in \Omega$.

Под i-м режимом функционирования системы (1) понимается динамическая система

$$\dot{x}^{(i)} = [A_i]x^{(i)} + [b_i]u.$$

При этом предполагается, что, в общем случае, режимы имеют различные динамические порядки, определяемые векторами состояния

$$x^{(i)} = (x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_i}}) \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad j_1 < \ldots < j_{n_i}, \quad \{j_1, \ldots, j_{n_i}\} \subseteq \{1, \ldots, n\},$$

где $n = \max\{j_{n_1}, \ldots, j_{n_m}\}$. Таким образом, $\mathbb{R}^{n_i} \subseteq \mathbb{R}^n$ для каждого $i = \overline{1, m}$. Обозначим упорядоченный набор индексов $\{j_1, \ldots, j_{n_i}\}$ через Γ_i, а множество $\{1, \ldots, n\}$ через Γ. Далее будем обозначать через $\tilde{x}^{(i)}$ вектор из $\mathbb{R}^n$, все компоненты которого с индексами из множества

$\Gamma\backslash\Gamma_i$ равны нулю. Заметим, что если для различных режимов (i-го и j-го) совпадают наборы переменных состояния, то в этом случае $\Gamma_i=\Gamma_j$.

В силу кусочной непрерывности функции $\sigma(t)$ переходы между режимами осуществляются скачкообразно, а движение переключаемой системы в каждый момент времени определяется активным режимом. Для согласования перехода между различными режимами задаётся множество $Z(\Omega)$, состоящее из матриц преемственности $Z_{ij}\in\mathbb{R}^{n_i\times n_j}$, $(i,j)\in\Omega$ [1]. Каждая такая матрица Z_{ij} определяет линейное преобразование конечного состояния предыдущего j-го режима $x^{(j)}(t_{ij})$ в начальное состояние текущего i-го режима $x^{(i)}(t_{ij})$ (t_{ij} – момент переключения между j-м и i-м режимами), т.е.

$$x^{(i)}(t_{ij})=Z_{ij}x^{(j)}(t_{ij}).$$

Более точно,

$$x^{(j)}(t_{ij})=\lim_{t\to t_{ij}-0}x^{(j)}(t),\quad x^{(i)}(t_{ij})=\lim_{t\to t_{ij}+0}x^{(i)}(t).$$

В работе [1] введено понятие $S(\Omega)$-устойчивости для системы (1) и исследована задача поиска $S(\Omega)$-стабилизирующего регулятора в форме статической обратной связи по состоянию $u=-k^{\mathrm{т}}x$ $(x\in\mathbb{R}^n)$.

В результате в [1] показано, что данная задача стабилизации в соответствии с методом динамического расширения может быть сведена к задаче стабилизации интервальной системы с режимами одинаковых порядков

$$\dot{x}=[\tilde{A}_\sigma]x+[\tilde{b}_\sigma]u,\quad \sigma\in S(\Omega),\quad \tilde{Z}(\Omega)=\{\tilde{Z}_{ij}\in\mathbb{R}^{n\times n}:(i,j)\in\Omega\}. \tag{2}$$

Замыкая систему (2) обратной связью $u=-k^{\mathrm{т}}x$, приходим к задаче поиска такого вектора $k=(k_1,\ldots,k_n)^{\mathrm{т}}$, который обеспечивает $S(\Omega)$-устойчивость системы

$$\dot{x}=([\tilde{A}_\sigma]-[\tilde{b}_\sigma]k^{\mathrm{т}})x,\quad \sigma\in S(\Omega),\quad \tilde{Z}(\Omega)=\{\tilde{Z}_{ij}\in\mathbb{R}^{n\times n}:(i,j)\in\Omega\},\quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{3}$$

или, что то же самое, семейства переключаемых систем вида

$$\dot{x}=(\tilde{A}_\sigma-\tilde{b}_\sigma k^{\mathrm{т}})x,\quad \sigma\in S(\Omega),\quad \tilde{Z}(\Omega)=\{\tilde{Z}_{ij}\in\mathbb{R}^{n\times n}:(i,j)\in\Omega\},$$

где $\tilde{A}_i\in[\tilde{A}_i]$, $\tilde{b}_i\in[\tilde{b}_i]$.

В [1] сформулировано также достаточное условие устойчивости системы (3) при заданном векторе k (теорема 1), которое предполагает переход от системы (3) к её интервальному расширению

$$\dot{x}=[\tilde{\Lambda}_\sigma(k)]x \tag{4}$$

и проверке существования единой функции Ляпунова для семейства линейных стационарных систем, матрицы которых образуют множество вершинных матриц для всех режимов системы (4).

Заметим, что это условие позволяет сформулировать конструктивное достаточное условие существования стабилизирующей обратной связи $u=-k^{\mathrm{т}}x$ для системы (2) в случае, когда $[b_i]=b_i$, $i=\overline{1,m}$. Однако оно не позволяет сформулировать эффективный алгоритм нахождения вектора k стабилизирующей обратной связи в случае интервальных векторов $[b_i]$.

В настоящей работе предлагается конструктивный алгоритм поиска стабилизирующего регулятора вида $u=-k^{\mathrm{т}}x$ для переключаемой интервальной системы (2) с режимами одинаковых порядков n и импульсными эффектами (скачкообразное изменение текущего состояния системы при переключениях). Этот алгоритм основан на некотором достаточном условии существования стабилизирующей обратной связи по состоянию $u=-k^{\mathrm{т}}x$ для системы (2).

Рассмотрим вначале задачу стабилизации интервальной системы

$$\dot{x}=[A]x+[b]u \tag{5}$$

с помощью обратной связи $u=-k^{\mathrm{т}}x$. Здесь $[A]=([\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}])_{i,j=1}^n$, $[b]=([\underline{b}^i,\overline{b}^i])_{i=1}^n$.

Указанную задачу можно переформулировать следующим образом: найти вектор

$$k = (k_1, \ldots, k_n)^{\text{т}}$$

такой, что для любого вектора параметров

$$w = (g, s)^{\text{т}},$$

где $g = (g_1, \ldots, g_{n^2})$, $s = (s_1, \ldots, s_n)$, $g_1 \in [\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}]$, $\ldots$, $g_n \in [\underline{a}_{1n}, \overline{a}_{1n}]$, $g_{n+1} \in [\underline{a}_{21}, \overline{a}_{21}]$, $\ldots$, $g_{2n} \in [\underline{a}_{2n}, \overline{a}_{2n}]$, $\ldots$, $g_{n^2-n} \in [\underline{a}_{n1}, \overline{a}_{n1}]$, $\ldots$, $g_{n^2} \in [\underline{a}_{nn}, \overline{a}_{nn}]$, $g_{n^2} \in [\underline{a}_{nn}, \overline{a}_{nn}]$, $s_1 \in [\underline{b}^1, \overline{b}^1]$, $\ldots$, $s_n \in [\underline{b}^n, \overline{b}^n]$, система

$$\dot{x} = \Psi(w, k)x \tag{6}$$

с матрицей

$$\Psi(w,k) = \begin{pmatrix} g_1 - s_1k_1 & \ldots & g_n - s_1k_n \\ g_{n+1} - s_2k_1 & \ldots & g_{2n} - s_2k_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n^2-n+1} - s_nk_1 & \ldots & g_{n^2} - s_nk_n \end{pmatrix}$$

является асимптотически устойчивой.

Заметим, что множество матриц $\Psi(w, k)$ при каждом фиксированном $k \in \mathbb{R}^n$ и при всех возможных значениях вектора w образует выпуклое множество в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Действительно, поставим в соответствие матрице

$$\Psi(w,k) = (\psi_{ij}(w,k))_{i,j=1}^n$$

вектор

$$\psi(w,k) = (\psi_{11}(w,k), \ldots, \psi_{1n}(w,k), \psi_{21}(w,k), \ldots, \psi_{2n}(w,k), \ldots, \psi_{n1}(w,k), \ldots, \psi_{nn}(w,k))^{\text{т}}.$$

Другими словами, вектор $\psi(w, k)$ фактически является “развёрткой” матрицы $\Psi(w, k)$ по строкам. Несложно заметить, что векторы $\psi(w, k)$ и w связаны линейным соотношением

$$\psi(w,k) = \Theta(k)w, \tag{7}$$

в котором матрица $\Theta(k) \in \mathbb{R}^{(n^2+n)\times(n^2+n)}$ имеет вид

$$\Theta(k) = \begin{pmatrix} I_n & O_n & \ldots & O_n & -k & \overline{o}_n & \ldots & \ldots & \overline{o}_n \\ O_n & I_n & \ldots & \ldots & \overline{o}_n & -k & \overline{o}_n & \ldots & \overline{o}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O_n & \ldots & O_n & I_n & \overline{o}_n & \ldots & \ldots & \overline{o}_n & -k \end{pmatrix}.$$

Здесь I_n – единичная матрица порядка n, O_n – нулевая матрица порядка n, а $\overline{o}_n$ – нулевой вектор-столбец размерности n.

Введём следующие обозначения: $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^{\text{т}}$ – единичный вектор размерности n, i-я компонента которого равна 1, а $E_i = \begin{pmatrix} O_n & \ldots & O_n & I_n & O_n & \ldots & O_n \end{pmatrix}^{\text{т}} \in \mathbb{R}^{n^2+n}$ – единичный блочный вектор-столбец, i-й блок которого – единичная матрица порядка n.

Используя соотношение (7) и введённые обозначения, представим матрицу $\Psi(w, k)$ следующим образом:

$$\Psi(w,k) = \sum_{j=1}^n e_j\psi^{\text{т}}(w,k)E_j = \sum_{j=1}^n e_jw^{\text{т}}\Theta^{\text{т}}(k)E_j. \tag{8}$$

Теперь заметим, что множество D допустимых параметров w образует параллелотоп в пространстве $\mathbb{R}^{n^2+n}$, являющийся выпуклой оболочкой конечного набора его вершин p_i, т.е.

$$D = \operatorname{Conv}\{p_i : i = \overline{1, 2^{n^2+n}}\}.$$

При этом вершины p_i представляются векторами, содержащими в качестве изменяющихся компонент всевозможные сочетания нижних и верхних границ соответствующих промежутков $[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$ и $[\underline{b}^i, \overline{b}^i]$. Тогда любой вектор $w \in D$ записывается в виде линейной комбинации

$$w = \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i p_i, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad \sum \lambda_i = 1. \tag{9}$$

Вследствие представлений (8) и (9) получаем

$$\Psi(w,k) = \sum_{j=1}^{n} e_j \bigg(\sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i p_i\bigg)^{\text{т}} \Theta^{\text{т}}(k) E_j = \sum_{j=1}^{n} \bigg(\sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i e_j p_i^{\text{т}} \Theta^{\text{т}}(k) E_j\bigg) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \bigg(\sum_{j=1}^{n} \lambda_i e_j p_i^{\text{т}} \Theta^{\text{т}}(k) E_j\bigg) = \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i \bigg(\sum_{j=1}^{n} e_j p_i^{\text{т}} \Theta^{\text{т}}(k) E_j\bigg).$$

Обозначим $\Psi_i(k) = \sum_{j=1}^{n} e_j p_i^{\text{т}} \Theta^{\text{т}}(k) E_j$. Таким образом, получаем, что при любом $w \in D$ справедливо включение

$$\Psi(w,k) \in \operatorname{Conv}\{\Psi_i(k) : i = \overline{1, 2^{n^2+n}}\}. \tag{10}$$

Заметим, что каждую матрицу $\Psi_i(k)$ можно представить в виде $\Psi_i(k) = F_i - g_i k$, где $F_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $g_i \in \mathbb{R}^n$.

Сформулируем достаточное условие существования стабилизирующей обратной связи для системы (5).

Теорема 1. *Пусть система линейных матричных неравенств*

$$\begin{cases} PF_i^{\text{т}} + F_i P + z g_i^{\text{т}} + g_i z^{\text{т}} < 0, \\ P > 0, \quad i = \overline{1, 2^{n^2+n}}, \end{cases} \tag{11}$$

имеет решение (z_0, P_0), $z_0 \in \mathbb{R}^n$, $P_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $P_0^{\text{т}} = P_0$. *Тогда обратная связь* $u = -k^{\text{т}} x$, *где* $k^{\text{т}} = -z_0^{\text{т}} P_0^{-1}$, *стабилизирует систему (5).*

Доказательство. Действительно, пусть система линейных матричных неравенств (11) имеет решение (z_0, P_0) и пусть $k^{\text{т}} = -z_0^{\text{т}} P_0^{-1}$. Тогда

$$P_0 F_i^{\text{т}} + F_i P_0 + z_0 g_i^{\text{т}} + g_i z_0^{\text{т}} < 0. \tag{12}$$

Умножим неравенство (12) с двух сторон на положительно определённую матрицу P_0^{-1}. В результате получим

$$F_i^{\text{т}} P_0^{-1} + P_0^{-1} F_i + P_0^{-1} z_0 g_i^{\text{т}} P_0^{-1} + P_0^{-1} g_i z_0^{\text{т}} P_0^{-1} < 0,$$

откуда следует, что

$$F_i^{\text{т}} P_0^{-1} + P_0^{-1} F_i - k g_i^{\text{т}} P_0^{-1} - P_0^{-1} g_i k^{\text{т}} < 0.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$(F_i - g_i k^{\text{т}})^{\text{т}} P_0^{-1} + P_0^{-1}(F_i - g_i k^{\text{т}}) < 0, \tag{13}$$

которое означает, что системы

$$\dot{x} = (F_i - g_i k^{\text{т}}) x, \quad i = \overline{1, 2^{n^2+n}},$$

асимптотически устойчивы.

Рассмотрим теперь для произвольного $w \in D$ матрицу $\Psi(w,k)$. В силу включения (10) имеем

$$\Psi(w,k) = \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i \Psi_i(k), \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad \sum_i \lambda_i = 1.$$

Тогда

$$\Psi^{\mathrm{т}}(w,k)P_0^{-1} + P_0^{-1}\Psi(w,k) = \bigg(\sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i \Psi_i(k)\bigg)^{\mathrm{т}} P_0^{-1} + P_0^{-1}\bigg(\sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i \Psi_i(k)\bigg) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i (\Psi_i^{\mathrm{т}}(k)P_0^{-1} + P_0^{-1}\Psi_i(k)).$$

Поэтому, учитывая неотрицательность λ_i и неравенство (13), получаем, что

$$\Psi^{\mathrm{т}}(w,k)P_0^{-1} + P_0^{-1}\Psi(w,k) < 0$$

для положительно определённой матрицы P_0^{-1}. Это неравенство означает, что система (6) асимптотически устойчива. Таким образом, обратная связь $u = -k^{\mathrm{т}}x$ стабилизирует систему (5). Теорема доказана.

Вернёмся теперь к задаче $S(\Omega)$-стабилизации системы (2).

Основываясь на результатах работы [1] и на рассуждениях, использованных при приведённом выше доказательстве теоремы 1, можем сформулировать достаточное условие $S(\Omega)$-устойчивости системы (3), которое содержит

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) при некотором $k \in \mathbb{R}^n$ существует единая функция Ляпунова $V(x) = x^{\mathrm{т}}Hx$ $(H > 0)$ для семейства систем

$$\dot{x} = \Psi_l^{(i)}(k)x, \quad i = \overline{1,m}, \quad l = \overline{1, 2^{n^2+n}},$$

где $\Psi_l^{(i)}(k) = \sum_{j=1}^n e_j (p_l^{(i)})^{\mathrm{т}} \Theta^{\mathrm{т}}(k) E_j$, $\operatorname{Conv}\{p_l^{(i)} : l = \overline{1, 2^{n^2+n}}\} = D_i$ – множество допустимых векторов параметров w для i-го режима системы (2);

2) для матриц преемственности из множества $\tilde{Z}(\Omega)$ системы (2) выполнены условия

$$\begin{pmatrix} H^{-1} & \tilde{Z}_{ij}H^{-1} \\ \tilde{Z}_{ij}^{m}H^{-1} & H^{-1} \end{pmatrix} \geqslant 0$$

при всех $(i,j) \in \Omega$. Тогда система (3) является $S(\Omega)$-устойчивой.

Из теорем 1 и 2, а также из результатов работы [1] вытекает следующее достаточное условие существования $S(\Omega)$-стабилизирующей обратной связи для системы (2).

Теорема 3. *Пусть для системы (2) разрешима система линейных матричных неравенств*

$$\begin{cases} P(F_l^{(i)})^{\mathrm{т}} + F_l^{(i)}P + z(g_l^{(i)})^{\mathrm{т}} + g_l^{(i)}z^{\mathrm{т}} < 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad l = \overline{1, 2^{n^2+n}}, \\ P > 0, \\ \begin{pmatrix} P & \tilde{Z}_{ij}P \\ P\tilde{Z}_{ij}^{\mathrm{т}} & P \end{pmatrix} \geqslant 0, \quad (i,j) \in \Omega, \end{cases} \tag{14}$$

где матрицы $F_l^{(i)}$ и вектор-столбцы $g_l^{(i)}$ таковы, что $\Psi_l^{(i)}(k) = F_l^{(i)} - g_l^{(i)}k^{\mathrm{т}}$.

Тогда если пара (z_0, P_0) – решение системы (14), то обратная связь $u = -k^{\mathrm{т}}x$, где $k^{\mathrm{т}} = -z_0^{\mathrm{т}}P_0^{-1}$, является $S(\Omega)$-стабилизирующей для системы (2).

2. Достаточное условие существования динамического регулятора. В работе [2] рассматривалась задача цифровой стабилизации переключаемой интервальной системы вида

$$\begin{cases} \dot{x} = [A_\sigma]x + [b_\sigma]u, \\ y = [c_\sigma]x, \quad \sigma \in S_\tau, \end{cases} \tag{15}$$

где $\sigma : \mathbb{R}_+ \to I = \{1, \ldots, m\}$ – кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал) с конечным числом разрывов (переключений) на любом конечном промежутке; S_τ – множество переключающих сигналов σ, для которых время между любыми двумя соседними переключениями не меньше τ; $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $y \in \mathbb{R}$ – измеряемый скалярный выход, $u \in \mathbb{R}$ – управляющий вход; $[A_\sigma] : I \to \{[A_1], \ldots, [A_m]\}$; $[b_\sigma] : I \to \{[b_1], \ldots, [b_m]\}$, $[c_\sigma] : I \to \{[c_1], \ldots, [c_m]\}$. Здесь $[A_i]$, $[b_i]$, $[c_i]$ $(i = \overline{1, m})$ – интервальные матрицы соответствующих размеров.

При этом поиск цифрового стабилизатора осуществлялся в классе дискретных динамических обратных связей вида

$$\begin{cases} v[(l+1)T] = Qv[lT] + qy[lT], \\ u[lT] = Hv[lT] + hy[lT], \quad v \in \mathbb{R}^r, \end{cases} \tag{16}$$

где T – заданный период квантования по времени. При этом предполагалось, что переключающие сигналы σ системы (15) принадлежат множеству S_T (переключения сигнала σ могут происходить только в моменты времени lT, $l = 0, 1, \ldots$).

В работе [2] предложен алгоритм сведения указанной задачи стабилизации системы (15) к задаче стабилизации специальным образом построенной дискретной переключаемой интервальной системы (точной дискретизации системы (15))

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = [\Lambda_\sigma^*]x[lT] + [\mu_\sigma^*]u[lT], \\ y[lT] = [c_\sigma]x[lT], \quad \sigma \in [S]_{T,T}, \end{cases} \tag{17}$$

дискретным регулятором (16).

В частности, одним из основных результатов работы [2] является конструктивное достаточное условие $[S]_{T,T}$-устойчивости системы (17), замкнутой регулятором (16), т.е. системы

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = ([\Lambda_\sigma^*] + [\mu_\sigma^*]h[c_\sigma])x[lT] + [\mu_\sigma^*]Hv[lT], \\ v[(l+1)T] = g[c_\sigma]x[lT] + Qv[lT], \quad \sigma \in [S]_{T,T}. \end{cases} \tag{18}$$

При этом в [2] остался открытым вопрос об условиях существования стабилизирующего регулятора вида (16), обеспечивающего $[S]_{T,T}$-устойчивость системы (18).

В настоящей работе на основании изложенного выше подхода и результатов работы [2] сформулировано достаточное условие существования стабилизирующего регулятора для системы (17) (а следовательно, и для системы (15)) в случае, когда вектор c_σ "точечный", т.е. $[c_i] = c_i$ для всех $i = \overline{1, m}$. Данное условие, как и приведённая выше теорема 3, сформулировано на языке матричных неравенств.

Рассмотрим сначала задачу стабилизации по выходу дискретной интервальной системы

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = [A]x[lT] + [b]u[lT], \\ y[lT] = cx[lT], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u, y \in \mathbb{R}^1, \end{cases} \tag{19}$$

с помощью динамического регулятора

$$\begin{cases} v[(l+1)T] = Qv[lT] + qy[lT], \\ u[lT] = Hv[lT] + hy[lT], \quad v \in \mathbb{R}^r, \end{cases} \tag{20}$$

т.е. задачу поиска матрицы

$$\Theta = \begin{pmatrix} Q & q \\ H & h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(r+1)\times(r+1)}, \tag{21}$$

обеспечивающей устойчивость параметрически неопределённой системы

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = ([A] + [b]hc)x[lT] + [b]Hv[lT], \\ v[(l+1)T] = qcx[lT] + Qv[lT]. \end{cases} \tag{22}$$

Указанную задачу можно переформулировать следующим образом: найти матрицу $Q = \{q_{ij}\}_{i,j=1}^{r}$, векторы $q = (q_1, \ldots, q_r)^{\mathrm{T}}$, $H = (h_1, \ldots, h_r)^{\mathrm{T}}$ и константу h такие, что для любого вектора параметров $w = (g, s)^{\mathrm{T}}$, где $g = (g_1, \ldots, g_{n^2})$, $s = (s_1, \ldots, s_n)$, $g_1 \in [\underline{a}_{11}, \overline{a}_{11}]$, $\ldots$, $g_n \in [\underline{a}_{1n}, \overline{a}_{1n}]$, $g_{n+1} \in [\underline{a}_{21}, \overline{a}_{21}]$, $\ldots$, $g_{2n} \in [\underline{a}_{2n}, \overline{a}_{2n}]$, $\ldots$, $g_{n^2-n} \in [\underline{a}_{n1}, \overline{a}_{n1}]$, $\ldots$, $g_{n^2} \in [\underline{a}_{nn}, \overline{a}_{nn}]$, $g_{n^2} \in [\underline{a}_{nn}, \overline{a}_{nn}]$, $s_1 \in [\underline{b}^1, \overline{b}^1]$, $\ldots$, $s_n \in [\underline{b}^n, \overline{b}^n]$, матрица

$$\Psi(w, \Theta) = \begin{pmatrix} g_1 + s_1 h c_1 & \ldots & g_n + s_1 h c_n & s_1 h_1 & \ldots & s_1 h_r \\ g_{n+1} + s_2 h c_1 & \ldots & g_{2n} + s_2 h c_n & s_2 h_1 & \ldots & s_2 h_r \\ \hdotsfor{6} \\ g_{n^2-n} + s_n h c_1 & \ldots & g_{n^2} + s_n h c_n & s_n h_1 & \ldots & s_n h_r \\ q_1 c_1 & \ldots & q_1 c_n & q_{11} & \ldots & q_{1r} \\ \hdotsfor{6} \\ q_r c_1 & \ldots & q_r c_n & q_{r1} & \ldots & q_{rr} \end{pmatrix}$$

является шуровской матрицей, или, что то же самое, дискретная система

$$\begin{pmatrix} x[(l+1)T] \\ v[(l+1)T] \end{pmatrix} = \Psi(w, \Theta) \begin{pmatrix} x[lT] \\ v[lT] \end{pmatrix}$$

асимптотически устойчива.

Заметим, что множество матриц $\Psi(w, \Theta)$ при каждой фиксированной матрице (21) образует выпуклое множество в пространстве матриц $\mathbb{R}^{(n+r)\times(n+r)}$.

Действительно, как и выше (в п. 1), поставим в соответствие матрице

$$\Psi(w, \Theta) = (\psi_{ij}(w, \Theta))_{i,j=1}^{n+r}$$

вектор

$$\psi(w, \Theta) = (\psi_{11}(w, \Theta), \ldots, \psi_{1,n+r}(w, \Theta), \psi_{21}(w, \Theta), \ldots, \psi_{2,n+r}(w, \Theta), \ldots$$
$$\ldots, \psi_{n+r,1}(w, \Theta), \ldots, \psi_{n+r,n+r}(w, \Theta))^{\mathrm{T}},$$

который является “развёрткой” матрицы $\Psi(w, \Theta)$ по строкам. Далее заметим, что вектор $\psi(w, \Theta)$ можно представить следующим образом:

$$\psi(w, \Theta) = \Gamma(\Theta) w^*, \tag{23}$$

где

$$w^* = (g_1, \ldots, g_{n^2}, s_1, \ldots, s_n, \overbrace{1, \ldots, 1}^{rn}, \overbrace{1, \ldots, 1}^{r^2})^{\mathrm{T}},$$

т.е. w^* – это вектор параметров w, дополненный $rn + r^2$ единицами, а матрица $\Gamma(\Theta) \in \mathbb{R}^{(n+r^2)\times(n^2+n+nr+r^2)}$ имеет следующий вид:

$$\Gamma(\Theta) = (\Delta_1(\Theta)\ \Delta_2(\Theta)),$$

где

$$\Delta_1(\Theta) = \begin{pmatrix} I_n & O_n & \ldots & O_n & hc & \overline{o}_n & \overline{o}_n & \ldots & \overline{o}_n & \overline{o}_n \\ O_{r\times n} & O_{r\times n} & \ldots & O_{r\times n} & H & \overline{o}_r & \overline{o}_r & \ldots & \overline{o}_r & \overline{o}_r \\ O_n & I_n & \ldots & O_n & \overline{o}_n & hc & \overline{o}_n & \ldots & \overline{o}_n & \overline{o}_n \\ O_{r\times n} & O_{r\times n} & \ldots & O_{r\times n} & \overline{o}_r & H & \overline{o}_r & \ldots & \overline{o}_r & \overline{o}_r \\ \hdotsfor{10} \\ O_n & O_n & \ldots & I_n & \overline{o}_n & \overline{o}_n & \overline{o}_n & \ldots & \overline{o}_n & hc \\ O_{r\times n} & O_{r\times n} & \ldots & O_{r\times n} & \overline{o}_r & \overline{o}_r & \overline{o}_r & \ldots & \overline{o}_r & H \\ O_n & O_n & \ldots & O_n & \overline{o}_n & \overline{o}_n & \overline{o}_n & \ldots & \overline{o}_n & \overline{o}_n \\ \hdotsfor{10} \\ O_n & O_n & \ldots & O_n & \overline{o}_n & \overline{o}_n & \overline{o}_n & \ldots & \overline{o}_n & \overline{o}_n \\ O_{r\times n} & O_{r\times n} & \ldots & O_{r\times n} & \overline{o}_r & \overline{o}_r & \overline{o}_r & \ldots & \overline{o}_r & \overline{o}_r \\ \hdotsfor{10} \\ O_{r\times n} & O_{r\times n} & \ldots & O_{r\times n} & \overline{o}_r & \overline{o}_r & \overline{o}_r & \ldots & \overline{o}_r & \overline{o}_r \end{pmatrix},$$

$$\Delta_2(\Theta) = \begin{pmatrix} \overline{o}_n & \dots & \overline{o}_n & \overline{o}_n & \dots & \overline{o}_n & \dots & \overline{o}_n & \dots & \overline{o}_n & \overline{o}_n & \dots & \overline{o}_n \\ \overline{o}_r & \dots & \overline{o}_r & \overline{o}_r & \dots & \overline{o}_r & \dots & \overline{o}_r & \dots & \overline{o}_r & \overline{o}_r & \dots & \overline{o}_r \\ \overline{o}_n & \dots & \overline{o}_n & \overline{o}_n & \dots & \overline{o}_n & \dots & \overline{o}_n & \dots & \overline{o}_n & \overline{o}_n & \dots & \overline{o}_n \\ \overline{o}_r & \dots & \overline{o}_r & \overline{o}_r & \dots & \overline{o}_r & \dots & \overline{o}_r & \dots & \overline{o}_r & \overline{o}_r & \dots & \overline{o}_r \\ \hdotsfor{13} \\ \overline{o}_n & \dots & \overline{o}_n & \overline{o}_n & \dots & \overline{o}_n & \dots & \overline{o}_n & \dots & \overline{o}_n & \overline{o}_n & \dots & \overline{o}_n \\ \overline{o}_r & \dots & \overline{o}_r & \overline{o}_r & \dots & \overline{o}_r & \dots & \overline{o}_r & \dots & \overline{o}_r & \overline{o}_r & \dots & \overline{o}_r \\ q_1c_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{13} \\ 0 & \dots & q_1c_n & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & q_{11} & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{13} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & q_1r & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{13} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & q_rc_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{13} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & q_rc_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & 0 & \dots & 0 & q_{r1} & \dots & 0 \\ \hdotsfor{13} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & q_{rr} \end{pmatrix},$$

здесь $O_{r\times n}$ – нулевая $r\times n$-матрица; очевидно, что

$$\Delta_1(\Theta)\in\mathbb{R}^{(n+r^2)\times(n^2+n)},\quad \Delta_2(\Theta)\in\mathbb{R}^{(n+r^2)\times(nr+r^2)}.$$

Введём следующие обозначения: $l_i^*=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)^{\text{т}}$ – единичный вектор размерности $n+r$, i-я компонента которого равна 1, а

$$L_i^*=\begin{pmatrix}O_{n+r} & \dots & O_{n+r} & I_{n+r} & O_{n+r} & \dots & O_{n+r}\end{pmatrix}^{\text{т}}$$

– единичный блочный вектор-столбец, i-й блок которого – единичная матрица порядка $n+r$.

Используя представление (23) и введённые обозначения, запишем матрицу $\Psi(w,\Theta)$ следующим образом:

$$\Psi(w,\Theta)=\sum_{j=1}^{n+r} l_j^*(w^*)^{\text{т}}\Gamma^{\text{т}}(\Theta)L_j^*. \tag{24}$$

Заметим, что множество D^* допустимых наборов параметров w^* образует вырожденный параллелотоп размерности n^2+n в пространстве $\mathbb{R}^{n^2+n+nr+r^2}$. При этом

$$D^*=\operatorname{Conv}\{p_i^*: i=\overline{1,2^{n^2+n}}\},$$

где вершины p_i^* представляются векторами, содержащими в качестве изменяющихся компонент всевозможные сочетания нижних и верхних границ соответствующих промежутков $[\underline{a}_{ij},\overline{a}_{ij}]$ и $[\underline{b}^i,\overline{b}^i]$. Тогда любой вектор $w^*\in D^*$ записывается в виде линейной комбинации

$$w^*=\sum_{i=1}^{2^{n^2+n}}\lambda_i p_i^*,\quad \lambda_i\geqslant 0,\quad \sum\lambda_i=1. \tag{25}$$

Из представлений (24) и (25) следует, что

$$\Psi(w,\Theta)=\sum_{j=1}^{n+r} l_j^*\biggl(\sum_{i=1}^{2^{n^2+n}}\lambda_i p_i^*\biggr)^{\text{т}}\Gamma^{\text{т}}(\Theta)L_j^*=\sum_{j=1}^{n+r}\biggl(\sum_{i=1}^{2^{n^2+n}}\lambda_i l_j^*(p_i^*)^{\text{т}}\Gamma^{\text{т}}(\Theta)L_j^*\biggr)=$$

$$= \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \left(\sum_{j=1}^{n+r} \lambda_i l_j^* (p_i^*)^{\mathrm{T}} \Gamma^{\mathrm{T}}(\Theta) L_j^* \right) = \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n+r} l_j^* (p_i^*)^{\mathrm{T}} \Gamma^{\mathrm{T}}(\Theta) L_j^* \right).$$

Обозначим

$$\Psi_i(\Theta) = \sum_{j=1}^{n+r} l_j^* (p_i^*)^{\mathrm{T}} \Gamma^{\mathrm{T}}(\Theta) L_j^*.$$

Таким образом, получаем, что для любого $w^* \in D^*$ имеет место равенство

$$\Psi(w, \Theta) = \operatorname{Conv} \{\Psi_i(\Theta) : i = \overline{1, 2^{n^2+n}}\}. \tag{26}$$

Заметим, что каждую матрицу $\Psi_i(\Theta)$ можно представить [3] в виде

$$\Psi_i(\Theta) = A_0^{(i)} + B_0^{(i)} \Theta C_0,$$

где

$$A_0^{(i)} = \begin{pmatrix} A^{(i)} & O_{n\times r} \\ O_{r\times n} & O_{r\times r} \end{pmatrix}, \quad B_0^{(i)} = \begin{pmatrix} O_{n\times r} & b^{(i)} \\ I_{r\times r} & \overline{o}_r \end{pmatrix}, \quad C_0 = \begin{pmatrix} O_{r\times n} & I_{r\times r} \\ c^{\mathrm{T}} & (\overline{o}_r)^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты матриц $A^{(i)}$ и векторов $b^{(i)}$ зависят от компонент соответствующих вершин p_i^*.

Сформулируем достаточное условие существования стабилизирующей обратной связи (20) для системы (19).

Теорема 4. *Пусть система матричных неравенств*

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} G^{-1} & A_0^{(i)} + B_0^{(i)} \Theta C_0 \\ (A_0^{(i)})^m + (C_0)^m (\Theta)^m (B_0^{(i)})^m & G \end{pmatrix} > 0, \\ G > 0, \quad i = \overline{1, 2^{n^2+n}}, \end{cases} \tag{27}$$

имеет решение (G_0, Θ_0). *Тогда регулятор*

$$\begin{cases} z[(l+1)T] = Q_0 z[lT] + q_0 y[lT], \\ u[lT] = H_0 z[lT] + h_0 y[lT], \end{cases} \tag{28}$$

где $\begin{pmatrix} Q_0 & q_0 \\ H_0 & h_0 \end{pmatrix} = \Theta_0$, *стабилизирует систему (19).*

Доказательство. Действительно, пусть система (27) имеет решение (G_0, Θ_0). Тогда в силу леммы Шура [3, с. 19], выполняется неравенство

$$G_0 - \Psi_i^{\mathrm{T}}(\Theta_0) G_0 \Psi_i(\Theta_0) > 0,$$

из которого следует, что матрица $\Psi_i(\Theta_0)$ является шуровской. Отсюда вытекает, что дискретная система

$$\begin{pmatrix} x[(l+1)T] \\ v[(l+1)T] \end{pmatrix} = \Psi_i(\Theta_0) \begin{pmatrix} x[lT] \\ v[lT] \end{pmatrix}$$

асимптотически устойчива.

Рассмотрим теперь для произвольного $w^* \in D^*$ матрицу $\Psi(w, \Theta_0)$. В силу (26) имеем

$$\Psi_i(w, \Theta_0) = \sum_{i=1}^{2^{n^2+n}} \lambda_i \Psi_i(\Theta_0), \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad \sum \lambda_i = 1.$$

Но тогда, используя результаты работы [2], получаем неравенство

$$G_0 - \Psi^{\text{т}}(w, \Theta_0) G_0 \Psi(w, \Theta_0) > 0,$$

и, следовательно, система

$$\begin{pmatrix} x[(l+1)T] \\ v[(l+1)T] \end{pmatrix} = \Psi(w, \Theta_0) \begin{pmatrix} x[lT] \\ v[lT] \end{pmatrix}$$

асимптотически устойчива. Теорема доказана.

Рассмотрим переключаемую интервальную систему (15) с “точечным” вектором c_σ, т.е. систему

$$\begin{cases} \dot{x} = [A_\sigma]x + [b_\sigma]u, \\ y = c_\sigma x, \quad \sigma \in S_{T,T}. \end{cases} \tag{29}$$

Пусть переключаемая интервальная система

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = [\Lambda_\sigma^*]x[lT] + [\mu_\sigma^*]u[lT], \\ y[lT] = c_\sigma x[lT], \quad \sigma \in [S]_{T,T}, \end{cases} \tag{30}$$

является точной дискретизацией [2] системы (29) и пусть

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = [\Lambda_i]x[lT] + [\mu_i]u[lT], \\ y[lT] = c_i x[lT], \quad i = \overline{1, m}, \end{cases} \tag{31}$$

– различные режимы системы (30).

Замкнув i-й режим (31) $(i = \overline{1, 2^{n^2+n}})$ регулятором (16), получаем

$$\begin{cases} x[(l+1)T] = ([\Lambda_i] + [\mu_i]hc_i)x[lT] + [\mu_i]Hv[lT], \\ v[(l+1)T] = gc_i x[lT] + Qv[lT]. \end{cases} \tag{32}$$

По аналогии с системой (22) построим для каждой i-й системы (32) матрицу $\Psi_i(w^{(i)}, \Theta)$, где Θ – матрица параметров регулятора (16), а $w^{(i)}$ – вектор параметров, определяемый интервальными коэффициентами матрицы $[\Lambda_i]$ и вектора $[\mu_i]$. Далее, используя приведённые выше рассуждения, построим для каждого $i = \overline{1, m}$ множество матриц $\Psi_l^{(i)}(\Theta)$ $(l = \overline{1, n^2+n})$, выпуклая оболочка которых содержит матрицы $\Psi_i(w^{(i)}, \Theta)$ для любого допустимого набора параметров $w^{(i)}$. Теперь заметим, что матрицы $\Psi_l^{(i)}(\Theta)$ могут быть представлены в виде

$$\Psi_l^{(i)}(\Theta) = A_{0,i}^{(l)} + B_{0,i}^{(l)} \Theta C_{0,i},$$

где

$$A_{0,i}^{(l)} = \begin{pmatrix} A_i^{(l)} & O_{n\times r} \\ O_{r\times n} & O_{r\times r} \end{pmatrix}, \quad B_{0,i}^{(l)} = \begin{pmatrix} O_{n\times r} & b_i^{(l)} \\ I_{r\times r} & \overline{o}_r \end{pmatrix}, \quad C_{0,i} = \begin{pmatrix} O_{r\times n} & I_{r\times r} \\ c_i^{\text{т}} & (\overline{o}_r)^{\text{т}} \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 4 и результатов работы [2] вытекает, что для переключаемой интервальной системы (29) имеет место следующее достаточное условие существования стабилизирующей обратной связи (16).

Теорема 5. *Пусть для системы (30) система матричных неравенств*

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} G^{-1} & A_{0,i}^{(l)} + B_{0,i}^{(l)} \Theta C_{0,i} \\ (A_{0,i}^{(l)})^m + C_{0,i}^m (\Theta)^m (B_{0,i}^{(l)})^m & G \end{pmatrix} > 0, \\ G > 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad l = \overline{1, 2^{n^2+n}}, \end{cases} \tag{33}$$

имеет решение (G_0, Θ_0). *Тогда регулятор (28) стабилизирует систему (29).*

В заключение отметим, что решение системы нелинейных матричных неравенств (33) является значительно более сложной задачей, чем решение системы (14). В качестве возможного подхода к численному решению системы (33) можно использовать методику, приведённую в работе [3, с. 230].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00162).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фурсов А.С., Мосолова Ю.М., Миняев С.И.* Построение систем стабилизации для переключаемых интервальных объектов с режимами различных порядков // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1555–1563.
2. *Фурсов А.С., Миняев С.И., Мосолова Ю.М.* Синтез цифрового стабилизатора по выходу для переключаемой интервальной линейной системы // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 11. С. 1545–1559.
3. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М., 2007.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича, г. Москва

Поступила в редакцию 18.02.2022 г.
После доработки 02.03.2022 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.