## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

*УДК 519.642.7*

# ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО СЛАБО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ В РАЗНЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ

**© 2022 г. Г. А. Расолько, В. М. Волков**

Рассматривается сингулярное интегральное уравнение с логарифмической особенностью, использующееся в математической модели рассеяния Е-поляризованных электромагнитных волн. Для численного анализа его решений из разных функциональных классов Мусхелишвили построены четыре вычислительные схемы, основанные на представлении части искомой функции в виде линейной комбинации ортогональных многочленов Чебышёва и спектральных соотношениях, что позволяет получить простые аналитические выражения для сингулярной составляющей уравнения. Коэффициенты разложения решения по базису полиномов Чебышёва вычисляются как решение соответствующей системы линейных алгебраических уравнений. Результаты численных экспериментов показывают, что на сетке из 20–30 узлов погрешность приближённого решения не превышает вычислительной погрешности.

DOI: 10.31857/S0374064122040100, EDN: CAKLSU

**Введение.** Аппарат интегральных уравнений широко используется при решении прикладных задач аэродинамики, дифракции и многих других областей естествознания. Точность приближённого численного решения интегральных уравнений в существенном определяется способом их дискретизации, т.е. выбором квадратурных формул, базисных функций и узлов аппроксимации, с помощью которых исходная задача сводится при численном интегрировании к системе линейных алгебраических уравнений приемлемой размерности и обусловленности. Для сингулярных интегральных уравнений, вследствие наличия особенностей в подынтегральных функциях, требуется максимально учитывать специфику задачи.

Данная работа является продолжением исследований [1–5], посвящённых разработке вычислительных схем приближённого решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с использованием ортогональных многочленов Чебышёва.

**1. Постановка задачи.** Математическое описание рассеяния Е-поляризованных электромагнитных волн криволинейным экраном сводится к решению сингулярного интегрального уравнения со слабой особенностью вида (см. [6, с. 85])

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(t)\ln|t-x|\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(t)K(x,t)\,dt=f(x),\quad -1<x<1. \tag{1}$$

Здесь $K(x,t)$ – известная функции из класса Гёльдера $H_\mu$, $0<\mu\leqslant 1$, по обоим аргументам, $f(x)\in H_\mu$, $\varphi(x)$ – неизвестная функция.

Обзор результатов исследований по вопросам разрешимости уравнений вида (1) в различных функциональных классах приведён в [6]. В частности, если $f(x)$ – непрерывная функция с ограниченной производной, то уравнение (1) имеет единственное решение, которое принадлежит функциональному классу $h(0)$ Мусхелишвили и представляется в виде $\varphi(x) = v(x)/\sqrt{1-x^2}$, где $v(x)\in H_\mu$. Там же [6, с. 85, 58] рассматривается квадратурный метод приближённого решения уравнения (1) в классе $h(0)$, который использует известные спектральные соотношения для слабо сингулярного интеграла

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}\ln|t-x|\,dt=\alpha_k T_k(x),\quad k\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}, \tag{2}$$

где $\alpha_0 = -\ln 2$, $\alpha_k = -1/k$, $k \in \mathbb{N}$, а $T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ – многочлены Чебышёва первого рода, $x \in [-1, 1]$.

В данной работе предлагаются алгоритмы численного решения уравнения (1) в разных функциональных классах Мусхелишвили методом ортогональных многочленов. Этот метод основан на использовании для входящих в уравнение интегралов спектральных (квазиспектральных) соотношений, позволяющих получить аналитические выражения для сингулярных интегралов, не прибегая к квадратурным формулам.

**2. Предварительные сведения.** В монографии [7, с. 31] определены классы функций $h(-1)$, $h(0)$, $h(1)$ и $h(-1,1)$. Согласно [7] функция принадлежит классу $h(-1)$, если она определена на полуинтервале $[-1, 1)$, на каждом отрезке $[-1, 1-\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$ – любое достаточно малое число, удовлетворяет условию Гёльдера и в окрестности точки $x = 1$ имеет интегрируемую особенность. Функция $\psi(x)$ принадлежит классу $h(1)$, если функция $\psi(-x)$ принадлежит классу $h(-1)$. Функция принадлежит классу $h(0)$, если она определена на интервале $(-1, 1)$, на каждом отрезке $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$ – любое достаточно малое число, удовлетворяет условию Гёльдера и в окрестности точек $x = \pm 1$ имеет интегрируемую особенность. Класс $h(-1,1)$ состоит из функций, удовлетворяющих условию Гёльдера на любом отрезке интервала $(-1, 1)$ и ограниченных в окрестности точек $\pm 1$.

Для произвольной непрерывной функции $f(x)$, $x \in [-1, 1]$, используем приближённое представление в виде интерполяционного многочлена по узлам Чебышёва первого рода [8, с. 104]

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} F_j^n T_j(x), \tag{3}$$

где

$$F_0^n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(x_k), \quad F_j^n = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(x_k) T_j(x_k), \quad j = \overline{1, n},$$

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), \quad k = \overline{0, n}.$$

Для разложения функции $f(x)$ по многочленам Чебышёва второго рода $U_k(x)$ воспользуемся в представлении (3) известными тождествами [7, с. 23]:

$$T_0(x) = U_0(x), \quad 2T_1(x) = U_1(x), \quad 2T_j(x) = U_j(x) - U_{j-2}(x), \quad j \geqslant 2.$$

В результате будем иметь

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j^n U_j(x), \tag{4}$$

здесь

$$f_j^n = G_j^n - G_{j+2}^n, \quad j = \overline{0, n-2}, \quad f_{n-1}^n = G_{n-1}^n, \quad f_n^n = G_n^n,$$

$$G_j^n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(x_k) T_j(x_k), \quad j = \overline{0, n}, \quad x_k = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi, \quad k = \overline{0, n}.$$

Используя разложения (3) и (4), несложно построить следующие интерполяционные многочлены $K_{n,n}(x,t)$ функции двух переменных $K(x,t)$:

$$K_{n,n}(x,t) = \sum_{m=0}^{n} T_m(x) \sum_{j=0}^{n} T_j(t) k_{m,j}^*, \tag{5}$$

где

$$k_{m,j}^* = \frac{\delta_m \delta_j}{(n+1)^2} \sum_{l=0}^{n} T_m(x_l) \sum_{r=0}^{n} K(x_l, x_r) T_j(x_r), \quad \delta_q = \begin{cases} 1, & q = 0, \\ 2, & q \neq 0, \end{cases} x_k = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi, \quad k = \overline{0, n};$$

$$K_{n,n}(x,t) = \sum_{m=0}^{n} U_m(x) \sum_{j=0}^{n} k_{m,j} U_j(t), \tag{6}$$

где

$$k_{m,j} = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{l=0}^{n} (T_m(x_l) - \sigma_m T_{m+2}(x_l)) \sum_{r=0}^{n} K(x_l, x_r)(T_j(x_r) - \theta_j T_{j+2}(x_r)),$$

$$\theta_j = \begin{cases} 1, & j = \overline{0, n-2}, \\ 0, & j = n-1, n, \end{cases} \quad \sigma_m = \begin{cases} 1, & m = \overline{0, n-2}, \\ 0, & m = n-1, n, \end{cases} \quad x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right), \quad k = \overline{0, n}.$$

**3. Приближённое решение уравнения (1) в классе $\boldsymbol{h(0)}$.** Приближённое решение $\varphi_n(x)$ уравнения (1) будем искать как решение следующего уравнения относительно новой неизвестной функции $v_n(x)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} v_n(t) \ln|t-x|\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} v_n(t) K_{n,n}(x,t)\, dt = f_n(x), \quad |x| < 1, \tag{7}$$

где $K_{n,n}(x,t)-$ интерполяционный многочлен функции $K(x,t)$ степени $n$ по обеим переменным вида (5), $f_n(x)-$ интерполяционный многочлен (3) степени $n$ функции $f(x)$. Тогда

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} v_n(x). \tag{8}$$

Отметим, что уравнение (7), как и уравнение (1), разрешимо в рассматриваемом классе $h(0)$ [6].

Решение уравнения (7) будем искать в виде

$$v_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x), \tag{9}$$

где $c_k$, $k = \overline{0, n}$, – неизвестные пока постоянные.

Рассмотрим первый интеграл в уравнении (7) с учётом представления (9) и равенств (2):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{v_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln|t-x|\, dt = \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln|t-x|\, dt = \sum_{k=0}^{n} T_k(x) c_k \alpha_k, \tag{10}$$

где, согласно (2), $\alpha_0 = -\ln 2$, $\alpha_k = -1/k$, $k = \overline{1, n}$. Формула (10) даёт разложение интеграла по многочленам Чебышёва первого рода.

Рассмотрим второй интеграл в уравнении (7). Учитывая представления (9) и (5) и свойство ортогональности многочленов Чебышёва первого рода, получаем

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{v_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} K_{n,n}(x,t)\, dt = \sum_{k=0}^{n} c_k \sum_{m=0}^{n} T_m(x) \sum_{j=0}^{n} k^*_{m,j} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_k(t) T_j(t)\, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} c_k \sum_{m=0}^{n} T_m(x) \omega^*_{m,k} = \sum_{m=0}^{n} T_m(x) \sum_{k=0}^{n} c_k \omega^*_{m,k}, \tag{11}$$

$$\omega^*_{m,k} = \begin{cases} k^*_{m,k}, & k = 0, \\ 0.5\, k^*_{m,k}, & k > 0. \end{cases} \tag{12}$$

Подставляя представления (10), (11) и выражение для правой части (3) в уравнение (7), получаем

$$\sum_{j=0}^{n} T_j(x)\biggl(c_j\alpha_j + \sum_{k=0}^{n} c_k\omega_{j,k}^{*}\biggr) = \sum_{j=0}^{n} F_j^n T_j(x). \tag{13}$$

Равенство (13) верно тогда и только тогда, когда в нём совпадают коэффициенты при многочленах одинаковой степени, т.е. когда имеет место следующая линейная алгебраическая система уравнений относительно неизвестных $c_k$, $k=\overline{0,n}$:

$$c_j\alpha_j + \sum_{k=0}^{n} c_k\omega_{j,k}^{*} = F_j^n, \quad j=\overline{0,n}, \tag{14}$$

в которой коэффициенты $\omega_{j,k}^{*}$ вычисляются согласно (12), $\alpha_0 = -\ln 2$, $\alpha_k = -1/k$, $k=\overline{1,n}$.

Решив систему (14) относительно неизвестных $c_k$, $k=\overline{0,n}$, приближённое решение уравнения (1) с учётом (8) получим по формуле

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x). \tag{15}$$

Предложенная схема протестирована на примере решения модельной задачи для уравнения (1) при

$$K(x,t) = \frac{2t^2-1}{(x+2)(t+2)}, \quad f(x) = -2x - \biggl(\frac{28\sqrt{3}}{3} - 16\biggr)\frac{1}{x+2}.$$

Несложно показать, что решением уравнения (1) в данном случае является функция $\varphi(x) = 2x/\sqrt{1-x^2}$. Как показывают расчёты, проведённые в среде компьютерной математики MathCad, уже при сравнительно небольших значениях $n$, равных 9, 14 и 19, погрешность приближённого решения $\varphi_n(x)$, вычисленного по формуле (15) в системе точек $x=-0.99$, $-0.98$, $\ldots$, $0.99$, не превосходит $1.8\cdot 10^{-10}$, $4.2\cdot 10^{-14}$ и $3.6\cdot 10^{-14}$ соответственно.

**4. Приближённое решение уравнения (1) в классе $h(-1,1)$.** Аналогично предыдущему пункту работы рассмотрим следующее вспомогательное уравнение относительно новой неизвестной функции $v_n(x)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,v_n(t)\ln|t-x|\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,v_n(t)K_{n,n}(x,t)\,dt = f_{n+2}(x), \quad |x|<1, \tag{16}$$

где $K_{n,n}(x,t)$ – интерполяционный многочлен (6) функции $K(x,t)$ степени $n$ по обеим переменным, $f_{n+2}(x)$ – интерполяционный многочлен функции $f(x)$ вида (4) степени $n+2$. Отметим, что уравнение (16) в заданном классе разрешимо [6].

Далее докажем

**Утверждение 1.** *Для* $|x|<1$ *имеет место равенство*

$$J_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,U_k(t)\ln|t-x|\,dt = \begin{cases} -\dfrac{\ln 2}{2}T_0(x) + \dfrac{1}{4}T_2(x), & k=0,\\[2mm] -\dfrac{1}{2k}T_k(x) + \dfrac{1}{2k+4}T_{k+2}(x), & k\geqslant 1. \end{cases} \tag{17}$$

**Доказательство.** С учётом известного соотношения $2(1-x^2)U_k(x) = T_k(x) - T_{k+2}(x)$ (см. [7, с. 23]) подынтегральная функция в (17) сводится к виду (2), откуда и следует (17).

**Утверждение 2.** *Для* $|x|<1$ *имеет место равенство*

$$I_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,T_k(t)\ln|t-x|\,dt =$$

$$= \begin{cases} -\left(\dfrac{\ln 2}{2}+\dfrac{1}{8}\right)U_0(x)+\dfrac{1}{8}U_2(x), & k=0,\\ -\dfrac{1}{6}U_1(x)+\dfrac{1}{24}U_3(x), & k=1,\\ \left(\dfrac{\ln 2}{4}+\dfrac{1}{8}\right)U_0(x)-\dfrac{5}{32}U_2(x)+\dfrac{1}{32}U_4(x), & k=2,\\ -\dfrac{U_{k-4}(x)}{8(k-2)}+\dfrac{3k-4}{8k(k-2)}U_{k-2}(x)-\dfrac{3k+4}{8k(k+2)}U_k(x)+\dfrac{1}{8(k+2)}U_{k+2}(x), & k\geqslant 3. \end{cases} \tag{18}$$

**Доказательство.** Равенство (18) доказывается непосредственной подстановкой [7, с. 23] в интеграл, определяющий функцию $I_k(x)$, выражения $T_k(x)=(U_k(x)-U_{k-2}(x))/2$, $k\geqslant 1$, $U_{-1}(x)=0$, $T_0=U_0$, с учётом ранее полученных равенств (17) для $J_k(x)$. Утверждение доказано.

Используем далее представление искомой функции $v_n(x)$ в виде (9) с неизвестными $c_k$, $k=\overline{0,n}$.

Рассмотрим первый интеграл в (16) с учётом представления (9):

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}v_n(t)\ln|t-x|\,dt=\sum_{k=0}^{n}c_k\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}T_k(t)\ln|t-x|\,dt=\sum_{k=0}^{n}c_kI_k(x).$$

Подставляя в последнее равенство выражения для $I_k(x)$ из (18), получаем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}v_n(t)\ln|t-x|\,dt=c_0\left(\frac{1}{8}U_2(x)-\left(\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{8}\right)U_0(x)\right)+$$

$$+c_1\left(-\frac{1}{6}U_1(x)+\frac{1}{24}U_3(x)\right)+c_2\left(\left(\frac{\ln 2}{4}+\frac{1}{8}\right)U_0(x)-\frac{5}{32}U_2(x)+\frac{1}{32}U_4(x)\right)+$$

$$+\sum_{k=3}^{n}c_k\left(-\frac{U_{k-4}(x)}{8(k-2)}+\frac{3k-4}{8k(k-2)}U_{k-2}(x)-\frac{3k+4}{8k(k+2)}U_k(x)+\frac{1}{8(k+2)}U_{k+2}(x)\right). \tag{19}$$

После несложных преобразований придём к равенству

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}v_n(t)\ln|t-x|\,dt=\sum_{k=0}^{n+2}B_kU_k(x), \tag{20}$$

в котором выражения для $B_k$ несложно получить, приводя подобные члены в представлении (19). Равенство (20) даёт разложение интеграла по многочленам Чебышёва второго рода.

Рассмотрим второй интеграл в уравнении (16), используя интерполяционный многочлен (6) функции $K(x,t)$. Имеем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}v_n(t)K_{n,n}(x,t)\,dt=\sum_{k=0}^{n}c_k\sum_{m=0}^{n}U_m(x)\sum_{j=0}^{n}k_{m,j}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}T_k(t)U_j(t)\,dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}c_k\sum_{m=0}^{n}U_m(x)\sum_{j=0}^{n}k_{m,j}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}(U_{j+k}(t)+U_{j-k}(t))\,dt\right)=$$

$$= \sum_{m=0}^{n} U_m(x) \frac{1}{4} \left( \sum_{k=0}^{n} c_k k_{m,k} + c_0 k_{m,0} \right) = \sum_{m=0}^{n} D_m U_m(x), \tag{21}$$

где $D_m = \sum_{k=0}^{n} c_k \omega_{m,k}$,

$$\omega_{m,k} = \begin{cases} 0.5 k_{m,k}, & k = 0, \\ 0.25 k_{m,k}, & k > 0. \end{cases} \tag{22}$$

Подстановка в уравнение (16) представлений (20), (21) и выражения для $f_{n+2}(x)$ в виде (4) приводит к равенству

$$\sum_{k=0}^{n} (B_k + D_k) U_k(x) + \sum_{k=n+1}^{n+2} B_k U_k(x) = \sum_{k=0}^{n+2} f_k^{n+2} U_k(x). \tag{23}$$

Равенство (23) верно тогда и только тогда, когда в нём совпадают коэффициенты при многочленах одинаковой степени, т.е. когда имеет место система уравнений $B_k + D_k = f_k^{n+2}$, $k = \overline{0, n}$, $B_k = f_k^{n+2}$, $k = \overline{n+1, n+2}$. После несложных её преобразований приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $c_k$, $k = \overline{0, n}$:

$$\beta_k c_k + \gamma_k c_{k+2} + \delta_k c_{k+4} + \sum_{q=0}^{n} c_q \omega_{k,q} = f_k^{n+2}, \quad k = \overline{0, 1},$$

$$\alpha_k c_{k-2} + \beta_k c_k + \gamma_k c_{k+2} + \delta_k c_{k+4} + \sum_{q=0}^{n} c_q \omega_{k,q} = f_k^{n+2}, \quad k = \overline{2, n-4},$$

$$\alpha_k c_{k-2} + \beta_k c_k + \gamma_k c_{k+2} + \sum_{q=0}^{n} c_q \omega_{k,q} = f_k^{n+2}, \quad k = \overline{n-3, n-2},$$

$$\alpha_k c_{k-2} + \beta_k c_k + \sum_{q=0}^{n} c_q \omega_{k,q} = f_k^{n+2}, \quad k = \overline{n-1, n},$$

$$\alpha_k c_{k-2} = f_k^{n+2}, \quad k = \overline{n+1, n+2}, \tag{24}$$

где

$$\alpha_k = \begin{cases} \dfrac{1}{8}, & k = 2, \\[2mm] \dfrac{1}{8k}, & k > 2, \end{cases} \qquad \beta_k = \begin{cases} -\dfrac{\ln 2}{2} - \dfrac{1}{8}, & k = 0, \\[2mm] -\dfrac{1}{6}, & k = 1, \\[2mm] -\dfrac{3k+4}{8k(k+2)}, & k > 1, \end{cases}$$

$$\gamma_k = \begin{cases} \dfrac{\ln 2}{4} + \dfrac{1}{8}, & k = 0, \\[2mm] \dfrac{3k+2}{8k(k+2)}, & k > 0, \end{cases} \qquad \delta_k = \begin{cases} -\dfrac{1}{16}, & k = 0, \\[2mm] -\dfrac{1}{8(k+2)}, & k > 0, \end{cases}$$

коэффициенты $\omega_{k,q}$ вычисляются согласно (22).

Решив систему (24) относительно неизвестных $c_k$, $k = \overline{0, n}$, приближённое решение $\varphi_n(x)$ уравнения (1) получим по формуле

$$\varphi_n(x) = \sqrt{1 - x^2} \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x). \tag{25}$$

Предложенная схема протестирована на примере решения модельной задачи для уравнения (1) при

$$K(x,t) = \frac{4t}{(x+2)(t+2)}, \quad f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x + (56 - 32\sqrt{3})\frac{1}{x+2}.$$

Несложно показать, что решением уравнения (1) в данном случае является функция $\varphi(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$. Как показывают расчёты, уже при сравнительно небольших значениях $n$, равных 7, 14 и 29, погрешность приближённого решения $\varphi_n(x)$, вычисленного по формуле (25) в системе точек $x = -0.99, -0.98, \ldots, 0.99$, не превосходит $4.6 \cdot 10^{-4}$, $1.8 \cdot 10^{-7}$ и $1.7 \cdot 10^{-13}$ соответственно.

**5. Приближённое решение уравнения (1) в классах $h(\pm 1)$.** Аналогично рассмотренным выше случаям приближённое решение $\varphi_n(x)$ уравнения (1) будем искать как решение следующего уравнения относительно новой неизвестной функции $v_n(x)$:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1\mp t}{1\pm t}}v_n(t)\ln|t-x|\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1\mp t}{1\pm t}}v_n(t)K_{n,n}(x,t)\,dt = f_{n+1}(x), \quad |x|<1, \tag{26}$$

где $K_{n,n}(x,t)$ – интерполяционный многочлен (5) функции $K(x,t)$ степени $n$ по обеим переменным, $f_{n+1}(x)$ – интерполяционный многочлен вида (3) функции $f(x)$ степени $n+1$. Здесь и далее из знаков “ $\pm$ ” или “ $\mp$ ” для класса $h(1)$ выбирается верхний, а для класса $h(-1)$ – нижний. Решения $\varphi_n$ и $v_n$ связаны равенством

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{1\mp x}{1\pm x}}v_n(x). \tag{27}$$

Отметим, что уравнение (26), как и уравнение (1), в рассматриваемых классах функций разрешимо [6].

Используем представление функции $v_n(x)$ в виде (9) с неизвестными $c_k$, $k = \overline{0,n}$.

**Утверждение 3.** *Для* $|x|<1$ *имеет место равенство*

$$L_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1\mp t}{1\pm t}}T_k(t)\ln|t-x|\,dt = \begin{cases} -\ln 2T_0(x) \pm T_1(x), & k=0,\\ \pm\dfrac{\ln 2}{2}T_0(x) - T_1(x) \pm \dfrac{1}{4}T_2(x), & k=1,\\ \pm\dfrac{T_{k-1}(x)}{2(k-1)} - \dfrac{T_k(x)}{k} \pm \dfrac{T_{k+1}(x)}{2(k+1)}, & k\geqslant 2. \end{cases} \tag{28}$$

**Доказательство.** Умножим на $\sqrt{1\mp t}$ числитель и знаменатель подынтегральной функции и учтём соотношение $xT_k(x) = T_{k+1}(x) + T_{|k-1|}(x)$ [7, с. 23]. В результате подынтегральная функция в (28) сводится к виду (2), откуда и следует доказываемое утверждение.

Рассмотрим первый интеграл в уравнении (26). С учётом представления (27) и равенств (28) имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1\mp t}{1\pm t}}v_n(t)\ln|t-x|\,dt = \sum_{k=0}^{n}c_k\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1\mp t}{1\pm t}}T_k(t)\ln|t-x|\,dt = \sum_{k=0}^{n}L_k(x)c_k. \tag{29}$$

Приводя подобные члены в (29) с учётом равенства (28), приходим к следующему представлению рассматриваемого интеграла по многочленам Чебышёва первого рода:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1\mp t}{1\pm t}}v_n(t)\ln|t-x|\,dt = \sum_{k=0}^{n+1}B_kT_k(x).$$

Выражения для $B_k$ несложно получить из равенства (29).

Рассмотрим второй интеграл в уравнении (26). Используем интерполяционный многочлен $K_{n,n}(x,t)$ вида (5). Вследствие ортогональности многочленов Чебышёва первого рода, используя равенство (27), получаем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1\mp t}{1\pm t}}v_n(t)K_{n,n}(x,t)\,dt=\sum_{k=0}^{n}c_k\sum_{m=0}^{n}T_m(x)\sum_{j=0}^{n}k^*_{m,j}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{(1\mp t)}{\sqrt{1-t^2}}T_k(t)T_j(t)\,dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}c_k\sum_{m=0}^{n}T_m(x)\biggl(k^*_{m,k}\omega^*_k\mp\frac{1}{2}k^*_{m,|k-1|}\omega^*_{|k-1|}\biggr)\mp\sum_{k=0}^{n-1}c_k\sum_{m=0}^{n}T_m(x)\frac{1}{2}k^*_{m,k+1}\omega^*_{k+1}=$$

$$=\sum_{m=0}^{n}T_m(x)\sum_{k=0}^{n}c_k\Omega_{m,k},\tag{30}$$

$$\Omega_{m,k}=k^*_{m,k}\omega^*_k\mp\frac{1}{2}k^*_{m,|k-1|}\omega^*_{|k-1|}\mp\frac{1}{2}k^*_{m,k+1}\omega^*_{k+1}\delta_{k+1},$$

$$\delta^*_k=\begin{cases}1, & k=\overline{0,n},\\ 0, & k>n,\end{cases}\qquad \omega^*_k=\begin{cases}1, & k=0,\\ 0.5, & k>0.\end{cases}\tag{31}$$

Подстановка в уравнение (26) представлений (29), (30) и выражения для его правой части в виде (3) приводит к равенству

$$\sum_{j=0}^{n}T_j(x)\biggl(B_j+\sum_{k=0}^{n}c_k\Omega_{j,k}\biggr)+B_nT_{n+1}(x)=\sum_{j=0}^{n+1}F^{n+1}_jT_j(x).$$

Данное равенство выполняется тогда и только тогда, когда в нём совпадают коэффициенты при многочленах одинаковых степеней, т.е. когда имеет место следующая система уравнений относительно неизвестных $c_k$, $k=\overline{0,n}$:

$$B_j+\sum_{k=0}^{n}c_k\Omega_{j,k}=F^{n+1}_j,\quad j=\overline{0,n},\quad B_{n+1}=F^{n+1}_{n+1},$$

где коэффициенты $\Omega_{j,k}$ вычисляются согласно (31). После несложных преобразований этой системы приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $c_k$, $k=\overline{0,n}$:

$$-\ln 2c_0\pm\frac{\ln 2}{2}c_1+\sum_{q=0}^{n}c_q\Omega_{0,q}=F^{n+1}_0,$$

$$c_0-c_1\pm 0,5c_2+\sum_{q=0}^{n}c_q\Omega_{1,q}=F^{n+1}_1,$$

$$\pm\frac{1}{2k}c_{k-1}-\frac{1}{k}c_k+\frac{1}{2k}c_{k+1}\pm\sum_{q=0}^{n}c_q\Omega_{k,q}=F^{n+1}_k,\quad k=\overline{2,n-1},$$

$$\pm\frac{1}{2n}c_{n-1}-\frac{1}{n}c_n+\sum_{q=0}^{n}c_q\Omega_{n,q}=F^{n+1}_n,$$

$$\pm\frac{1}{2n+2}c_n=F^{n+1}_{n+1}.\tag{32}$$

Вычисляя коэффициенты $c_k$, $k = \overline{0, n}$, как решение системы (32), приближённое решение уравнения (1) найдём по формуле

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x). \tag{33}$$

Предложенные схемы протестированы на примере решения модельной задачи для уравнения (1) при

$$K(x,t) = \frac{4t}{(x+2)(t+2)}, \quad f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x + (56 - 32\sqrt{3})\frac{1}{x+2}.$$

Несложно показать, что решением уравнения (1) в классах $h(\pm 1)$ являются функции $\varphi(x) = (2x \pm 2x^2)\sqrt{(1 \mp x)/(1 \pm x)}$. Как показывают расчёты, уже при сравнительно небольших значениях $n$, равных 7, 14 и 29, погрешность приближённого решения $\varphi_n(x)$, вычисленного по формуле (33) в системе точек $x = -0.99,\ -0.98,\ \ldots,\ 0.99$, не превосходит $5.1 \cdot 10^{-4}$, $1.5 \cdot 10^{-7}$ и $7 \cdot 10^{-13}$ соответственно.

**Заключение.** Построенные схемы численного решения сингулярного интегрального уравнения со слабой особенностью вида (1) в разных функциональных классах Мусхелишвили, в отличие от ранее известных методик [6], позволяют получить приближённое решение задачи, не прибегая к квадратурным формулам. Благодаря этому, как показывают численные примеры, предложенные алгоритмы при небольших вычислительных затратах на достаточно грубой сетке обеспечивают высокую точность приближённого решения, ограниченную лишь вычислительной погрешностью, во всех рассмотренных классах функции.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Расолько Г.А.* Численное решение сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2018. № 3. С. 68–74.
2. *Расолько Г.А.* К численному решению сингулярного интегро-дифференциального уравнения Прандтля методом ортогональных многочленов // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2019. № 1. С. 58–68.
3. *Расолько Г.А., Шешко С.М., Шешко М.А.* Об одном методе численного решения некоторых сингулярных интегро-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 9. С. 1285–1292.
4. *Расолько Г.А., Шешко С.М.* Приближенное решение одного сингулярного интегро-дифференциального уравнения методом ортогональных многочленов // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2020. № 2. С. 10–20.
5. *Расолько Г.А., Волков В.М.* Метод ортогональных многочленов для приближённого решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений в приложении к двумерным задачам дифракции // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 6. С. 830–839.
6. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т.* Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. Киев, 1984.
7. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
8. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М., 1983.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 17.01.2022 г.
После доработки 17.01.2022 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.