ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 4, с. 554–567

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.64+517.958:537.8

О ПРИБЛИЖЁННОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2022 г. Э. Г. Халилов

Дано обоснование метода коллокации для системы интегральных уравнений в задачах экранирования электромагнитных полей для цилиндрических тел. Система интегральных уравнений в специально выбранных точках аппроксимируется системой алгебраических уравнений, для которой устанавливается существование и единственность решения. Доказывается сходимость решения полученной системы алгебраических уравнений к точному решению системы интегральных уравнений и указывается скорость сходимости метода.

DOI: 10.31857/S0374064122040112, EDN: CALBHE

1. Введение и постановка задачи. Рассмотрим в однородном изотропном пространстве цилиндрическое тело Ω_1 с поперечным сечением D_1 и с образующей, направленной вдоль оси z, боковая поверхность которого представляет собой тонкий экран S_Λ толщиной Λ. Для упрощения системы интегральных уравнений экран S_Λ заменяется идеально тонкой поверхностью S, на которой вводятся специальные граничные условия (см. [1]). Обозначим через Ω_2 область вне тела Ω_1 (т.е. $\mathbb{R}^3=\Omega_1\bigcup S\bigcup\Omega_2$), а через D_2 сечение области Ω_2 плоскостью $z=\mathrm{const}$. Среда в области Ω_j $(j=1,2)$ характеризуется электромагнитными параметрами $\gamma_j=0$, ε_j и μ_j, а материал экрана – параметрами γ, ε и μ. Пусть замкнутая кривая Ляпунова Γ является контуром ортогонального сечения поверхности S, а $\vec{n}(y)$ – внешняя единичная нормаль в точке $y\in\Gamma$. В работе [2] показано, что если электромагнитное поле распространяется ортогонально образующей цилиндра, то краевая задача экранирования сводится к следующей краевой задаче:

$$\Delta u_1+k_1^2u_1=0 \quad \text{в} \quad D_1, \quad \Delta u_2'+k_2^2u_2'=0 \quad \text{в} \quad D_2,$$

$$u_1|_\Gamma=\left.\left(\alpha_1\frac{\partial u_1}{\partial\vec{n}}+\alpha_2\frac{\partial u_2}{\partial\vec{n}}\right)\right|_\Gamma,$$

$$u_2|_\Gamma=\left.\left(\beta_1\frac{\partial u_1}{\partial\vec{n}}+\beta_2\frac{\partial u_2}{\partial\vec{n}}\right)\right|_\Gamma, \quad u_2=u_0+u_2', \tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа, $k_j=\omega\sqrt{\varepsilon_j\mu_j}$ $(j=1,2)$,

$$\alpha_1=\frac{1}{2\omega\mu_1}\left(\frac{1}{\Pi}-N\right), \quad \alpha_2=-\frac{1}{2\omega\mu_2}\left(\frac{1}{\Pi}+N\right),$$

$$\beta_1=\frac{1}{2\omega\mu_1}\left(\frac{1}{\Pi}+N\right), \quad \beta_2=-\frac{1}{2\omega\mu_2}\left(\frac{1}{\Pi}-N\right),$$

$$N=\frac{1}{2}\omega\mu\Lambda, \quad \Pi=\frac{1}{2}\omega\left(\varepsilon+i\frac{\gamma}{\omega}\right)\Lambda,$$

ω – круговая частота поля, а u_0 – потенциал источника, определяющий внешнее электромагнитное поле, воздействующее на экран.

Используя интегральную формулу Грина, в работе [2] доказано, что неизвестные функции

$$\varphi(x)=u_1(x)|_{x\in\Gamma} \quad \text{и} \quad \psi(x)=\left.\frac{\partial u_1(x)}{\partial\vec{n}(x)}\right|_{x\in\Gamma}$$

удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$\varphi(x) + \int_\Gamma (K_{11}(x,y)\varphi(y) + K_{12}(x,y)\psi(y))\,dl_y = 0,$$

$$\psi(x) + \int_\Gamma (K_{21}(x,y)\varphi(y) + K_{22}(x,y)\psi(y))\,dl_y = 2\frac{\alpha_2}{\delta}u_0(x),$$

которую запишем в виде

$$\begin{gathered}\varphi(x) + (A_{11}\varphi)(x) + (A_{12}\psi)(x) = 0,\\ \psi(x) + (A_{21}\varphi)(x) + (A_{22}\psi)(x) = 2\frac{\alpha_2}{\delta}u_0(x),\end{gathered} \tag{2}$$

здесь

$$(A_{jm}f)(x) = \int_\Gamma K_{jm}(x,y)f(y)\,dl_y, \quad x\in\Gamma, \quad j,m=1,2,$$

$$K_{11}(x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial G_1(x,y)}{\partial\vec{n}(y)}, \quad K_{12}(x,y) = -\frac{1}{\pi}G_1(x,y),$$

$$K_{21}(x,y) = \frac{1}{\pi\delta}\left[G_2(x,y) - \beta_2\left(\frac{\partial G_1(x,y)}{\partial\vec{n}(y)} + \frac{\partial G_2(x,y)}{\partial\vec{n}(y)}\right)\right],$$

$$K_{22}(x,y) = \frac{1}{\pi\delta}\left[\beta_2 G_1(x,y) - \alpha_1 G_2(x,y) - \delta\frac{\partial G_2(x,y)}{\partial\vec{n}(y)}\right],$$

$\delta = \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2$, $G_j(x,y) = \dfrac{\pi i}{2}H_0^{(1)}(k_j|x-y|)$ – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца в D_j $(j=1,2)$, $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка, определяемая формулой $H_0^{(1)}(w) = J_0(w) + iN_0(w)$, где

$$J_0(w) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{w}{2}\right)^{2m}$$

– функция Бесселя нулевого порядка,

$$N_0(w) = \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{w}{2} + C\right)J_0(w) + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}\right)\frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2}\left(\frac{w}{2}\right)^{2m}$$

– функция Неймана нулевого порядка, а $C = 0.57721\ldots$ – постоянная Эйлера.

Из задачи (1) следует, что

$$u_2'(y) = \frac{\beta_2}{\alpha_2}\varphi(y) + \frac{\delta}{\alpha_2}\psi(y) - u_0(y), \quad y\in\Gamma,$$

$$\frac{\partial u_2'(y)}{\partial\vec{n}(y)} = \frac{1}{\alpha_2}\varphi(y) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\psi(y) - \frac{\partial u_0(y)}{\partial\vec{n}(y)}, \quad y\in\Gamma.$$

При этом функции (см. [2])

$$u_1(x) = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\left[G_1(x,y)\frac{\partial u_1(y)}{\partial\vec{n}(y)} - u_1(y)\frac{\partial G_1(x,y)}{\partial\vec{n}(y)}\right]dl_y, \quad x\in D_1,$$

$$u_2'(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma\left[G_2(x,y)\frac{\partial u_2'(y)}{\partial\vec{n}(y)} - u_2'(y)\frac{\partial G_2(x,y)}{\partial\vec{n}(y)}\right]dl_y, \quad x\in D_2,$$

являются решением краевой задачи (1).

Известно, что, вообще говоря, найти точное решение системы интегральных уравнений (2) невозможно. Поэтому возникает интерес к исследованию её приближённого решения с теоретическим обоснованием. Отметим, что в работах [3–8] изучены приближённые решения некоторых классов систем интегральных уравнений. Но исследование приближённого решения системы интегральных уравнений (2) до настоящего времени отсутствовало. Кроме того, в работе [9] построена квадратурная формула для логарифмических потенциалов простого и двойного слоёв, а в работе [10] – квадратурная формула для их потенциалов. Однако в работе [10] для этого использована асимптотическая формула для функции Ханкеля первого рода нулевого порядка, которая не позволяет определить скорость сходимости указанных квадратурных формул. Поэтому более практичный способ построения квадратурных формул для потенциалов простого и двойного слоёв, а также исследование приближённого решения системы интегральных уравнений (2) имеют важное значение, чему и посвящена настоящая работа.

2. Построение квадратурной формулы. Предположим, что кривая $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ задана параметрическим уравнением $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $t \in [a,b]$. Разобьём промежуток $[a,b]$ на $n > 2M_0(b-a)/d$ равных частей точками $t_p = a + (b-a)p/n$, $p = \overline{0,n}$, здесь

$$M_0 = \max_{t\in[a,b]} \sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2} < +\infty$$

(см. [11, с. 560]) и d – стандартный радиус (см. [12, с. 400]). В качестве опорных точек возьмём $x(\tau_p)$, $p = \overline{1,n}$, где $\tau_p = a+(b-a)(2p-1)/(2n)$. Тогда кривая Γ разбивается на элементарные части $\Gamma = \bigcup_{p=1}^{n} \Gamma_p$, где $\Gamma_p = \{x(t) : t_{p-1} \leqslant t \leqslant t_p\}$. В дальнейшем запись $a(n) \sim b(n)$ означает, что

$$C_1 \leqslant \frac{a(n)}{b(n)} \leqslant C_2 \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N},$$

где C_1 и C_2 – положительные постоянные, не зависящие от n.

Известно, что (см. [9])

1) для каждого $p \in \{1,2,\ldots,n\}$ имеет место отношение $r_p(n) \sim R_p(n)$, где

$$r_p(n) = \min\{|x(\tau_p) - x(t_{p-1})|, |x(t_p) - x(\tau_p)|\}, \quad R_p(n) = \max\{|x(\tau_p) - x(t_{p-1})|, |x(t_p) - x(\tau_p)|\};$$

2) для любого $p \in \{1,2,\ldots,n\}$ выполняется неравенство $R_p(n) \leqslant d/2$;

3) для всех $p, j \in \{1,2,\ldots,n\}$ справедливо отношение $r_j(n) \sim r_p(n)$;

4) имеют место отношения $r(n) \sim R(n) \sim \dfrac{1}{n}$, где $R(n) = \max\limits_{p=\overline{1,n}} R_p(n)$, $r(n) = \min\limits_{p=\overline{1,n}} r_p(n)$.

В дальнейшем такое разбиение будем называть разбиением кривой Γ на *регулярные элементарные части.*

Поступая точно так же, как и в доказательстве леммы 2.1 работы [13], несложно показать, что справедлива

Лемма. *Существуют такие постоянные $C_0' > 0$ и $C_1' > 0$, не зависящие от n, для которых при всех $p, j \in \{1,2,\ldots,n\}$, $j \neq p$, и любом $y \in \Gamma_j$ справедливо двойное неравенство*

$$C_0'|y - x(\tau_p)| \leqslant |x(\tau_j) - x(\tau_p)| \leqslant C_1'|y - x(\tau_p)|.$$

Через $C(\Gamma)$ обозначим пространство всех непрерывных функций на Γ с нормой $\|\varphi\|_\infty = \max\limits_{x\in\Gamma} |\varphi(x)|$ и для функции $\varphi \in C(\Gamma)$ вводим модуль непрерывности

$$\omega(\varphi, h) = \max_{\substack{|x-y|\leqslant h\\ x,y\in\Gamma}} |\varphi(x) - \varphi(y)|, \quad h > 0.$$

Обозначим

$$K_{11}^n(x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial G_1^n(x,y)}{\partial \vec{n}(y)}, \quad K_{12}^n(x,y) = -\frac{1}{\pi} G_1^n(x,y),$$

$$K_{21}^n(x,y)=\frac{1}{\pi\delta}\left[G_2^n(x,y)-\beta_2\left(\frac{\partial G_1^n(x,y)}{\partial\vec{n}(y)}+\frac{\partial G_2^n(x,y)}{\partial\vec{n}(y)}\right)\right],$$

$$K_{22}^n(x,y)=\frac{1}{\pi\delta}\left[\beta_2 G_1^n(x,y)-\alpha_1 G_2^n(x,y)-\delta\frac{\partial G_2^n(x,y)}{\partial\vec{n}(y)}\right],$$

где $n\in\mathbb{N}$ и

$$G_j^n(x,y)=\frac{\pi i}{2}H_{0,n}^{(1)}(k_j|x-y|),\quad x,y\in\Gamma,\quad x\neq y,\quad j=1,2,$$

$$H_{0,n}^{(1)}(w)=J_{0,n}(w)+iN_{0,n}(w),\quad J_{0,n}(w)=\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{w}{2}\right)^{2m}$$

и

$$N_{0,n}(w)=\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{w}{2}+C\right)J_{0,n}(w)+\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}\right)\frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2}\left(\frac{w}{2}\right)^{2m}.$$

Нетрудно вычислить, что

$$\frac{\partial G_j^n(x,y)}{\partial\vec{n}(y)}=\frac{\pi i}{2}\left(\frac{\partial J_{0,n}(k_j|x-y|)}{\partial\vec{n}(y)}+i\frac{\partial N_{0,n}(k_j|x-y|)}{\partial\vec{n}(y)}\right),\quad j=1,2,$$

где

$$\frac{\partial J_{0,n}(k_j|x-y|)}{\partial\vec{n}(y)}=(y-x,\vec{n}(y))\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m k_j^{2m}|x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1}(m-1)!m!},\quad j=1,2,$$

и

$$\frac{\partial N_{0,n}(k_j|x-y|)}{\partial\vec{n}(y)}=\frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{k_j|x-y|}{2}+C\right)\frac{\partial J_{0,n}(k_j|x-y|)}{\partial\vec{n}(y)}+\frac{2(y-x,\vec{n}(y))}{\pi|x-y|^2}J_{0,n}(k_j|x-y|)+$$
$$+(y-x,\vec{n}(y))\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}\right)\frac{(-1)^{m+1}k_j^{2m}|x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1}(m-1)!m!},\quad j=1,2.$$

Построим сначала квадратурную формулу для интеграла $(A_{12}\psi)(x)$, $x\in\Gamma$. Далее через M обозначается положительная постоянная, разная в различных неравенствах.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть $\Gamma\subset\mathbb{R}^2$ – простая замкнутая кривая Ляпунова с показателем $0<\alpha\leqslant 1$ и $\psi\in C(\Gamma)$. Тогда выражение*

$$(A_{12}^n\psi)(x(\tau_p))=\frac{b-a}{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}K_{12}^n(x(\tau_p),x(\tau_j))\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\,\psi(x(\tau_j))$$

в опорных точках $x(\tau_p)$, $p=\overline{1,n}$, является квадратурной формулой для интеграла $(A_{12}\psi)(x)$, $x\in\Gamma$, причём справедливы следующие оценки:

$$\max_{p=\overline{1,n}}|(A_{12}\psi)(x(\tau_p))-(A_{12}^n\psi)(x(\tau_p))|\leqslant M\left(\omega(\psi,1/n)+\|\psi\|_\infty\frac{1}{n^\alpha}\right)\quad\text{при}\quad 0<\alpha<1,$$

$$\max_{p=\overline{1,n}}|(A_{12}\psi)(x(\tau_p))-(A_{12}^n\psi)(x(\tau_p))|\leqslant M\left(\omega(\psi,1/n)+\|\psi\|_\infty\frac{\ln n}{n}\right)\quad\text{при}\quad \alpha=1.$$

Доказательство. Несложно видеть, что

$$(A_{12}\psi)(x(\tau_p))-(A_{12}^n\psi)(x(\tau_p))=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma_p}G_1(x(\tau_p),y)\psi(y)\,dl_y-$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}\int\limits_{\Gamma_j}(G_1(x(\tau_p),y)-G_1^n(x(\tau_p),x(\tau_j)))\psi(y)\,dl_y-\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}\int\limits_{\Gamma_j}G_1^n(x(\tau_p),x(\tau_j))(\psi(y)-\psi(x(\tau_j)))\,dl_y-$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}G_1^n(x(\tau_p),x(\tau_j))\Big(\sqrt{(x_1'(t))^2+(x_2'(t))^2}-\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\Big)\psi(x(\tau_j))\,dt.$$

Слагаемые в правой части этого равенства обозначим в порядке их следования через $h_1^n(x(\tau_p))$, $h_2^n(x(\tau_p))$, $h_3^n(x(\tau_p))$ и $h_4^n(x(\tau_p))$.

Очевидно, что

$$|J_0(k_1|x-y|)|\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(|k_1|\operatorname{diam}L)^{2m}}{4^m(m!)^2}\leqslant M,\quad x,y\in\Gamma, \tag{3}$$

и

$$\bigg|\sum_{m=1}^{\infty}\bigg(\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}\bigg)\frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2}\bigg(\frac{k_1|x-y|}{2}\bigg)^{2m}\bigg|\leqslant\sum_{m=1}^{\infty}\bigg(\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}\bigg)\frac{(|k_1|\operatorname{diam}L)^{2m}}{4^m(m!)^2}\leqslant M,\quad x,y\in\Gamma. \tag{4}$$

Следовательно, имеет место неравенство

$$|G_1(x,y)|\leqslant M|\ln|x-y||,\quad x,y\in\Gamma,\quad x\neq y. \tag{5}$$

Тогда, применяя формулу вычисления криволинейного интеграла, находим

$$|h_1^n(x(\tau_p))|\leqslant\frac{1}{\pi}\|\psi\|_\infty\int\limits_{\Gamma_p}|G_1(x(\tau_p),y)|\,dl_y\leqslant M\|\psi\|_\infty\int\limits_0^{R(n)}|\ln\tau|d\tau\leqslant M\|\psi\|_\infty R(n)|\ln R(n)|.$$

Пусть $y\in\Gamma_j$ и $j\neq p$. Учитывая лемму, получаем

$$||x(\tau_p)-y|^q-|x(\tau_p)-x(\tau_j)|^q|\leqslant Mq|x(\tau_j)-y||x(\tau_p)-y|^{q-1}\leqslant MqR(n)(\operatorname{diam}L)^{q-1} \tag{6}$$

и

$$|\ln(k_1|x(\tau_p)-y|)-\ln(k_1|x(\tau_p)-x(\tau_j)|)|=\bigg|\ln\bigg(1+\frac{|x(\tau_p)-x(\tau_j)|-|x(\tau_p)-y|}{|x(\tau_p)-y|}\bigg)\bigg|\leqslant$$

$$\leqslant\bigg|\ln\bigg(1+\frac{|x(\tau_j)-y|}{|x(\tau_p)-y|}\bigg)\bigg|\leqslant M\frac{R(n)}{|x(\tau_p)-y|}, \tag{7}$$

где $q\in\mathbb{N}$. Тогда, принимая во внимание неравенства (3), (4), (6) и (7), будем иметь

$$|G_1(x(\tau_p),y)-G_1(x(\tau_p),x(\tau_j))|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\pi}{2}\bigg|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\bigg(\bigg(\frac{k_1|x(\tau_p)-y|}{2}\bigg)^{2m}-\bigg(\frac{k_1|x(\tau_p)-x(\tau_j)|}{2}\bigg)^{2m}\bigg)\bigg|+$$

$$+\bigg|\bigg(\ln\frac{k_1|x(\tau_p)-x(\tau_j)|}{2}+C\bigg)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\bigg(\bigg(\frac{k_1|x(\tau_p)-y|}{2}\bigg)^{2m}-\bigg(\frac{k_1|x(\tau_p)-x(\tau_j)|}{2}\bigg)^{2m}\bigg)\bigg|+$$

$$+\bigg|(\ln(k_1|x(\tau_p)-y|)-\ln(k_1|x(\tau_p)-x(\tau_j)|))\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\bigg(\frac{k_1|x(\tau_p)-y|}{2}\bigg)^{2m}\bigg|+$$

$$+\frac{\pi}{2}\bigg|\sum_{m=1}^{\infty}\bigg(\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}\bigg)\frac{(-1)^{m+1}}{(m!)^2}\bigg(\bigg(\frac{k_1|x(\tau_p)-y|}{2}\bigg)^{2m}-\bigg(\frac{k_1|x(\tau_p)-x(\tau_j)|}{2}\bigg)^{2m}\bigg)\bigg|\leqslant\frac{MR(n)}{|x(\tau_p)-y|}.$$

Кроме того, учитывая неравенства

$$|J_0(k_1|x-y|)-J_{0,n}(k_1|x-y|)|\leqslant\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{|k_1|^{2m}|x-y|^{2m}}{4^m(m!)^2}\leqslant\frac{M}{(n+1)!},\quad x,y\in\Gamma, \tag{8}$$

и

$$|N_0(k_1|x-y|)-N_{0,n}(k_1|x-y|)|\leqslant\frac{M|\ln|x-y||}{(n+1)!},\quad x,y\in\Gamma, \tag{9}$$

получаем

$$|G_1(x(\tau_p),x(\tau_j))-G_1^n(x(\tau_p),x(\tau_j))|\leqslant\frac{M|\ln|x(\tau_p)-x(\tau_j)||}{(n+1)!}\leqslant\frac{M}{(n+1)!|x(\tau_p)-y|}.$$

В результате находим, что

$$|G_1(x(\tau_p),y)-G_1^n(x(\tau_p),x(\tau_j))|\leqslant|G_1(x(\tau_p),y)-G_1(x(\tau_p),x(\tau_j))|+$$
$$+|G_1(x(\tau_p),x(\tau_j))-G_1^n(x(\tau_p),x(\tau_j))|\leqslant\frac{M}{|x(\tau_p)-y|}\bigg(R(n)+\frac{1}{(n+1)!}\bigg).$$

Следовательно,

$$|h_2^n(x(\tau_p))|\leqslant M\|\psi\|_\infty\bigg(R(n)+\frac{1}{(n+1)!}\bigg)\int_{r(n)}^{\operatorname{diam}L}\frac{d\tau}{\tau}\leqslant M\|\psi\|_\infty\bigg(R(n)+\frac{1}{(n+1)!}\bigg)|\ln R(n)|.$$

Из неравенства (5) вытекает сходимость несобственного интеграла

$$\int_\Gamma|G_1(x,y)|\,dl_y,$$

а также неравенство

$$\int_\Gamma|G_1(x,y)|\,dl_y\leqslant M,\quad x\in\Gamma.$$

Тогда из неравенств (8) и (9) следует, что

$$\int_\Gamma|G_1^n(x,y)|\,dl_y\leqslant\int_\Gamma|G_1(x,y)|\,dl_y+\int_\Gamma|G_1(x,y)-G_1^n(x,y)|\,dl_y\leqslant M,\quad x\in\Gamma,\quad n\in\mathbb{N}.$$

В итоге, принимая во внимание лемму, будем иметь

$$|h_3^n(x(\tau_p))|\leqslant M\omega(\psi,R(n))\int_\Gamma|G_1^n(x(\tau_p),y)|\,dl_y\leqslant M\omega(\psi,R(n)).$$

Очевидно, что

$$\Big|\sqrt{(x_1'(t))^2+(x_2'(t))^2}-\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\Big|\leqslant M(R(n))^\alpha,\quad t\in[t_{j-1},t_j]. \tag{10}$$

Пусть $y \in \Gamma_j$ и $j \neq p$. Учитывая лемму и неравенства (3) и (4), получаем

$$|J_{0,n}(k_1|x(\tau_p) - x(\tau_j)|)| \leqslant \sum_{m=0}^{n} \frac{(|k_1| \operatorname{diam} L)^{2m}}{4^m (m!)^2} \leqslant M, \quad n \in \mathbb{N},$$

и

$$|N_{0,n}(k_1|x(\tau_p) - x(\tau_j)|)| \leqslant M |\ln|x(\tau_p) - y||, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому

$$|G_1^n(x(\tau_p), x(\tau_j))| \leqslant M |\ln|x(\tau_p) - y||, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда заключаем, что

$$|h_4^n(x(\tau_p))| \leqslant M\|\psi\|_\infty (R(n))^\alpha \sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} |G_1^n(x(\tau_p), x(\tau_j))| \, dt \leqslant$$

$$\leqslant M\|\psi\|_\infty (R(n))^\alpha \sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} \int\limits_{\Gamma_j} |G_1^n(x(\tau_p), x(\tau_j))| \, dl_y \leqslant$$

$$\leqslant M\|\psi\|_\infty (R(n))^\alpha \int\limits_{\Gamma} |\ln|x(\tau_p) - y|| \, dl_y \leqslant M\|\psi\|_\infty (R(n))^\alpha.$$

В результате, суммируя полученные оценки для выражений $h_1^n(x(\tau_p))$, $h_2^n(x(\tau_p))$, $h_3^n(x(\tau_p))$ и $h_4^n(x(\tau_p))$ и принимая во внимание отношение $R(n) \sim 1/n$, завершаем доказательство теоремы 1.

Теперь построим квадратурную формулу для интеграла $(A_{11}\varphi)(x)$, $x \in \Gamma$.

Теорема 2. *Пусть* $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ *– простая замкнутая кривая Ляпунова с показателем* $0 < \alpha \leqslant 1$ *и* $\varphi \in C(\Gamma)$. *Тогда выражение*

$$(A_{11}^n\varphi)(x(\tau_p)) = \frac{b-a}{n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} K_{11}^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \sqrt{(x_1'(\tau_j))^2 + (x_2'(\tau_j))^2} \varphi(x(\tau_j))$$

в опорных точках $x(\tau_p)$, $p = \overline{1,n}$, *является квадратурной формулой для интеграла* $(A_{11}\varphi)(x)$, $x \in \Gamma$, *причём справедлива следующая оценка:*

$$\max_{p=\overline{1,n}} |(A_{11}\varphi)(x(\tau_p)) - (A_{11}^n\varphi)(x(\tau_p))| \leqslant M\left(\omega(\varphi, 1/n) + \|\varphi\|_\infty \frac{\ln n}{n^\alpha}\right).$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что

$$(A_{11}\varphi)(x(\tau_p)) - (A_{11}^n\varphi)(x(\tau_p)) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Gamma_p} \frac{\partial G_1(x(\tau_p), y)}{\partial \vec{n}(y)} \varphi(y) \, dl_y +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} \int\limits_{\Gamma_j} \left(\frac{\partial G_1(x(\tau_p), y)}{\partial \vec{n}(y)} - \frac{\partial G_1^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial \vec{n}(x(\tau_j))} \right) \varphi(y) \, dl_y +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} \int\limits_{\Gamma_j} \frac{\partial G_1^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial \vec{n}(x(\tau_j))} (\varphi(y) - \varphi(x(\tau_j))) \, dl_y +$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{\partial G_1^n(x(\tau_p),x(\tau_j))}{\partial\vec{n}(x(\tau_j))}\Big(\sqrt{(x_1'(t))^2+(x_2'(t))^2}-\sqrt{(x_1'(\tau_j))^2+(x_2'(\tau_j))^2}\Big)\varphi(x(\tau_j))\,dt.$$

Слагаемые в правой части этого равенства обозначим в порядке их следования через $\delta_1^n(x(\tau_p))$, $\delta_2^n(x(\tau_p))$, $\delta_3^n(x(\tau_p))$ и $\delta_4^n(x(\tau_p))$.

Несложно убедиться, что

$$\frac{\partial G_1(x,y)}{\partial\vec{n}(y)}=\frac{\pi i}{2}\bigg(\frac{\partial J_0(k_1|x-y|)}{\partial\vec{n}(y)}+i\frac{\partial N_0(k_1|x-y|)}{\partial\vec{n}(y)}\bigg),$$

где

$$\frac{\partial J_0(k_1|x-y|)}{\partial\vec{n}(y)}=(y-x,\vec{n}(y))\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m k_1^{2m}|x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1}(m-1)!m!}$$

и

$$\frac{\partial N_0(k_1|x-y|)}{\partial\vec{n}(y)}=\frac{2}{\pi}\bigg(\ln\frac{k_1|x-y|}{2}+C\bigg)\frac{\partial J_0(k_1|x-y|)}{\partial\vec{n}(y)}+\frac{2(y-x,\vec{n}(y))}{\pi|x-y|^2}J_0(k_1|x-y|)+$$

$$+(y-x,\vec{n}(y))\sum_{m=1}^{\infty}\bigg(\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{l}\bigg)\frac{(-1)^{m+1}k_1^{2m}|x-y|^{2m-2}}{2^{2m-1}(m-1)!m!}.$$

Так как (см. [12, с. 403])

$$|(y-x,\vec{n}(y))|\leqslant M|x-y|^{1+\alpha}, \tag{11}$$

то

$$\bigg|\frac{\partial J_0(k_1|x-y|)}{\partial\vec{n}(y)}\bigg|\leqslant M|x-y|^{1+\alpha} \tag{12}$$

и

$$\bigg|\frac{\partial N_0(k_1|x-y|)}{\partial\vec{n}(y)}\bigg|\leqslant M\bigg(|x-y|^{1+\alpha}|\ln|x-y||+\frac{1}{|x-y|^{1-\alpha}}+|x-y|^{1+\alpha}\bigg), \tag{13}$$

а значит,

$$\bigg|\frac{\partial G_1(x,y)}{\partial\vec{n}(y)}\bigg|\leqslant\frac{M}{|x-y|^{1-\alpha}},\quad x,y\in\Gamma,\quad x\neq y. \tag{14}$$

Поэтому, учитывая формулу вычисления криволинейного интеграла, получаем

$$|\delta_1^n(x(\tau_p))|\leqslant M\|\varphi\|_\infty\int\limits_0^{R(n)}\frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}}\leqslant M\|\varphi\|_\infty(R(n))^\alpha.$$

Пусть $y\in\Gamma_j$ и $j\neq p$. В силу леммы и неравенства (11) очевидно, что

$$|(y-x(\tau_p),\vec{n}(y))-(x(\tau_j)-x(\tau_p),\vec{n}(x(\tau_j)))|=$$

$$=|(y-x(\tau_j),\vec{n}(y))|+|(x(\tau_j)-x(\tau_p),\vec{n}(y)-\vec{n}(x(\tau_j)))|\leqslant M|y-x(\tau_p)|(R(n))^\alpha. \tag{15}$$

Тогда, учитывая неравенства (6), будем иметь

$$\bigg|\frac{\partial J_0(k_1|x(\tau_p)-y|)}{\partial\vec{n}(y)}-\frac{\partial J_0(k_1|x(\tau_p)-x(\tau_j)|)}{\partial\vec{n}(x(\tau_j))}\bigg|\leqslant$$

$$\leqslant|(y-x(\tau_p),\vec{n}(y))-(x(\tau_j)-x(\tau_p),\vec{n}(x(\tau_j)))|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|k_1|^{2m}|x(\tau_p)-y|^{2m-2}}{2^{2m-1}(m-1)!m!}+$$

$$+|(x(\tau_j)-x(\tau_p),\vec{n}(x(\tau_j)))|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|k_1|^{2m}||x(\tau_p)-x(\tau_j)|^{2m-2}-|x(\tau_p)-y|^{2m-2}|}{2^{2m-1}(m-1)!m!}\leqslant$$
$$\leqslant M|y-x(\tau_p)|(R(n))^{\alpha}. \qquad (16)$$

Кроме того, вследствие леммы и неравенств (11), (15) и (16) получаем

$$\left|\frac{(y-x(\tau_p),\vec{n}(y))}{|x(\tau_p)-y|^2}-\frac{(x(\tau_j)-x(\tau_p),\vec{n}(x(\tau_j)))}{|x(\tau_p)-x(\tau_j)|^2}\right|\leqslant M\left(\frac{R(n)}{|x(\tau_p)-y|^{2-\alpha}}+\frac{(R(n))^{\alpha}}{|x(\tau_p)-y|}\right).$$

Тогда, принимая во внимание неравенства (3), (7), (12), (13), (15) и (16), нетрудно показать, что

$$\left|\frac{\partial N_0(k_1|x(\tau_p)-y|)}{\partial\vec{n}(y)}-\frac{\partial N_0(k_1|x(\tau_p)-x(\tau_j)|)}{\partial\vec{n}(x(\tau_j))}\right|\leqslant M\left(\frac{R(n)}{|x(\tau_p)-y|^{2-\alpha}}+\frac{(R(n))^{\alpha}}{|x(\tau_p)-y|}\right).$$

В результате находим

$$\left|\frac{\partial G_1(x(\tau_p),y)}{\partial\vec{n}(y)}-\frac{\partial G_1(x(\tau_p),x(\tau_j))}{\partial\vec{n}(x(\tau_j))}\right|\leqslant M\left(\frac{R(n)}{|x(\tau_p)-y|^{2-\alpha}}+\frac{(R(n))^{\alpha}}{|x(\tau_p)-y|}\right).$$

Учитывая неравенство

$$\left|\frac{\partial G_1(x(\tau_p),x(\tau_j))}{\partial\vec{n}(x(\tau_j))}-\frac{\partial G_1^n(x(\tau_p),x(\tau_j))}{\partial\vec{n}(x(\tau_j))}\right|\leqslant\frac{M}{|x(\tau_p)-y|^{1-\alpha}n!}, \qquad (17)$$

заключаем, что

$$\left|\frac{\partial G_1(x(\tau_p),y)}{\partial\vec{n}(y)}-\frac{\partial G_1^n(x(\tau_p),x(\tau_j))}{\partial\vec{n}(x(\tau_j))}\right|\leqslant M\left(\frac{R(n)}{|x(\tau_p)-y|^{2-\alpha}}+\frac{(R(n))^{\alpha}}{|x(\tau_p)-y|}+\frac{1}{|x(\tau_p)-y|^{1-\alpha}n!}\right).$$

В итоге имеем

$$|\delta_2^n(x(\tau_p))|\leqslant M\|\varphi\|_{\infty}\left(R(n)\int\limits_{r(n)}^{\operatorname{diam}L}\frac{d\tau}{\tau^{2-\alpha}}+(R(n))^{\alpha}\int\limits_{r(n)}^{\operatorname{diam}L}\frac{d\tau}{\tau}+\frac{1}{n!}\int\limits_{r(n)}^{\operatorname{diam}L}\frac{d\tau}{\tau^{1-\alpha}}\right)\leqslant$$
$$\leqslant M\|\varphi\|_{\infty}\left((R(n))^{\alpha}|\ln R(n)|+\frac{1}{n!}\right).$$

Пусть $y\in\Gamma_j$ и $j\neq p$. Так как из леммы и неравенств (14) и (17) следует, что

$$\left|\frac{\partial G_1^n(x(\tau_p),x(\tau_j))}{\partial\vec{n}(x(\tau_j))}\right|\leqslant\left|\frac{\partial G_1(x(\tau_p),x(\tau_j))}{\partial\vec{n}(x(\tau_j))}\right|+\left|\frac{\partial G_1(x(\tau_p),x(\tau_j))}{\partial\vec{n}(x(\tau_j))}-\frac{\partial G_1^n(x(\tau_p),x(\tau_j))}{\partial\vec{n}(x(\tau_j))}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{M}{|x(\tau_p)-x(\tau_j)|^{1-\alpha}}+\frac{M}{|x(\tau_p)-y|^{1-\alpha}n!}\leqslant\frac{M}{|x(\tau_p)-y|^{1-\alpha}},\quad n\in\mathbb{N}, \qquad (18)$$

то

$$|\delta_3^n(x(\tau_p))|\leqslant\frac{1}{\pi}\omega(\varphi,R(n))\int\limits_{\Gamma}\left|\frac{\partial G_1^n(x(\tau_p),x(\tau_j))}{\partial\vec{n}(x(\tau_j))}\right|dl_y\leqslant M\omega(\varphi,R(n)).$$

Кроме того, учитывая лемму и неравенства (10) и (18), получаем

$$|\delta_4^n(x(\tau_p))|\leqslant M\|\varphi\|_{\infty}(R(n))^{\alpha}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j}\left|\frac{\partial G_1^n(x(\tau_p),x(\tau_j))}{\partial\vec{n}(x(\tau_j))}\right|dt\leqslant$$

$$\leqslant M\|\varphi\|_\infty (R(n))^\alpha \int\limits_\Gamma \left| \frac{\partial G_1^n(x(\tau_p), x(\tau_j))}{\partial \vec{n}(x(\tau_j))} \right| dl_y \leqslant M\|\varphi\|_\infty (R(n))^\alpha.$$

В результате, суммируя полученные оценки для выражений $\delta_1^n(x(\tau_p))$, $\delta_2^n(x(\tau_p))$, $\delta_3^n(x(\tau_p))$ и $\delta_4^n(x(\tau_p))$ и учитывая отношение $R(n) \sim 1/n$, завершаем доказательство теоремы 2.

Аналогичным образом доказывается справедливость следующих теорем.

Теорема 3. *Пусть* $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ *– простая замкнутая кривая Ляпунова с показателем* $0 < \alpha \leqslant 1$ *и* $\varphi \in C(\Gamma)$. *Тогда выражение*

$$(A_{21}^n \varphi)(x(\tau_p)) = \frac{b-a}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^n K_{21}^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \sqrt{(x_1'(\tau_j))^2 + (x_2'(\tau_j))^2}\, \varphi(x(\tau_j))$$

в опорных точках $x(\tau_p)$, $p = \overline{1,n}$, *является квадратурной формулой для интеграла* $(A_{21}\varphi)(x)$, $x \in \Gamma$, *причём справедлива следующая оценка:*

$$\max_{p=\overline{1,n}} |(A_{21}\varphi)(x(\tau_p)) - (A_{21}^n \varphi)(x(\tau_p))| \leqslant M\left(\omega(\varphi, 1/n) + \|\varphi\|_\infty \frac{\ln n}{n^\alpha}\right).$$

Теорема 4. *Пусть* $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ *– простая замкнутая кривая Ляпунова с показателем* $0 < \alpha \leqslant 1$ *и* $\psi \in C(\Gamma)$. *Тогда выражение*

$$(A_{22}^n \psi)(x(\tau_p)) = \frac{b-a}{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^n K_{22}^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \sqrt{(x_1'(\tau_j))^2 + (x_2'(\tau_j))^2}\, \psi(x(\tau_j))$$

в опорных точках $x(\tau_p)$, $p = \overline{1,n}$, *является квадратурной формулой для интеграла* $(A_{22}\psi)(x)$, $x \in \Gamma$, *причём справедлива следующая оценка:*

$$\max_{p=\overline{1,n}} |(A_{22}\psi)(x(\tau_p)) - (A_{22}^n \psi)(x(\tau_p))| \leqslant M\left(\omega(\psi, 1/n) + \|\psi\|_\infty \frac{\ln n}{n^\alpha}\right).$$

3. Обоснование метода коллокации для системы уравнений (1). Пусть $\mathbb{C}^{2n}$ – пространство $2n$-мерных векторов $z^{2n} = (z_1^{2n}, z_2^{2n}, \ldots, z_{2n}^{2n})^{\text{т}}$, $z_l^{2n} \in \mathbb{C}$, $l = \overline{1,2n}$, с нормой $\|z^{2n}\| = \max_{l=\overline{1,2n}} |z_l^{2n}|$, где запись “ $a^{\text{т}}$ ” означает транспонирование вектора a. Рассмотрим квадратную матрицу $A^{2n} = (a_{pj})_{p,j=1}^{2n}$ порядка $2n$ с элементами

$$a_{pj} = \frac{|\operatorname{sgn}(p-j)|(b-a)}{n} K_{11}^n(x(\tau_p), x(\tau_j)) \sqrt{(x_1'(\tau_j))^2 + (x_2'(\tau_j))^2}$$

при $p = \overline{1,n}$ и $j = \overline{1,n}$;

$$a_{pj} = \frac{|\operatorname{sgn}(p-j+n)|(b-a)}{n} K_{12}^n(x(\tau_p), x(\tau_{j-n})) \sqrt{(x_1'(\tau_{j-n}))^2 + (x_2'(\tau_{j-n}))^2}$$

при $p = \overline{1,n}$ и $j = \overline{n+1,2n}$;

$$a_{pj} = \frac{|\operatorname{sgn}(p-j-n)|(b-a)}{n} K_{21}^n(x(\tau_{p-n}), x(\tau_j)) \sqrt{(x_1'(\tau_j))^2 + (x_2'(\tau_j))^2}$$

при $p = \overline{n+1,2n}$ и $j = \overline{1,n}$;

$$a_{pj} = \frac{|\operatorname{sgn}(p-j)|(b-a)}{n} K_{22}^n(x(\tau_{p-n}), x(\tau_{j-n})) \sqrt{(x_1'(\tau_{j-n}))^2 + (x_2'(\tau_{j-n}))^2}$$

при $p=\overline{n+1,2n}$ и $j=\overline{n+1,2n}$.

Если через z_p^{2n}, $p=\overline{1,n}$, обозначим приближённое значение величины $\varphi(x(\tau_p))$, а через z_{p+n}^{2n}, $p=\overline{1,n}$, – приближённое значение величины $\psi(x(\tau_p))$, то, используя построенные квадратурные формулы для интегралов $(A_{jm}f)(x)$, $x\in\Gamma$, $j,m=1,2$, систему интегральных уравнений (2) заменим системой алгебраических уравнений относительно $z^{2n}\in\mathbb{C}^{2n}$, которую запишем в виде

$$z_p^{2n}+\sum_{j=1}^{2n}a_{pj}z_j^{2n}=0,\quad p=\overline{1,n},$$

$$z_p^{2n}+\sum_{j=1}^{2n}a_{pj}z_j^{2n}=2\frac{\alpha_2}{\delta}u_0(x(\tau_p)),\quad p=\overline{n+1,2n}. \tag{19}$$

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 5. *Пусть функция u_0 непрерывна на кривой Γ. Тогда система уравнений (2) и система уравнений (19) для несобственных частот имеют единственные решения $\rho_*=(\varphi_*,\psi_*)^{\text{т}}\in C(\Gamma)\times C(\Gamma)$ и $w^{2n}\in\mathbb{C}^{2n}$ $(n\geqslant n_0)$ соответственно, причём*

$$\max_{p=\overline{1,n}}|w_p^{2n}-\varphi_*(x(\tau_p))|\leqslant M\bigg(\omega(u_0,1/n)+\frac{\ln n}{n^{\alpha}}\bigg),$$

$$\max_{p=\overline{1,n}}|w_{p+n}^{2n}-\psi_*(x(\tau_p))|\leqslant M\bigg(\omega(u_0,1/n)+\frac{\ln n}{n^{\alpha}}\bigg).$$

Доказательство. Для обоснования метода коллокации воспользуемся теоремой Г.М. Вайникко о сходимости для линейных операторных уравнений (см. [14]). Для этого сначала запишем уравнения (2) и (19) в операторном виде.

Рассмотрим матричный оператор 2-го порядка

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix},$$

определённый в пространстве $C(\Gamma)\times C(\Gamma)$. Тогда систему интегральных уравнений (2) можно записать в виде

$$(I+A)\rho=\chi, \tag{20}$$

где I – единичный оператор на $C(\Gamma)\times C(\Gamma)$, $\rho=(\varphi,\psi)^{\text{т}}$ и $\chi=(0,2\alpha_2u_0/\delta)^{\text{т}}$. Отметим, что пространство $C(\Gamma)\times C(\Gamma)$ является банаховым с нормой

$$\|\rho\|_1=\max\{\|\varphi\|_\infty,\|\psi\|_\infty\}.$$

Очевидно, что систему алгебраических уравнений (19) можно записать в виде

$$(I^{2n}+A^{2n})z^{2n}=\chi^{2n}, \tag{21}$$

где I^{2n} – единичная матрица $2n$-го порядка, $\chi^{2n}=p^{2n}\chi$, а $p^{2n}:C(\Gamma)\times C(\Gamma)\to\mathbb{C}^{2n}$ – линейный ограниченный оператор, определяемый формулой

$$p^{2n}\rho=(\varphi(x(\tau_1)),\varphi(x(\tau_2)),\ldots,\varphi(x(\tau_n)),\psi(x(\tau_1)),\psi(x(\tau_2)),\ldots,\psi(x(\tau_n)))^{\text{т}}.$$

Проверим выполнение условий теоремы 4.2 из [14], используя из этой работы обозначения и необходимые определения и предложения. В работе [2] доказано, что система интегральных уравнений (2) для несобственных частот $k_2\neq k_2^{(s)}=\omega_s\sqrt{\epsilon_2\mu_2}$ $(s=1,2,\ldots)$ имеет единственное решение в пространстве $C(\Gamma)\times C(\Gamma)$ при любых непрерывных правых частях, где $k_2^{(s)}$ – собственные значения внутренней краевой задачи Дирихле

$$\Delta u_2+k_2^2u_2=0\quad\text{в}\quad D_1,$$

$$u_2|_\Gamma = 0.$$

Следовательно, $\mathrm{Ker}\,(I + A) = \{0\}$. Кроме того, операторы $I^{2n} + A^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, фредгольмовы с нулевым индексом. Принимая во внимание способ разбиения кривой Γ на регулярные элементарные части, получаем, что для любого $\rho \in C(\Gamma) \times C(\Gamma)$ справедливы равенства

$$\lim_{n\to\infty} \|p^{2n}\rho\| = \lim_{n\to\infty} \max\{\max_{l=\overline{1,n}} |\varphi(x(\tau_l))|, \max_{l=\overline{1,n}} |\psi(x(\tau_l))|\} =$$

$$= \max\{\max_{x\in\Gamma} |\varphi(x)|, \max_{x\in\Gamma}|\psi(x)|\} = \|\rho\|_1.$$

Поэтому система операторов $P = \{p^{2n}\}$ является связывающей для пространств $C(\Gamma)\times C(\Gamma)$ и $\mathbb{C}^{2n}$. Тогда $\chi^{2n} \overset{P}{\to} \chi$ и, принимая во внимание теоремы 1–4, получаем, что по определению 2.1 из [14] отображение $I^{2n} + A^{2n} \overset{PP}{\to} I + A$. Так как, согласно определению 3.2 из [14], $I^{2n} \to I$ устойчиво, то по предложению 3.5 и по определению 3.3 из [14] осталось проверить условие компактности, которое ввиду предложения 1.1 из [14] равносильно условию: для любой последовательности $\{z^{2n}\}$, $z^{2n} \in \mathbb{C}^{2n}$, $\|z^{2n}\| \leqslant M$, существует относительно компактная последовательность $\{A_{2n}z^{2n}\} \subset C(\Gamma)\times C(\Gamma)$ такая, что

$$\|A^{2n}z^{2n} - p^{2n}(A_{2n}z^{2n})\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В качестве $\{A_{2n}z^{2n}\}$ выберем последовательность

$$(A_{2n}z^{2n})(x) = \left(\sum_{j=1}^{2n} a_j^{(1)}(x) z_j^{2n}, \quad \sum_{j=1}^{2n} a_j^{(2)}(x) z_j^{2n}\right)^{\text{т}},$$

где

$$a_j^{(1)}(x) = \int\limits_{\Gamma_j} K_{11}^n(x,y)\,dl_y \quad \text{и} \quad a_j^{(2)}(x) = \int\limits_{\Gamma_j} K_{21}^n(x,y)\,dl_y, \quad \text{если} \quad j = \overline{1,n}.$$

$$a_j^{(1)}(x) = \int\limits_{\Gamma_{j-n}} K_{12}^n(x,y)\,dl_y \quad \text{и} \quad a_j^{(2)}(x) = \int\limits_{\Gamma_{j-n}} K_{22}^n(x,y)\,dl_y, \quad \text{если} \quad j = \overline{n+1,2n}.$$

Из неравенств (3), (4) и (11) очевидно вытекает, что для любых точек $x, y \in \Gamma$, $x \neq y$, и при каждом $n \in \mathbb{N}$ справедливы следующие оценки:

$$|K_{11}^n(x,y)| \leqslant M\left(|\ln|x-y|| + \frac{1}{|x-y|^{1-\alpha}}\right), \quad |K_{12}^n(x,y)| \leqslant M|\ln|x-y||,$$

$$|K_{2i}^n(x,y)| \leqslant M\left(|\ln|x-y|| + \frac{1}{|x-y|^{1-\alpha}}\right), \quad i = 1,2. \tag{22}$$

Отсюда получаем

$$\left|\sum_{j=1}^{2n} a_j^{(m)}(x) z_j^{2n}\right| \leqslant M\|z^{2n}\|, \quad x \in \Gamma, \quad m = 1,2,$$

т.е.

$$|(A_{2n}z^{2n})(x)| \leqslant M\|z^{2n}\|, \quad x \in \Gamma.$$

Поэтому, принимая во внимание условие $\|z^{2n}\| \leqslant M$, заключаем, что последовательность $\{A_{2n}z^{2n}\}$ равномерно ограниченна.

Теперь возьмём любые точки $x', x'' \in \Gamma$ такие, что $|x' - x''| = h < d/2$. Тогда, рассуждая точно так же, как и в работе [15], несложно показать, что

$$\left|\sum_{j=1}^{2n} a_j^{(k)}(x') z_j^{2n} - \sum_{j=1}^{2n} a_j^{(k)}(x'') z_j^{2n}\right| \leqslant M\|z^{2n}\| h|\ln h|, \quad k = 1,2.$$

Следовательно,

$$|(A_{2n}z^{2n})(x') - (A_{2n}z^{2n})(x'')| \leqslant M\|z^{2n}\||x' - x''||\ln|x' - x''||,$$

а значит, $\{A_{2n}z^{2n}\} \subset C(\Gamma) \times C(\Gamma)$. Отсюда непосредственно вытекает равностепенная непрерывность последовательности $\{A_{2n}z^{2n}\}$. Тогда из теоремы Арцеля следует относительная компактность последовательности $\{A_{2n}z^{2n}\}$. Кроме того, рассуждая точно так же, как и в доказательствах теорем 1 и 2, получаем

$$\|A^{2n}z^{2n} - p^{2n}(A_{2n}z^{2n})\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тогда, применяя теорему 4.2 из работы [14], заключаем, что уравнения (20) и (21) имеют единственные решения $\rho_* = (\varphi_*, \psi_*)^{\text{т}} \in C(\Gamma) \times C(\Gamma)$ и $w^{2n} \in \mathbb{C}^{2n}$ $(n \geqslant n_0)$ соответственно, причём

$$c_1\delta_n \leqslant \|w^{2n} - p^{2n}\rho_*\| \leqslant c_2\delta_n,$$

где

$$c_1 = 1/\sup_{n\geqslant n_0}\|I^{2n} + A^{2n}\| > 0, \quad c_2 = \sup_{n\geqslant n_0}\|(I^{2n} + A^{2n})^{-1}\| < +\infty, \quad \delta_n = \|(I^{2n} + A^{2n})(p^{2n}\rho_*) - \chi^{2n}\|.$$

Принимая во внимание равенство $\chi^{2n} = p^{2n}\chi = p^{2n}\rho_* + p^{2n}(A\rho_*)$ и оценки погрешности построенных квадратурных формул для интегралов $(A_{jm}f)(x)$, $x \in \Gamma$, $j, m = 1, 2$, имеем

$$\delta_n = \|A^{2n}(p^{2n}\rho_*) - p^{2n}(A\rho_*)\| \leqslant M\left(\|\rho_*\|_1\frac{\ln n}{n^\alpha} + \omega(\rho_*, 1/n)\right).$$

Здесь модуль непрерывности вектор-функций ρ_* определяется формулой

$$\omega(\rho_*, h) = \max_{\substack{|x-y|\leqslant h\\ x,y\in\Gamma}}\sqrt{(\varphi_*(x) - \varphi_*(y))^2 + (\psi_*(x) - \psi_*(y))^2}, \quad h > 0.$$

Воспользовавшись оценками (22) при $n \to \infty$ и такими же, как и в работе [16], рассуждениями, нетрудно показать, что

$$|(A_{jm}f)(x') - (A_{jm}f)(x'')| \leqslant M\|f\|_\infty|x' - x''||\ln|x' - x''||, \quad x', x'' \in \Gamma, \quad j, m = 1, 2.$$

Следовательно,

$$|(A\rho_*)(x') - (A\rho_*)(x'')| \leqslant M\|\rho_*\|_1|x' - x''||\ln|x' - x''||, \quad x', x'' \in \Gamma,$$

т.е.

$$\omega(A\rho_*, 1/n) \leqslant M\|\rho_*\|_1\frac{\ln n}{n}.$$

Тогда, принимая во внимание неравенства

$$\omega(\rho_*, 1/n) = \omega(\chi - A\rho_*, 1/n) \leqslant \omega(\chi, 1/n) + \omega(A\rho_*, 1/n) \leqslant \omega(u_0, 1/n) + M\|\rho_*\|_1\frac{\ln n}{n}$$

и

$$\|\rho_*\|_1 \leqslant \|(I + A)^{-1}\|\|\chi\|_1,$$

получаем, что

$$\delta_n \leqslant M\left(\omega(u_0, 1/n) + \frac{\ln n}{n^\alpha}\right).$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кравченко В.Ф., Ерофеенко В.Т.* Дифракция электромагнитных волн на сверхпроводящих тонких цилиндрических оболочках // Докл. РАН. 1994. Т. 337. № 1. С. 25-27
2. *Ерофеенко В.Т., Козловская И.С.* Интегральные уравнения в задачах экранирования электромагнитных полей для цилиндрических тел // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 2. С. 242–247.
3. *Бойков И.В., Тында А.Н.* Приближенное решение нелинейных интегральных уравнений теории развивающихся систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 9. С. 1214–1223.
4. *Булатов М.В.* Численное решение систем интегральных уравнений Вольтерры I рода // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1998. Т. 38. № 4. С. 607–611.
5. *Гиат М., Камуш С., Хеллаф А., Мерчела В.* Об одной системе интегральных уравнений Вольтерры со слабо сингулярным ядром // Итоги науки и техники. Сер. Совр. математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2021. Т. 193. С. 33–44.
6. *Ставцев С.Л.* Итерационный подход к численному решению системы интегральных уравнений для краевых задач скалярного уравнения Гельмгольца // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 9. С. 1282–1290.
7. *Тында А.Н., Сидоров Д.Н., Муфтахов И.Р.* Численный метод решения систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерры I рода с разрывными ядрами // Журн. Средне-Волжск. мат. о-ва. 2018. Т. 20. № 1. С. 55–63.
8. *Халилов Э.Г.* Обоснование метода коллокации для одного класса систем интегральных уравнений // Укр. мат. журн. 2017. Т. 69. № 6. С. 823–835.
9. *Khalilov E.H., Bakhshaliyeva M.N.* Quadrature formulas for simple and double layer logarithmic potentials // Proc. of IMM of NAS of Azerbaijan. 2019. V. 45. № 1. P. 155–162.
10. *Kress R.* Boundary integral equations in time-harmonic acoustic scattering // Math. and Comput. Model. 1991. V. 15. № 3–5. P. 229–243.
11. *Мусхелешвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1962.
12. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1976.
13. *Халилов Э.Г.* Обоснование метода коллокации для одного класса поверхностных интегральных уравнений // Мат. заметки. 2020. Т. 107. № 4. С. 604–622.
14. *Вайникко Г.М.* Регулярная сходимость операторов и приближённое решение уравнений // Итоги науки и техники. Мат. анализ. 1979. Т. 16. С. 5–53.
15. *Бахшалыева М.Н., Халилов Э.Г.* Обоснование метода коллокации для интегрального уравнения внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2021. Т. 61. № 6. С. 936–950.
16. *Халилов Э.Г., Бахшалыева М.Н.* Исследование приближенного решения интегрального уравнения, соответствующего смешанной краевой задаче для уравнения Лапласа // Уфимск. мат. журн. 2021. Т. 13. № 1. С. 86–98.

Азербайджанский государственный университет
нефти и промышленности, г. Баку

Поступила в редакцию 15.10.2021 г.
После доработки 15.10.2021 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.