ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 4, с. 568–572

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.968.72

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПОЛУГРУПП К ИССЛЕДОВАНИЮ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2022 г. В. В. Власов, Н. А. Раутиан

Исследуются абстрактные вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения, которые являются операторными моделями задач теории вязкоупругости. К рассматриваемому классу уравнений относятся также интегро-дифференциальные уравнения Гуртина–Пипкина, описывающие процесс распространения тепла в средах с памятью. Представлены результаты о существовании сильно непрерывной сжимающей полугруппы, порождаемой вольтерровым интегро-дифференциальным уравнением с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве, а также результаты о свойствах генератора указанной полугруппы.

DOI: 10.31857/S0374064122040124, EDN: CAMAOJ

Введение. Настоящая работа посвящена изучению свойств линейных операторов, которые являются генераторами полугрупп, порождаемых абстрактными вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Указанные абстрактные интегро-дифференциальные уравнения могут быть реализованы, в частности, как интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, возникающие в теории вязкоупругости, а также как интегро-дифференциальные уравнения Гуртина–Пипкина, описывающие процесс распространения тепла в средах с памятью.

В настоящее время существует обширная литература, посвящённая исследованию вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений и связанных с ними задач, появляющихся в многочисленных приложениях (см., например, работы [1–5] и приведённую в них библиографию).

1. Определения. Обозначения. Постановка задачи. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, A – самосопряжённый положительный, $A^* = A \geqslant \kappa_0 I$ ($\kappa_0 = \mathrm{const} > 0$), оператор, действующий в пространстве H и имеющий ограниченный обратный. Пусть B – самосопряжённый неотрицательный оператор, действующий в пространстве H, с областью определения $D(B)$ такой, что $D(A) \subseteq D(B)$, удовлетворяющий для любого $x \in \mathrm{Dom}\,(A)$ неравенству $\|Bx\| \leqslant \kappa\|Ax\|$ при некотором $\kappa = \mathrm{const} > 0$, через I обозначаем тождественный оператор в пространстве H.

Рассмотрим следующую задачу для интегро-дифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + (A+B)u(t) - \int\limits_0^t K_1(t-s)Au(s)\,ds - \int\limits_0^t K_2(t-s)Bu(s)\,ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \tag{2}$$

Предположим, что ядра интегральных операторов $K_i(t)$, $i = 1, 2$, имеют следующее представление:

$$K_i(t) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t\tau}\,d\mu_i(\tau), \quad i = 1, 2,$$

где $d\mu_i$ $(i=1,2)$ – положительные меры, которым соответствуют неубывающие непрерывные справа функции распределения μ_i соответственно. Интеграл понимается в смысле Стилтьеса. Будем предполагать, что функции μ_i $(i=1,2)$ представляют собой суммы абсолютно непрерывных функций и функций скачков (ступенчатых функций), сингулярная компонента отсутствует. Кроме того, будем считать, что выполнены условия

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\mu_i(\tau)}{\tau} < 1, \quad i=1,2. \tag{3}$$

Зададим оператор A_0 равенством

$$A_0 := \left(1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau}\right) A + \left(1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_2(\tau)}{\tau}\right) B.$$

Замечание 1. Из свойств операторов A и B и неравенства Гайнца (см. [6, гл. 1, теорема 7.1]) следует, что оператор A_0 является обратимым, операторы $Q_1 := A^{1/2}A_0^{-1/2}$, $Q_2 := B^{1/2}A_0^{-1/2}$ допускают ограниченное замыкание в H, оператор A_0^{-1} ограничен.

Предположим, что вектор-функция $A_0^{1/2}f(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$ и вектор $\varphi_0 \in D(A_0^{3/2})$.

Определение 1. Будем называть вектор-функцию $u(t)$ *классическим решением* задачи (1), (2), если $u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+, H)$, $Au(t), Bu(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$ и $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1) для каждого значения $t \in \mathbb{R}_+$ и начальному условию (2).

Преобразование Лапласа $\hat{u}(\lambda)$ решения $u(t)$ задачи (1), (2) с начальными условиями $u(+0)=0$, $u^{(1)}(+0)=0$ имеет следующее представление: $\hat{u}(\lambda) = L^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda)$, в котором $\hat{f}$ – преобразование Лапласа функции f, а оператор-функция $L(\lambda)$ является символом уравнения (1) и задаётся равенством

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + A + B - \hat{K}_1(\lambda)A - \hat{K}_2(\lambda)B,$$

здесь $\hat{K}_i(\lambda)$ $(i=1,2)$ – преобразование Лапласа ядра $K_i(t)$ $(i=1,2)$, имеющее, очевидно, вид

$$\hat{K}_i(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_i(\tau)}{\lambda+\tau}, \quad i=1,2.$$

Через Ω_k $(i=1,2)$ обозначим пространства $L^2_{\mu_k}(\mathbb{R}_+, H)$ вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+$ со значениями в H, снабжённые соответственно нормами

$$||u||_{\Omega_k} = \left(\int_0^{+\infty} ||u(s)||_H^2 d\mu_k(s)\right)^{1/2}.$$

Пространства Ω_k $(k=1,2)$ являются сепарабельными гильбертовыми (см., например, [7, с. 142]).

Замечание 2. Формально элементы $\xi(s)$ пространства Ω_k достаточно определить только на подмножестве $\bigcup_{k=1}^2 \operatorname{supp} d\mu_k \subset \mathbb{R}_+$.

2. Абстрактная задача Коши в расширенном функциональном пространстве. Рассмотрим сильно непрерывную мультипликативную полугруппу $L_k(t)$ в пространстве Ω_k (см. [8, с. 65]): $L_k(t)\xi(\tau) = e^{t\tau}\xi(\tau)$, $\xi(\tau) \in \Omega_k$, $t \geqslant 0$, $\tau \in \operatorname{supp}\mu_k$. Известно, что линейный оператор $\mathbb{T}_k\xi(\tau) = \tau\xi(\tau)$ в пространстве Ω_k с областью определения $D(T_k) := \{\xi \in \Omega_k : \tau\xi(\tau) \in \Omega_k\}$ является генератором полугруппы $L_k(t)$ (см. [8, с. 65]).

Определим взаимно сопряжённые операторы $\mathbb{B}_k : H \to \Omega_k$ и $\mathbb{B}_k^* : \Omega_k \to H$ равенствами

$$\mathbb{B}_k v = \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k v, \quad \mathbb{B}_k^* \xi(\tau) = Q_k^* \int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi(\tau) d\mu_k(\tau), \quad \tau \in \operatorname{supp} d\mu_k, \quad k = 1, 2.$$

Введём гильбертово пространство $\mathbb{H} = H \bigoplus H \bigoplus \big(\bigoplus_{k=1}^2 \Omega_k \big)$, снабжённое нормой

$$\|(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau))\|_{\mathbb{H}}^2 = ||v||_H^2 + ||\xi_0||_H^2 + \sum_{k=1}^2 ||\xi_k(\tau)||_{\Omega_k}^2, \quad \tau \in \bigcup_{k=1}^2 \operatorname{supp} d\mu_k.$$

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{H}$ линейный оператор $\mathbb{A}$ с областью определения

$$D(\mathbb{A}) = \left\{ (v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \in \mathbb{H} : v \in H_{1/2}, \ \ \xi_0 + \sum_{k=1}^2 \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \in H_{1/2}, \ \ \xi_k(\tau) \in D(T_k), \ \ k = 1, 2 \right\},$$

действующий следующим образом:

$$\mathbb{A}(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau))^{\mathrm{т}} = \left(-A_0^{1/2} \left[\xi_0 + \sum_{k=1}^2 \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \right], \ A_0^{1/2} v, \ \mathbb{B}_k A_0^{1/2} v - \mathbb{T}_k \xi_k(\tau), \ k = 1, 2 \right)^{\mathrm{т}}.$$

В работе [9] показано, что при выполнении условий (3) оператор $\mathbb{A}$ в пространстве $\mathbb{H}$ с плотной областью определения $D(\mathbb{A})$ является максимально диссипативным и, следовательно, представляет собой генератор сжимающей C_0-полугруппы $S(t) = e^{t\mathbb{A}}$ в пространстве $\mathbb{H}$.

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \mathbb{A} Z(t) + F(t), \quad t > 0, \quad Z(0) = Z_0. \tag{4}$$

В работе [9] доказана теорема о существовании и единственности классического решения $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \xi_2(t, \tau))$ задачи (4) в предположениях, что вектор-функция $F(t)$ имеет вид $F(t) := (f_1(t), 0, 0, 0)$, где $f_1(t) = f(t) - (M_1(t)A + M_2(t)B)\varphi_0$ и $M_k(t) :=$ $:= \int_0^{+\infty} e^{-t\tau} \tau^{-1} d\mu_k(\tau)$, $k = 1, 2$, вектор Z_0 имеет вид $Z_0 = (\varphi_1, A_0^{1/2} \varphi_0, 0, 0)$. Установлено также, что при указанных предположениях $v(t) = u'(t)$, $\xi_0(t) = A_0^{1/2} u(t)$, где $u(t)$ – классическое решение задачи (1), (2). Кроме того, получена оценка нормы решения задачи (4) в пространстве $\mathbb{H}$ и оценка энергетической нормы решения задачи (1), (2) в пространстве H.

3. Свойства оператор-функции $L(\lambda)$ и оператора $\mathbb{A}$.

Определение 2. Множество значений $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *резольвентным множеством* $R(L)$ оператор-функции $L(\lambda)$, если для любого $\lambda \in R(L)$ оператор-функция $L^{-1}(\lambda)$ существует и ограничена. Множество $\sigma(L) = \mathbb{C} \backslash R(L)$ называется *спектром* оператор-функции $L(\lambda)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (3) и* $\operatorname{supp} d\mu_k \subset (d, +\infty)$, *где* $d > 0$ $(k = 1, 2)$. *Тогда спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *и спектр оператора* $\mathbb{A}$ *лежат в открытой левой полуплоскости* $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$. *При этом невещественный спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *совпадает с невещественным спектром оператора* $\mathbb{A}$, *симметричен относительно вещественной оси и состоит из изолированных точек конечной алгебраической кратности, не имеющих конечных точек накопления.*

Доказательство теоремы 1 содержится в статье [10]. Условия (3) являются существенными для устойчивости задачи решения (1), (2).

Перейдём теперь к уточнению локализации спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в левой полуплоскости в случае, когда носитель меры $d\mu_k(\tau)$ $(k = 1, 2)$ принадлежит полуоси $[d_1, +\infty)$, $0 < d_1 < +\infty$. Рассмотрим уравнения

$$\tau \hat{K}_1(x) + (1 - \tau) \hat{K}_2(x) = 1, \tag{5}$$

$$\tau\hat{K}_1(x) + (1-\tau)\hat{K}_2(x) = 1 + x^2/\omega^2. \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (3) и носители мер* $d\mu_k(\tau)$ $(k=1,2)$ *принадлежат полуоси* $[d_1,+\infty)$, $0<d_1<+\infty$. *Тогда множество вещественных корней уравнения (6) принадлежит спектру оператор-функции* $L(\lambda)$, *причём вещественный корень* $x_1(\tau)\in(-d_1,0)$ *уравнения (6), если он существует, удовлетворяет неравенству* $x_1(\tau)<x_0(\tau)<\tilde{x}_0<0$, *где* $\tilde{x}_0 := \max\{x_0(\tau'),x_0(\tau'')\}$, *а* $x_0(\tau)$ *– вещественный корень уравнения (5), лежащий в интервале* $(-d_1,0)$, $\tau' := \|(A+B)^{1/2}A^{-1/2}\|^{-2}$, $\tau'' := \|A^{1/2}(A+B)^{-1/2}\|^2$. *Если носители мер* $d\mu_k(\tau)$ $(k=1,2)$ *принадлежат отрезку* $[d_1,d_2]$, $0<d_1<d_2+\infty$, *то уравнения (5) и (6) не имеют корней на полуинтервале* $(-\infty,-d_2]$.

Уточним локализацию невещественной части спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в случае, когда мера $d\mu_k(\tau)$ имеет компактный носитель.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (3) и носители мер* $d\mu_k(\tau)$ $(k=1,2)$ *принадлежат отрезку* $[d_1,d_2]$, $0<d_1<d_2<+\infty$. *Тогда невещественная часть спектра оператор-функции* $L(\lambda)$ *принадлежит полосе* $\Omega := \{\lambda\in\mathbb{C} : \alpha_1 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \alpha_2\}$, *где*

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}\sup_{||f||=1}\left[\frac{K_1(0)(Af,f)+K_2(0)(Bf,f)}{((A+B)f,f)}\right], \quad f\in D(A), \tag{7}$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2}\inf_{||f||=1}\left[\int_{d_1}^{d_2}\frac{(Af,f)d\mu_1(\tau)}{((A+B)f,f)+\tau^2} + \int_{d_1}^{d_2}\frac{(Bf,f)d\mu_2(\tau)}{((A+B)f,f)+\tau^2}\right], \quad f\in D(A). \tag{8}$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия (3) и носители мер* $d\mu_k(\tau)$ $(k=1,2)$ *принадлежат отрезку* $[d_1,d_2]$, $0<d_1<+\infty$. *Тогда существует такое* $\varepsilon_1>0$, *что для всех* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$ *оператор функция* $(\lambda\mathbb{A}^{-1}-\mathbb{I})^{-1}$ *ограничена в области* $\Gamma_\varepsilon = \{\lambda\in\mathbb{C} : |\lambda|\geqslant\varepsilon^{-1}, |\arg\lambda\pm\pi/2|\geqslant\varepsilon\}$.

Доказательство теорем 2–4 содержится в статье [11].

Пусть носители мер $d\mu_k(\tau)$ $(k=1,2)$ принадлежат отрезку $[d_1,d_2]$, $0<d_1<d_2<+\infty$. Тогда на основании теоремы 1, а также представлений (23) и (35) из статьи [9] заключаем, что вещественная часть спектра оператора $\mathbb{A}$ принадлежит множеству $[-d_2,\tilde{x}_0)$. Кроме того, из теоремы 2 следует существование такого числа $\delta>0$, что внутри контура $\Gamma = \{x+iy\in\mathbb{C} : x\in[-d_2-\delta,\tilde{x}_0+\delta],\ y=\pm\delta\}$ нет невещественных точек спектра оператора $\mathbb{A}$.

Обозначим через $\mathbb{Q}$ проектор Рисса $\mathbb{Q} = -1/(2\pi i)\int_\Gamma(\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I})^{-1}d\lambda$. Рассмотрим подпространства $\mathbb{H}_1 := \mathbb{Q}\mathbb{H}$ и $\mathbb{H}_2 := (\mathbb{I}-\mathbb{Q})\mathbb{H}$. Заметим, что подпространство $\mathbb{H}_1$ отвечает вещественной части, а подпространство $\mathbb{H}_2$ – невещественной части спектра оператора $\mathbb{A}$.

Обозначим $s_j(A_0^{-1/2})$ $(j=1,2,\ldots)$ – собственные значения самосопряжённого компактного положительного оператора $(A_0^{-1/2})$, упорядоченные по убыванию, с учётом кратности.

Теорема 5 (о полноте). *Пусть выполнены условия (3), носители мер* $d\mu_k(\tau)$ $(k=1,2)$ *принадлежат отрезку* $[d_1,d_2]$, $0<d_1<d_2<+\infty$, *и для некоторого* $p>0$ *выполнено соотношение*

$$\lim_{j\to+\infty}(j s_j^p(A_0^{-1/2})) = 0. \tag{9}$$

Тогда система собственных и присоединённых векторов оператора $\mathbb{A}$, *отвечающих собственным значениям, принадлежащим множеству* $\Omega := \{\lambda\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R} : \alpha_1\leqslant\operatorname{Re}\lambda\leqslant\alpha_2\}$, *где* α_1 *и* α_2 *определяются формулами (7), (8), является полной в подпространстве* $\mathbb{H}_2$.

Доказательство теоремы 5 содержится в статье [10].

4. Представление решений. Представим начальный вектор Z_0 задачи (4) в виде $Z_0 = Z_{01}+Z_{02}$, где $Z_{0k}\in\mathbb{H}_k$, $k=0,1$. Напомним, что подпространство $\mathbb{H}_1$ отвечает вещественной части, а подпространство $\mathbb{H}_2$ – невещественной части спектра оператора $\mathbb{A}$. Обозначим $\mathbb{Q}_1 := \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_2 := \mathbb{I}-\mathbb{Q}$, $\mathbb{A}_k := \mathbb{Q}_k\mathbb{A}\mathbb{Q}_k$, $k=1,2$, – сужение оператора $\mathbb{A}$ на подпространство $\mathbb{H}_k$, которое является диссипативным оператором. Согласно теореме 5 система корневых векторов оператора $\mathbb{A}_2$ полна в пространстве $\mathbb{H}_2$. Следовательно, при любом $\varepsilon>0$ каждый вектор $Z_{02} \in \mathbb{H}_2$ можно приблизить, с точностью до слагаемого $Z_{0\varepsilon}$ $(\|Z_{0\varepsilon}\|_{\mathbb{H}} < \varepsilon)$, линейной комбинацией корневых векторов $\xi_{njs} \in \mathbb{H}_2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N(\varepsilon)$, $j = \overline{1, j_n}$, $s = \overline{0, s_{n_j}}$, оператора $\mathbb{A}_2$, соответствующих невещественным собственным значениям λ_n $(\lambda_{-n} = \bar{\lambda}_n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N(\varepsilon)$. В указанных обозначениях решение $Z(t)$ задачи (4) при $F(t) \equiv 0$ представимо в виде $Z(t) = Z_1(t) + Z_2(t)$, где $Z_k(t) \in \mathbb{H}_k$, $k = 1, 2$, $Z_k(t) = e^{t\mathbb{A}_k} Z_{0k} = e^{t\mathbb{A}_k} \mathbb{Q}_k Z_0$, $t > 0$.

Теорема 6 (представление решений). *Пусть выполнены условия (3), носители мер* $d\mu_k(\tau)$ $(k = 1, 2)$ *принадлежат отрезку* $[d_1, d_2]$, $0 < d_1 < d_2 < +\infty$, *и при некотором* $p > 0$ *выполнено соотношение (9). Тогда решение* $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t,\tau), \xi_2(t,\tau)) \in \mathbb{H}$ *задачи Коши (4) при* $F(t) \equiv 0$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *представимо в следующем виде:*

$$Z(t) = e^{t\mathbb{A}_1} Z_{01} + \sum_{n=-N(\varepsilon)}^{N(\varepsilon)} \sum_{j=1}^{j_n} \sum_{s=0}^{s_{n_j}} c_{njs} \left(\frac{t^s}{s!} \xi_{nj0} + \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} \xi_{nj1} + \ldots + t\xi_{nj(s-1)} + \xi_{njs} \right) e^{\lambda_n t} + e^{t\mathbb{A}_2} Z_{0\varepsilon},$$

где $\|Z_{0\varepsilon}\|_{\mathbb{H}} < \varepsilon$, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ $(\lambda_{-n} = \bar{\lambda}_n)$ – *невещественные собственные значения оператора* $\mathbb{A}$, *которые принадлежат полосе* $\Omega := \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha_1 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \alpha_2\}$ *с величинами* α_i $(i = 1, 2)$, *определяемыми формулами (7), (8),* $(\xi_{nj0}, \xi_{nj1}, \ldots, \xi_{njs})$ – *цепочки собственных и присоединённых векторов оператора* $\mathbb{A}$, *соответствующих собственному значению* λ_n, s_{n_j} – *максимальная длина производной цепочки, отвечающей вектору* ξ_{nj0}, $\sum_{j=1}^{j_n} s_{n_j} = p_n$ – *алгебраическая кратность собственного значения* λ_n, *вектор-функции* $e^{t\mathbb{A}_1} Z_{01}$ *и* $e^{t\mathbb{A}_2} Z_{0\varepsilon}$ *для любого* $\varepsilon > 0$ *и любого сколь угодно малого* $\delta > 0$ *удовлетворяют неравенствам* $\|e^{t\mathbb{A}_1} Z_{01}\|_{\mathbb{H}_1} \leqslant C(\delta)\|Z_{01}\|_{\mathbb{H}_1} e^{(\tilde{x}_0+\delta)t}$ *и* $\|e^{t\mathbb{A}_2} Z_{0\varepsilon}\|_{\mathbb{H}_2} < \|Z_{0\varepsilon}\|_{\mathbb{H}_2} < \varepsilon$, $t \geqslant 0$, *с константой* $C(\delta)$, *не зависящей от вектора* Z_{01}. *Кроме того, вектор-функция* $u(t) = \int_0^t v(s)\,ds + \varphi_0$ *является решением задачи (1), (2).*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-01-00288 А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М., 1970.
2. *Christensen R.M.* Theory of Viscoelasticity. An Introduction. New York; London, 1971.
3. *Amendola G., Fabrizio M., Golden J.M.* Thermodynamics of Materials with Memory. Theory and Applications. New; York; Dordrecht; Heidelberg; London, 2012.
4. *Gurtin M.E., Pipkin A.C.* General theory of heat conduction with finite wave speed // Arch. Rat. Mech. Anal. 1968. V. 31. P. 113–126.
5. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М., 2016.
6. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах, М., 1967.
7. *Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я.* Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. М., 1961.
8. *Engel K.J., Nagel R.* One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. New York, 2000.
9. *Раутиан Н.А.* О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 9. С. 1255–1272.
10. *Rautian N.A.* On the properties of the generators of semigroups associated with Volterra integro-differential equations // Differ. Equat. 2021. V. 57. № 12. P. 1652–1664.
11. *Rautian N.A.* Studying Volterra integro-differential equations by methods of the theory of operator semigroups // Differ. Equat. 2021. V. 57. № 12. P. 1665–1684.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 20.03.2022 г.
После доработки 20.03.2022 г.
Принята к публикации 21.04.2022 г.