ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 5, с. 575–590

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.983.51

О СВЯЗИ РЕШЕНИЙ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА–ПУАССОНА–ДАРБУ С ДРОБНЫМИ СТЕПЕНЯМИ ОПЕРАТОРНОГО КОЭФФИЦИЕНТА УРАВНЕНИЯ

© 2022 г. А. В. Глушак

Рассмотрена неполная начальная задача для абстрактного сингулярного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу. Установлено, что при ослаблении требований на операторный коэффициент рассматриваемого уравнения для построения решений следует использовать дробные степени этого операторного коэффициента. Показано также, что дробная степень операторного коэффициента связывает условие Дирихле и весовое условие Неймана в случае граничной задачи для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу.

DOI: 10.31857/S0374064122050016, EDN: CAMOUB

Введение. Пусть A – замкнутый оператор в банаховом пространстве E с плотной в E областью определения $D(A)$. Рассмотрим уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу (ЭПД)

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t), \quad t > 0, \quad k > 0. \tag{1}$$

Как следует из результатов работ [1–3], корректная постановка начальных условий для уравнения ЭПД (1) состоит в задании в точке $t = 0$ начальных условий

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0, \tag{2}$$

при этом если $k \geqslant 1$, то начальное условие $u'(0) = 0$ выполнено автоматически, т.е. снимается, что характерно для ряда уравнений с особенностью в коэффициентах при $t = 0$.

Задача (1), (2) при $k = 0$ равномерно корректна только тогда, когда оператор A – генератор косинус-оператор-функции $C(t; A)$. (По поводу терминологии см. обзорную работу [4].) Что касается абстрактного уравнения ЭПД (1), то оно встречалось ранее в [5; 6, гл. 1; 7] при различных предположениях об операторе A. В работах автора [1, 2] приведены необходимые и достаточные условия на оператор A, обеспечивающие корректную разрешимость задачи (1), (2). В работе [2] они сформулированы в терминах оценки нормы резольвенты $R(\lambda, A)$ оператора A и её весовых производных, а в [1] – в терминах дробной степени резольвенты и её обычных производных. Множество операторов A, при которых задача (1), (2) равномерно корректна, обозначим через G_k, а разрешающий оператор этой задачи – через $Y_k(t; A)$ и назовём его операторной функцией Бесселя (ОФБ). ОФБ $Y_k(t; A)$ имеет (см. [1, 2]) экспоненциальный тип при $t \to \infty$ и для неё справедлива оценка

$$\|Y_k(t; A)\| \leqslant \Upsilon e^{\omega t}, \tag{3}$$

где $\Upsilon \geqslant 1$, $\omega \geqslant 0$ – вещественные числа.

Если $0 < k < 1$, то корректна также и более общая, чем в (2), постановка начальных условий, а именно:

$$u(0) = u_0, \quad \lim_{t\to 0} t^k u'(t) = u_1. \tag{4}$$

ОФБ $Y_k(t)$ может быть использована и при решении весовой задачи Коши (1), (4) для уравнения ЭПД. При $u_0, u_1 \in D(A)$ и $A \in G_k \subset G_{2-k}$ единственное решение задачи Коши (1), (4) имеет вид (см. [8])

$$u(t) = Y_k(t; A)u_0 + \frac{t^{1-k}}{1-k} Y_{2-k}(t; A)u_1.$$

Если оператор $A \in G_k$ и $k \geqslant 1$, то задача (1), (4) корректной не является и, как указано ранее, следует рассматривать задачу (1), (2). Отметим, что исследование корректной разрешимости весовой задачи Коши проведено автором в работе [9]. Естественно возникает вопрос: а можно ли ослабить условия на класс операторов A так, чтобы была разрешима некоторая другая начальная задача для уравнения ЭПД? Ответ на него будет дан в следующем пункте работы.

1. Неполная задача Коши. В работе [10] введена в рассмотрение операторная функция Макдональда, которая позволяет определить решение уравнения (1), стремящееся к нулю при $t \to \infty$, и рассмотреть случай так называемой неполной задачи Коши, когда второе начальное условие при $t = 0$ не задаётся именно за счёт стремления решения к нулю при $t \to \infty$. При этом, как установлено, вид первого начального условия зависит от входящего в уравнение (1) параметра $k > 0$. Ранее неполная задача Коши для абстрактного волнового уравнения (случай $k = 0$ в уравнении (1)) изучалась в работах [11–16].

Указанное стремление решения к нулю обеспечивается видом оператора A. Будем предполагать, что $A = B^2$, где B – генератор C_0-полугруппы $T(t; B)$, допускающей оценку

$$\|T(t; B)\| \leqslant \Upsilon e^{-\omega t}, \tag{5}$$

$\Upsilon \geqslant 1$, $\omega > 0$ – вещественные числа.

С оператором A такого вида задача Коши для уравнения (1) с начальными условиями вида (2) корректной не является, поскольку, вообще говоря, в этом случае $A = B^2 \notin G_k$.

Пример 1. Примером удовлетворяющей оценке (5) полугруппы является полугруппа

$$T(t; B)u_0(x) = e^{-t}u_0(x + t),$$

допускающая оценку $\|T(t; B)\| \leqslant e^{-t}$ в банаховом пространстве $BU(\mathbb{R})$ ограниченных равномерно непрерывных на $\mathbb{R}$ функций с sup-нормой и генератором

$$Bu_0(x) = u_0'(x) - u_0(x).$$

Отметим также, что множество генераторов C_0-полугрупп, удовлетворяющих неравенству (5), вместе с каждым оператором B содержит также и дробные степени $B_\alpha = -(-B)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, этого оператора (подробнее о функциях от оператора и, в частности, о дробных степенях см. [17, гл. 4, § 14; 18, с. 358; 19, гл. 1, § 5; 20, с. 96]). Действительно, полугруппа, порождённая оператором B_α, имеет вид (см. [18, с. 357–363])

$$T(t; B_\alpha) = \int\limits_0^\infty f_{t,\alpha}(s)T(s; B)\,ds = \int\limits_0^\infty f_{1,\alpha}(s)T(st^{1/\alpha}; B)\,ds,$$

где неотрицательная функция $f_{t,\alpha}(s)$ определена равенством

$$f_{t,\alpha}(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp(sz - tz^\alpha)\,dz, & s \geqslant 0, \\ 0, & s < 0, \end{cases}$$

$\sigma > 0$, $t > 0$, $0 < \alpha < 1$, и ветвь функции z^α выбрана так, что $\operatorname{Re} z^\alpha > 0$ при $\operatorname{Re} z > 0$. Функция $f_{t,\alpha}(s)$ при $s > 0$ может быть выражена через функцию типа Райта [21, гл. 1] $f_{t,\alpha}(s) = s^{-1}e^{1,0}_{1,\alpha}(-ts^{-\alpha})$, где

$$e^{\mu,\delta}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \mu)\Gamma(\delta - \beta k)}, \quad \alpha > \max\{0; \beta\}, \quad \mu, z \in \mathbb{C},$$

$\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

Учитывая оценку (5) и равенство (см. формулу (2.2.37) в [21, с. 79])

$$\int\limits_0^\infty s^{-1}e_{1,\alpha}^{1,0}(-s^{-\alpha})\exp(-\omega s t^{1/\alpha})\,ds = \exp(-\omega^\alpha t),$$

оценим $\|T(t;B_\alpha)\|$. Будем иметь

$$\|T(t;B_\alpha)\| \leqslant \Upsilon \int\limits_0^\infty s^{-1}e_{1,\alpha}^{1,0}(-s^{-\alpha})\exp(-\omega s t^{1/\alpha})\,ds = \Upsilon\exp(-\omega^\alpha t),$$

следовательно, полугруппа $T(t;B_\alpha)$ удовлетворяет требуемому неравенству вида (5).

Следуя [10], введём в рассмотрение операторную функцию, которая может быть записана и в терминах оператора Эрдейи–Кобера $\mathcal{K}_{\eta,\alpha}$ (см., например, [22, раздел 18.1, формулы (18.3), (18.8)]), в виде

$$M_k(t;B)v_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)}\int\limits_1^\infty (s^2-1)^{k/2-1}T(ts;B)v_0\,ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathcal{K}_{1/2-k/2,k/2}T(t;B)v_0, \quad v_0\in E. \tag{6}$$

Сходимость интеграла в выражении (6) обеспечена условием $k>0$ и оценкой (5).

Если $B\in\mathbb{R}$, $B<0$, то $T(t;B)=e^{Bt}$ и (см. [23, интеграл 2.3.5.4])

$$M_k(t;B) = (-Bt/2)^{1/2-k/2}K_{k/2-1/2}(-Bt), \tag{7}$$

где $K_\nu(\cdot)$ – функция Макдональда. Поэтому операторная функция $M_k(t;B)$ была названа операторной функцией Макдональда (ОФМ).

Из неравенства (5) и представления (7) вытекает оценка

$$\|M_k(t;B)\| \leqslant \Upsilon t^{1/2-k/2}K_{k/2-1/2}(\omega t), \quad \Upsilon\geqslant 1, \quad \omega>0,$$

и стремление функции $M_k(t;B)v_0$, $v_0\in E$, к нулю при $t\to\infty$, т.е. равенство

$$\lim_{t\to\infty}\|M_k(t;B)v_0\| = 0. \tag{8}$$

Функция $M_k(t;B)v_0$, $v_0\in D(A)$, удовлетворяет уравнению (1). Использовав обозначение $M_k'(t;B)v_0 = (M_k(t;B)v_0)'$, вычислим производные этой функции. Имеем

$$M_k'(t;B)v_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)}\int\limits_1^\infty s(s^2-1)^{k/2-1}T(ts;B)Bv_0\,ds = \frac{\sqrt{\pi}}{k\Gamma(k/2)}\int\limits_1^\infty \frac{d}{ds}(s^2-1)^{k/2}T(ts;B)Bv_0\,ds =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{k\Gamma(k/2)}\left((s^2-1)^{k/2}T(ts;B)Bv_0|_1^\infty - t\int\limits_1^\infty (s^2-1)^{k/2}T(ts;B)B^2v_0\,ds\right) =$$

$$= -\frac{t\sqrt{\pi}}{k\Gamma(k/2)}\int\limits_1^\infty (s^2-1)^{k/2}T(ts;B)Av_0\,ds,$$

$$M_k''(t;B)v_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)}\int\limits_1^\infty s^2(s^2-1)^{k/2-1}T(ts;B)Av_0\,ds.$$

Подставив найденные производные в левую часть уравнения (1), получим

$$M_k''(t;B)v_0 + \frac{k}{t}M_k'(t;B)v_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)}\int\limits_1^\infty (s^2(s^2-1)^{k/2-1} - (s^2-1)^{k/2})T(ts;B)Av_0\,ds =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)}\int\limits_1^\infty (s^2-1)^{k/2-1}T(ts;B)Av_0\,ds = AM_k(t;B)v_0, \tag{9}$$

и, следовательно, функция $M_k(t;B)v_0$, $v_0 \in D(A)$, удовлетворяет уравнению (1).

Для введённой ОФМ $M_k(t;B)$, определяющей решение уравнения (1), справедлива формула сдвига решения по параметру. Ранее аналогичная формула, причём только в сторону увеличения индекса для ОФБ $Y_k(t;A)$, была установлена в работах [1, 2] и в более общем виде в [24]. В следующей теореме покажем, что одна из формул сдвига связана с дробными степенями входящего в уравнение (1) генератора полугруппы B.

Теорема 1. *Пусть $0 < k < m$, $0 < p < k$, оператор A представим в виде $A = B^2$, где B – генератор C_0-полугруппы $T(t;B)$, допускающей оценку (5). Тогда и в сторону увеличения, и в сторону уменьшения индекса справедливы формулы сдвига по параметру:*

$$M_m(t;B)v_0 = \frac{2}{\Gamma(m/2-k/2)}\int\limits_1^\infty s^k(s^2-1)^{m/2-k/2-1}M_k(ts;B)v_0\,ds, \quad v_0 \in E, \tag{10}$$

$$M_p(t;B)v_0 = \frac{2^{p-k+1}(-tB)^{k-p}}{\Gamma(k/2-p/2)}\int\limits_1^\infty s(s^2-1)^{k/2-p/2-1}M_k(ts;B)v_0\,ds, \quad v_0 \in D((-B)^{k-p+2}). \tag{11}$$

Доказательство. Формула (10) сдвига решения по параметру с точки зрения дробного исчисления является следствием известной формулы композиции для операторов Эрдейи–Кобера (см. [22, раздел 18.1, формулы (18.3), (18.8), (18.16)]), которая имеет вид

$$\mathcal{K}_{\eta,\alpha}\mathcal{K}_{\eta+\alpha,\beta}u(t) = \mathcal{K}_{\eta,\alpha+\beta}u(t). \tag{12}$$

Действительно, положив в (12) значения

$$\alpha = \frac{m-k}{2}, \quad \beta = \frac{k}{2}, \quad \eta = \frac{1-m}{2},$$

получим формулу (10). Отметим также, что непосредственная проверка этой формулы приводится в работе [10].

Чтобы вывести формулу сдвига (11) из формулы (12) для композиции при

$$\alpha = \frac{p-k}{2} < 0, \quad \beta = \frac{k}{2}, \quad \eta = \frac{1-p}{2},$$

следует осуществить и мотивировать операцию весового дифференцирования, которая скрыта в операторе $\mathcal{K}_{\eta,\alpha}$ при $\alpha < 0$. Проще проверить справедливость этой формулы непосредственно, не используя формулу (12) для композиции.

При доказательстве формулы (11) сдвига решения в сторону уменьшения индекса будет использовано известное представление полугруппы $T(t;B)$ с помощью резольвенты $R(\lambda;B) = (\lambda I - B)^{-1}$ оператора B, которое на элементах $v_0 \in D(B^2)$ при $-\omega < \sigma < 0$ имеет вид (см., например, [19, с. 48])

$$T(t;B)v_0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda;B)v_0\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}\frac{R(\lambda;B)B^2v_0}{\lambda^2}\,d\lambda. \tag{13}$$

Последний интеграл в равенстве (13) сходится абсолютно и равномерно по $t \geqslant 0$, что обеспечивает законность изменения порядка интегрирования в последующих выкладках.

Учитывая представление (13) и интегралы 2.3.5.4 из [23] и 2.16.3.8 из [25], после элементарных преобразований получаем

$$\frac{2^{p-k+1}(-tB)^{k-p}}{\Gamma(k/2-p/2)}\int\limits_1^\infty s(s^2-1)^{k/2-p/2-1}M_k(ts;B)v_0\,ds=$$

$$=\frac{2^{p-k+1}\sqrt{\pi}(-tB)^{k-p}}{\Gamma(k/2)\Gamma(k/2-p/2)}\int\limits_1^\infty s(s^2-1)^{k/2-p/2-1}\int\limits_1^\infty(\tau^2-1)^{k/2-1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{\lambda ts\tau}\frac{R(\lambda;B)B^2v_0}{\lambda^2}\,d\lambda\,d\tau\,ds=$$

$$=\frac{2^{p-k+1}\sqrt{\pi}(-tB)^{k-p}}{\Gamma(k/2)\Gamma(k/2-p/2)}\int\limits_1^\infty s(s^2-1)^{k/2-p/2-1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{R(\lambda;B)B^2v_0}{\lambda^2}\int\limits_1^\infty(\tau^2-1)^{k/2-1}e^{\lambda ts\tau}\,d\tau\,d\lambda\,ds=$$

$$=\frac{t^{(k+1)/2-p}(-B)^{k-p}}{2^{k/2-1/2-p}\Gamma(k/2-p/2)}\int\limits_1^\infty s^{3/2-k/2}(s^2-1)^{k/2-p/2-1}\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}(-\lambda)^{1/2-k/2}K_{k/2-1/2}(-\lambda ts)R(\lambda;B)v_0\,d\lambda\,ds=\frac{t^{k/2+1/2-p}(-B)^{k-p}}{2^{k/2-1/2-p}\Gamma(k/2-p/2)}\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}(-\lambda)^{-3/2-k/2}R(\lambda;B)^2v_0\int\limits_1^\infty s^{3/2-k/2}(s^2-1)^{k/2-p/2-1}K_{k/2-1/2}(-\lambda ts)\,ds\,d\lambda=$$

$$=\frac{t^{1/2-p/2}(-B)^{k-p}}{2^{1/2-p/2}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}(-\lambda)^{p/2-3/2-k}K_{p/2-1/2}(-t\lambda)R(\lambda;B)B^2v_0\,d\lambda=$$

$$=\frac{(-B)^{k-p}}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}(-\lambda)^{p-k-2}\left(\frac{-t\lambda}{2}\right)^{1/2-p/2}K_{p/2-1/2}(-\lambda t)R(\lambda;B)B^2v_0\,d\lambda=$$

$$=(-B)^{k-p}(-B)^{p-k-2}M_p(t;B)B^2v_0=M_p(t;B)v_0.$$

Последние равенства записаны по определению функции от оператора (см. [19, с. 136]) на основании скалярного равенства (7). Таким образом, формула сдвига (11) также установлена.

Следует отметить, что оператор в правой части (11) содержит композицию неограниченного оператора B^{k-p} при $k>p$ и интегрального, поэтому, также как и оператор Эрдейи–Кобера $K_{\eta,\alpha}$ при $\alpha<0$, является по сути интегро-дифференциальным оператором. Теорема доказана.

Теперь укажем, какому начальному условию при $t=0$ удовлетворяет ОФМ $M_k(t;B)$.

Если $0<k<1$, $v_0\in E$, то после очевидных преобразований получим

$$\lim_{t\to0}M_k(t;B)v_0=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)}\lim_{t\to0}\int\limits_1^\infty(s^2-1)^{k/2-1}T(ts;B)v_0\,ds=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)}\int\limits_1^\infty(s^2-1)^{k/2-1}\,ds,$$

$$v_0=\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)}\frac{\Gamma(k/2)\Gamma(1/2-k/2)}{2\Gamma(1/2)}v_0=\frac{1}{2}\Gamma(1/2-k/2)v_0. \tag{14}$$

Установим далее, что ОФМ может быть использована при решении неполной задачи Коши для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу. Нас будет интересовать решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0) = u_0, \quad \lim_{t\to\infty} \|u(t)\| = \lim_{t\to\infty} \|u'(t)\| = \lim_{t\to\infty} \|u''(t)\| = 0. \tag{15}$$

В следующей теореме покажем, что в отличие от корректной задачи (1), (4) при $0 < k < 1$ производная решения задачи (1), (15) связана с дробной степенью входящего в уравнение (1) генератора полугруппы B.

Теорема 2. *Пусть $0 < k < 1$, оператор A представим в виде $A = B^2$, где B – генератор C_0-полугруппы $T(t;B)$, допускающей оценку (5), и $u_0 \in D(A)$. Тогда функция*

$$u(t) = \frac{2}{\Gamma(1/2 - k/2)} M_k(t;B)u_0 = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)\Gamma(1/2 - k/2)} \int\limits_1^\infty (s^2 - 1)^{k/2-1} T(ts;B)u_0\, ds \tag{16}$$

является единственным решением неполной задачи Коши (1), (15) и, кроме того, удовлетворяет содержащему дробную степень оператора $(-B)^{1-k}$ начальному условию вида

$$\lim_{t\to 0} t^k u'(t) = -\frac{2^k \Gamma(k/2 + 1/2)}{\Gamma(1/2 - k/2)} (-B)^{1-k} u_0, \quad u_0 \in D(A^2). \tag{17}$$

Доказательство. Из соотношений (8), (9), (14) следует, что определяемая равенством (16) функция $u(t)$ является решением уравнения (1), удовлетворяющим условиям (15). Осталось доказать единственность этого решения. Заметим, что для этого достаточно двух условий, содержащихся в (15), а именно:

$$u(0) = u_0, \quad \lim_{t\to\infty} \|u(t)\| = 0.$$

Доказательство единственности решения задачи (1), (15) проведём методом от противного. Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – два решения этой задачи. Рассмотрим функцию двух переменных

$$w(t,s) = f(M_k(s;B)(u_1(t) - u_2(t))),$$

здесь $f \in E^*$ (E^* – сопряжённое пространство к E), $M_k(s;B)$ – ОФМ, где $t, s \geqslant 0$. Она, очевидно, удовлетворяет уравнению и условиям

$$\frac{\partial^2 w(t,s)}{\partial t^2} + \frac{k}{t}\frac{\partial w(t,s)}{\partial t} = \frac{\partial^2 w(t,s)}{\partial s^2} + \frac{k}{s}\frac{\partial w(t,s)}{\partial s}, \quad t, s > 0, \tag{18}$$

$$w(0,s) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} w(t,s) = \lim_{s\to\infty} w(t,s) = 0. \tag{19}$$

Интерпретируем функцию $w(t,s)$ как обобщённую функцию и по переменной s применим I-преобразование.

Для скалярных экспоненциально убывающих при $s \to +\infty$ функций I-преобразование определяется равенством

$$\hat{w}(t,\lambda) = \int\limits_0^\infty \sqrt{\lambda s} I_p(\lambda s) w(t,s)\, ds,$$

где $p = (k-1)/2$, $I_p(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя. Распространение этого преобразования на обобщённые функции изложено в [26; 27, с. 63], при этом основные функции также являются экспоненциально убывающими при $s \to +\infty$ функциями, что и обеспечивает корректное определение I-преобразования обобщённой функции $w(t,s)$.

Из условий (18), (19) для образа $\hat{w}(t,\lambda)$ в пространстве регулярных обобщённых функций получим следующую задачу:

$$\frac{\partial^2\hat{w}(t,\lambda)}{\partial t^2}+\frac{k}{t}\frac{\partial\hat{w}(t,\lambda)}{\partial t}=\lambda^2\hat{w}(t,\lambda),\quad t>0, \tag{20}$$

$$\hat{w}(0,\lambda)=0,\quad \lim_{t\to\infty}\hat{w}(t,\lambda)=0. \tag{21}$$

Общее решение уравнения (20) имеет вид

$$\hat{w}(t,\lambda)=t^{(1-k)/2}(d_1(\lambda)I_{(k-1)/2}(\lambda t)+d_2(\lambda)K_{(k-1)/2}(\lambda t)).$$

Из второго условия в (21) получаем $d_1(\lambda)=0$, а из первого условия в (21) следует, что $d_2(\lambda)=0$. Поэтому $\hat{w}(t,\lambda)=w(t,s)=0$ для любого $s\geqslant 0$. В силу произвольности функционала $f\in E^*$ при $s=0$ получим равенство $u_1(t)\equiv u_2(t)$, и единственность решения задачи (1), (15) установлена.

Докажем справедливость равенства (17). Ранее было установлено, что

$$M_k'(t;B)u_0=-\frac{t\sqrt{\pi}}{k\Gamma(k/2)}\int\limits_1^\infty(s^2-1)^{k/2}T(ts;B)Au_0\,ds. \tag{22}$$

Учитывая представление (13) полугруппы $T(t;B)$ с помощью резольвенты $R(\lambda;B)$, равенство (22) после изменения порядка интегрирования запишем в виде

$$t^kM_k'(t;B)u_0=-\frac{t^{k+1}\sqrt{\pi}}{k\Gamma(k/2)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{R(\lambda;B)}{\lambda^2}A^2u_0\int\limits_1^\infty(s^2-1)^{k/2}e^{\lambda ts}\,ds\,d\lambda=$$

$$=-\frac{2^{k/2-1/2}t^{k/2+1/2}}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}(-\lambda)^{-k/2-5/2}K_{k/2+1/2}(-\lambda t)R(\lambda;B)A^2u_0\,d\lambda,\quad u_0\in D(A^2). \tag{23}$$

При преобразованиях был использован интеграл 2.3.5.4 из работы [23].

В равенстве (23) перейдём к пределу при $t\to 0$. Поскольку в области $K_\nu(z)\neq 0$, $\nu>0$, $\operatorname{Re}z>0$ асимптотика функции Макдональда при $z\to 0$ имеет вид (см. [28, с. 173])

$$K_\nu(z)\sim 2^{\nu-1}\Gamma(\nu)z^{-\nu}, \tag{24}$$

то по определению дробной степени оператора $-B$ будем иметь

$$\lim_{t\to 0}t^kM_k'(t)u_0=-\frac{2^{k-1}\Gamma(k/2+1/2)}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}(-\lambda)^{-k-3}R(\lambda;B)A^2u_0\,d\lambda=$$

$$=-2^{k-1}\Gamma(k/2+1/2)(-B)^{-k-3}A^2u_0=-2^{k-1}\Gamma(k/2+1/2)(-B)^{1-k}u_0.$$

Следовательно, определяемая равенством (16) функция $u(t)$ удовлетворяет предельному соотношению (17), которое можно также рассматривать и как представление положительной дробной степени оператора B, и как соотношение, связывающее начальные условия, накладываемые на функцию и её производную. Теорема доказана.

Пример 2. В условиях примера 1, согласно теореме 2, при $0<k<1$ для решения задачи (1), (15), его производной и дробной степени оператора B справедливы представления

$$u(t,x)=\frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)\Gamma((1-k)/2)}\int\limits_1^\infty(s^2-1)^{k/2-1}e^{-ts}u_0(x+ts)\,ds,$$

$$u_t'(t,x) = \frac{2\sqrt{\pi}t^{-k}}{\Gamma(k/2)\Gamma((1-k)/2)} \int\limits_t^\infty \tau(\tau^2-t^2)^{k/2-1}e^{-\tau}(u_0'(x+\tau)-u_0(x+\tau))\,d\tau,$$

$$(-B)^{1-k}u_0(x) = -\frac{1}{\Gamma(k)} \int\limits_0^\infty \tau^{k-1}e^{-\tau}(u_0'(x+\tau)-u_0(x+\tau))\,d\tau.$$

Если же параметр $k \geqslant 1$, то ОФМ $M_k(t;B)$ имеет особенность при $t=0$ (см., например, представление (7)). Поскольку при $k=1$ у ОФМ $M_k(t;B)$ имеется логарифмическая особенность, а при $k>1$ – степенная, то в этом случае удобно задавать весовое начальное условие не для функции, а для производной. Тогда имеем

$$\lim_{t\to 0} t^k M_k'(t;B)v_0 = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{\pi}t^k}{\Gamma(k/2)} \int\limits_1^\infty s(s^2-1)^{k/2-1}T(ts;B)Bv_0\,ds =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)} \lim_{t\to 0} \int\limits_t^\infty \tau(\tau^2-t^2)^{k/2-1}T(\tau;B)Bv_0\,d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)} \int\limits_0^\infty \tau^{k-1}T(\tau;B)Bv_0\,d\tau =$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(k)}{\Gamma(k/2)}(-B)^{-k}(-B)v_0 = -\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(k)}{\Gamma(k/2)}(-B)^{1-k}v_0, \quad v_0 \in D(A). \tag{25}$$

Теорема 3. *Пусть $k \geqslant 1$, оператор A представим в виде $A = B^2$, где B – генератор C_0-полугруппы $T(t;B)$, допускающей оценку (5), и $u_1 \in D((-B)^{k+1})$. Тогда функция*

$$u(t) = -\frac{\Gamma(k/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(k)} M_k(t;B)(-B)^{k-1}u_1 = -\frac{1}{\Gamma(k)} \int\limits_1^\infty (s^2-1)^{k/2-1}T(ts;B)(-B)^{k-1}u_1\,ds$$

является единственным решением уравнения (1), удовлетворяющим условиям вида

$$\lim_{t\to 0} t^k u'(t) = u_1, \quad \lim_{t\to\infty} \|u(t)\| = \lim_{t\to\infty} \|u'(t)\| = \lim_{t\to\infty} \|u''(t)\| = 0. \tag{26}$$

Требуемое утверждение о разрешимости следует из соотношений (8), (9) и (25), а единственность решения устанавливается аналогично доказательству теоремы 2.

Покажем далее, что вместо весового начального условия в (26) при некотором $\alpha > k-1$ можно задавать нелокальное интегральное условие вида

$$\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}M_k(t;B)v_0\,dt = u_2. \tag{27}$$

Интегральные условия, схожие с условием (27), встречались ранее в ряде работ (см., например, [29, 30]).

Элементарные вычисления позволяют интеграл в левой части (27) записать в виде

$$\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}M_k(t;B)v_0\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)} \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} \int\limits_1^\infty (s^2-1)^{k/2-1}T(ts;B)v_0\,ds\,dt =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)} \int\limits_0^\infty t^{\alpha-k} \int\limits_t^\infty (\tau^2-t^2)^{k/2-1}T(\tau;B)v_0\,d\tau\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k/2)} \int\limits_0^\infty T(\tau;B)v_0 \int\limits_0^\tau t^{\alpha-k}(\tau^2-t^2)^{k/2-1}\,dt\,d\tau =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma((\alpha-k+1)/2)}{\Gamma((\alpha+1)/2)} \int\limits_0^\infty \tau^{\alpha-1}T(\tau;B)v_0\,d\tau = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha)\Gamma((\alpha-k+1)/2)}{\Gamma((\alpha+1)/2)}(-B)^{-\alpha}v_0. \tag{28}$$

Теорема 4. *Пусть* $k \geqslant 1$, $\alpha > k-1$, *оператор* A *имеет вид* $A = B^2$, *где* B *– генератор* C_0*-полугруппы* $T(t;B)$, *допускающей оценку (5), и* $u_2 \in D((-B)^{\alpha+2})$. *Тогда функция*

$$u(t) = \frac{\Gamma((\alpha+1)/2)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha)\Gamma((\alpha-k+1)/2)} M_k(t;B)(-B)^{-\alpha}u_2 =$$

$$= \frac{\Gamma((\alpha+1)/2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma((\alpha-k+1)/2)\Gamma(k)} \int\limits_1^\infty (s^2-1)^{k/2-1} T(ts;B)(-B)^{\alpha}u_2\,ds$$

является единственным решением уравнения (1), удовлетворяющим условиям вида

$$\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}u(t)\,dt = u_2, \quad \lim_{t\to\infty}\|u(t)\| = \lim_{t\to\infty}\|u'(t)\| = \lim_{t\to\infty}\|u''(t)\| = 0.$$

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущих теорем, требуемое утверждение о разрешимости следует из соотношений (8), (9) и (28).

Единственность решения устанавливается аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 2, при этом условия (21) для уравнения (20) следует заменить на условия

$$\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}\hat{w}(t,\lambda)\,dt = 0, \quad \lim_{t\to\infty}\hat{w}(t,\lambda) = 0.$$

Теорема доказана.

2. Задача Дирихле. Переходим далее к рассмотрению эллиптического случая для уравнения ЭПД и покажем, что решение задачи Дирихле удовлетворяет также и содержащему дробную степень операторного коэффициента весовому условию Неймана.

Под задачей Дирихле на полуограниченном интервале $t \in (0,\infty)$ будем понимать задачу об отыскании ограниченного решения уравнения

$$w''(t) + \frac{m}{t}w'(t) = -Bw(t), \quad m \in \mathbb{R}, \tag{29}$$

удовлетворяющего граничному условию Дирихле

$$w(0) = w_0, \quad w_0 \in D(B). \tag{30}$$

Сформулируем в удобном для дальнейшего изложения виде теорему о разрешимости рассматриваемой задачи Дирихле, которая фактически установлена в работе [31].

Теорема 5. *Пусть* $m < 1$ *и оператор* B *является генератором равномерно ограниченной* C_0*-полугруппы* $T(t;B)$. *Тогда функция*

$$w(t) = \frac{t^{1-m}}{2^{1-m}\Gamma(1/2-m/2)} \int\limits_0^\infty \tau^{m/2-3/2}\exp\left(-\frac{t^2}{4\tau}\right)T(\tau;B)w_0\,d\tau \tag{31}$$

является единственным решением задачи Дирихле (29), (30).

Покажем, что дробная степень входящего в уравнение (29) оператора B связывает условие Дирихле и весовое условие Неймана, накладываемые на определяемое равенством (31) решение задачи Дирихле. При этом, как и в работе [19, с. 151], вначале вместо оператора B следует рассмотреть оператор $B_\varepsilon = B + \varepsilon I$, $\varepsilon > 0$. Оператор B_ε является генератором уже убывающей полугруппы $T_\varepsilon(t;B_\varepsilon)$, т.е. полугруппы, для которой справедлива оценка

$$\|T_\varepsilon(t;B_\varepsilon)\| \leqslant \Upsilon e^{-\omega t}, \quad \Upsilon \geqslant 1, \quad \omega = \varepsilon > 0. \tag{32}$$

Затем в установленном для оператора B_ε равенстве перейдём к пределу при $\varepsilon \to 0$ и получим соответствующее утверждение уже для оператора B. В целях упрощения обозначений далее будем считать, что C_0-полугруппа $T(t;B)$ удовлетворяет оценке (32).

Заменив переменную интегрирования в определяемой равенством (31) функции $w(t)$, запишем представление

$$w(t) = \frac{1}{\Gamma(1/2-m/2)} \int\limits_0^\infty s^{m/2-3/2} \exp\left(-\frac{1}{s}\right) T\left(\frac{st^2}{4}; B\right) w_0\, ds$$

и вычислим производную. После обратной замены получим

$$w'(t) = \frac{1}{\Gamma(1/2-m/2)} \int\limits_0^\infty s^{m/2-3/2} \exp\left(-\frac{1}{s}\right) \frac{st}{2} T\left(\frac{st^2}{4}; B\right) w_0\, ds =$$

$$= \frac{2^m}{\Gamma(1/2-m/2)t^m} \int\limits_0^\infty \tau^{m/2-1/2} \exp\left(-\frac{t^2}{4\tau}\right) T(\tau;B) B w_0\, ds. \tag{33}$$

Отметим, что сходимость на бесконечности интеграла в равенстве (33) обеспечена оценкой (32). Учитывая представление (13) полугруппы $T(\tau;B)$ с помощью резольвенты $R(\lambda;B)$, равенство (33) для $\operatorname{Re}\lambda = \sigma < 0$ и $w_0 \in D(B^3)$ после изменения порядка интегрирования запишем в виде

$$w'(t) = \frac{2^m}{\Gamma(1/2-m/2)t^m} \int\limits_0^\infty \tau^{m/2-1/2} \exp\left(-\frac{t^2}{4\tau}\right) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda\tau} \frac{R(\lambda;B)}{\lambda^2} B^3 w_0\, d\lambda\, d\tau =$$

$$= \frac{2^m}{\Gamma(1/2-m/2)t^m} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{R(\lambda;B)}{\lambda^2} B^3 w_0 \int\limits_0^\infty \tau^{m/2-1/2} \exp\left(\lambda\tau - \frac{t^2}{4\tau}\right) ds\, d\lambda. \tag{34}$$

Использовав интеграл 2.3.16.1 работы [23], равенство (34) запишем в виде

$$t^m w'(t) = \frac{(2t)^{m/2+1/2}}{\Gamma(1/2-m/2)} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (-\lambda)^{-m/4-9/4} K_{m/2+1/2}((-\lambda)^{1/2}t) R(\lambda;B) B^3 w_0\, d\lambda. \tag{35}$$

В равенстве (35) перейдём к пределу при $t \to +0$. Поскольку в области $\operatorname{Re} z > 0$, $K_\nu(z) \neq 0$ асимптотика функции Макдональда при $z \to 0$ имеет вид (24), то по определению дробной степени оператора B для $-1 < m < 1$ будем иметь

$$\lim_{t\to 0} t^m w'(t) = \frac{2^m \Gamma(1/2+m/2)}{\Gamma(1/2-m/2)} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (-\lambda)^{-m/2-5/2} R(\lambda;B) B^3 w_0\, d\lambda =$$

$$= \frac{2^m \Gamma(1/2+m/2)}{\Gamma(1/2-m/2)} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mu^{-m/2-5/2} R(-\mu;B)(-B)^3 w_0\, d\mu =$$

$$= \frac{2^m \Gamma(1/2+m/2)}{\Gamma(1/2-m/2)} (-B)^{-m/2-5/2} (-B)^3 w_0 = c(m)(-B)^{1/2-m/2} w_0,$$

где

$$c(m) = \frac{2^m \Gamma(m/2+1/2)}{\Gamma(1/2-m/2)}, \quad 0 < 1/2 - m/2 < 1.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 6. *Пусть оператор B является генератором равномерно ограниченной C_0-полугруппы $T(t;B)$, $w_0 \in D(B^3)$ и $-1 < m < 1$. Тогда определяемая равенством (31) функция $w(t)$, являющаяся единственным решением задачи Дирихле (29), (30), удовлетворяет содержащему дробную степень оператора B весовому условию Неймана вида*

$$\lim_{t\to 0} t^m w'(t) = c(m)(-B)^{1/2-m/2} w_0, \quad c(m) = \frac{2^m \Gamma(m/2+1/2)}{\Gamma(1/2-m/2)}. \tag{36}$$

Пример 3. Если оператор B является генератором равномерно ограниченной C_0-полугруппы, то оператор $B_\alpha = -(-B)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, также будет генератором такой же полугруппы (см. [19, гл. 1, § 5; 18, с. 358]), и в силу теоремы 6 для решения $w(t)$ задачи Дирихле (29), (30) с оператором B_α при $-1 < m < 1$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t\to 0} t^m w'(t) = c(m)(-B)^{\alpha(1-m)/2} w_0.$$

Если же оператор $\tilde{B}$ – генератор равномерно ограниченной аналитической в правой полуплоскости полугруппы, то оператор $\tilde{B}_n = (-1)^{n+1}\tilde{B}^n$, $n \in \mathbb{R}$, по теореме Паке [32] порождает такую же полугруппу, поэтому для решения $w(t)$ задачи Дирихле (29), (30) с оператором $\tilde{B}_n$ при $-1 < m < 1$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{t\to 0} t^m w'(t) = c(m)(-\tilde{B})^{n(1-m)/2} w_0.$$

В частности, в качестве операторов B и $\tilde{B}$ можно взять оператор $A \in G_k$, $k > 0$, если он удовлетворяет оценке (3) с постоянной ω, равной нулю (см. [1, 2]).

Пример 4. Для того чтобы привести ещё один конкретный пример, возьмём пространство $E = L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, или пространство $E = BU(\mathbb{R})$, а также генератор B и полугруппу $T(t,B)$ следующего вида (см. [18, с. 369; 20, с. 96]):

$$B = \frac{d^2}{dx^2}, \quad T(t,B)w_0(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4t}\right) w_0(s)\, ds.$$

Установлено, что оператор $B_{1/2} = -(-B)^{1/2}$ является генератором равномерно ограниченной полугруппы и соответственно имеет вид

$$B_{1/2} w_0(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{w_0(x-s) - w_0(x)}{s^2+h^2} ds, \quad T(t,B_{1/2})w_0(x) = \frac{t}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{w_0(s)}{t^2+(x-s)^2} ds.$$

Тогда по теореме 6 функция

$$w(t,x) = \frac{t^{1-m}}{2^{1-m}\pi\Gamma(1/2-m/2)} \int\limits_0^\infty \tau^{m/2-1/2} \exp\left(-\frac{t^2}{4\tau}\right) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{w_0(s)\, ds}{\tau^2+(x-s)^2}\, d\tau$$

будет ограниченным решением псевдодифференциального уравнения (оператор $B_{1/2}$ не является оператором дифференцирования d/dx)

$$\frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial t^2} + \frac{m}{t}\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} = -B_{1/2} w(t,x), \quad t > 0,$$

удовлетворяющим условиям Дирихле и Неймана

$$w(0,x) = w_0(x), \quad w_0(x) \in D(B) = E \bigcap H^2(\mathbb{R}),$$

$$\lim_{t\to 0} t^m \frac{\partial w(t,x)}{\partial t} = c(m)(-B_{1/2})^{1/2-m/2} w_0(x) =$$

$$= c(m)((-B)^{1/2})^{1/2-m/2} w_0(x) = c(m)(-B)^{1/4-m/4} w_0(x), \quad -1 < m < 1.$$

В следующей теореме установим свойство, аналогичное теореме 6, которым обладает решение задачи Дирихле для уравнения

$$w''(t) + \frac{m}{t} w'(t) - b_2^2 w(t) = -Aw(t), \quad b_2 \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \tag{37}$$

имеющего более общей вид, чем уравнение (29). При этом будем предполагать, что $A \in G_k$, $k > 0$, а соответствующая ОФБ $Y_k(t;A)$ имеет экспоненциальный тип при $t \to \infty$ и для неё справедлива оценка (3). Как установлено в работе [33], выполняется и $A - b_1^2 \in G_k$, $b_1 \in \mathbb{R}$, т.е. задача Коши с условием (2) для уравнения

$$u''(t) + \frac{k}{t} u'(t) + b_1^2 u(t) = Au(t), \quad b_1 \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

является корректной и для $Y_k(t; A - b_1^2)$ также справедлива оценка вида (3).

Введём следующие обозначения:

$$k > 0, \quad b := \sqrt{b_2^2 - b_1^2} > \omega, \quad q := 1 + \frac{k-m}{2}, \quad c(b,k,m) := \frac{b^q}{2^{q-2}\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(1/2-m/2)}.$$

Теорема 7. *Пусть оператор* $A \in G_k$, $w_0 \in D(A)$, $b > \omega$ *и* $-1 < m < 1$. *Тогда функция*

$$w(t) = c(b,k,m) t^q \int_0^\infty \tau^k (1+\tau^2)^{-q/2} K_q(bt\sqrt{1+\tau^2}) Y_k(t\tau; A - b_1^2 I) w_0 \, d\tau \tag{38}$$

является единственным ограниченным решением задачи Дирихле (37), (30) и удовлетворяет содержащему дробную степень оператора $b_2^2 I - A$ *весовому условию Неймана вида*

$$\lim_{t\to 0} t^m w'(t) = \frac{2^m \Gamma(m/2+1/2)}{\Gamma(1/2-m/2)} (b_2^2 I - A)^{1/2-m/2} w_0 -$$

$$- \frac{2^m b^2 \Gamma(m/2+1/2)}{\Gamma(1/2-m/2)} (b_2^2 I - A)^{-1/2-m/2} w_0 - 2^m b^{2-2m} (b_2^2 I - A)^{m/2-1/2} w_0, \quad w_0 \in D(A^2). \tag{39}$$

Доказательство. Тот факт, что определяемая равенством (38) функция $w(t)$ является единственным решением задачи Дирихле (37), (30), установлен в работе [31], и нам остаётся доказать справедливость предельного соотношения (39). Учитывая следующие формулы для производных функции Макдональда $K_q(z)$ и ОФБ $Y_k(t;A)$ (см. [1]):

$$(z^q K_q(z))' = -z^q K_{q-1}(z), \quad (Y_k(t;A) w_0)' = \frac{t}{k+1} Y_{k+2}(t;A) A w_0,$$

вычислим $w'(t)$. В результате получим

$$w'(t) = -bc(b,k,m) t^q \int_0^\infty \tau^k (1+\tau^2)^{1/2-q/2} K_{q-1}(bt\sqrt{1+\tau^2}) Y_k(t\tau; A - b_1^2 I) w_0 \, d\tau +$$

$$+\frac{c(b,k,m)}{k+1}t^{q+1}\int\limits_0^\infty \tau^{k+2}(1+\tau^2)^{-q/2}K_q(bt\sqrt{1+\tau^2})Y_{k+2}(t\tau;A-b_1^2I)(A-b_1^2I)w_0\,d\tau. \qquad (40)$$

Использовав схему доказательства теоремы 6 и интегральные представления функции Макдональда $K_q(z)$ (см. [28, с. 153]) и ОФБ $Y_k(t;A)w_0$, $w_0\in D(A^2)$ (см. [2]), преобразуем равенство (40) к виду

$$K_q(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^q\int\limits_0^\infty s^{-q-1}\exp\left(-s-\frac{z^2}{4s}\right)ds,$$

$$Y_k(t;A)w_0=\frac{2^{k/2-1/2}\Gamma(k/2+1/2)}{i\pi}t^{1/2-k/2}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\lambda^{3/2-k/2}I_{k/2-1/2}(t\lambda)R(\lambda^2;A)w_0\,d\lambda,\quad \sigma>\omega.$$

После элементарных преобразований будем иметь

$$w'(t)=-\frac{2^{k/2-1/2-q}b^qc(b,k,m)\Gamma(k/2+1/2)}{i\pi}t^{2q-1/2-k/2}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\lambda^{3/2-k/2}R(\lambda^2;A-b_1^2I)w_0\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty s^{-q}\exp\left(-s-\frac{b^2t^2}{4s}\right)\int\limits_0^\infty \tau^{k/2+1/2}\exp\left(-\frac{b^2t^2}{4s}\tau^2\right)I_{k/2-1/2}(t\tau\lambda)\,d\tau\,ds\,d\lambda+$$

$$+\frac{2^{k/2-1/2-q}b^qc(b,k,m)\Gamma(k/2+3/2)}{i\pi(k+1)}t^{2q+1/2-k/2}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\lambda^{1/2-k/2}R(\lambda^2;A-b_1^2I)(A-b_1^2I)w_0\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty s^{-q-1}\exp\left(-s-\frac{b^2t^2}{4s}\right)\int\limits_0^\infty \tau^{k/2+3/2}\exp\left(-\frac{b^2t^2}{4s}\tau^2\right)I_{k/2+1/2}(t\tau\lambda)\,d\tau\,ds\,d\lambda.$$

Вычислим внутренние интегралы в полученном равенстве, использовав формулы 2.15.5.4 из работы [25] и 2.3.16.1 из [23]. В результате получим

$$w'(t)=-\frac{2^{k/2+m/2}b^{-k/2-m/2}c(b,k,m)\Gamma(k/2+1/2)}{2\pi i}t^{-m}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\lambda R(\lambda^2;A-b_1^2I)w_0\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty s^{-m/2-1/2}\exp\left(-s\left(1-\frac{\lambda^2}{b^2}\right)-\frac{b^2t^2}{4s}\right)ds\,d\lambda+$$

$$+\frac{2^{k/2+m/2+1}b^{-k/2-m/2-2}c(b,k,m)\Gamma(k/2+3/2)}{2\pi i(k+1)}t^{-m}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\lambda R(\lambda^2;A-b_1^2I)(A-b_1^2I)w_0\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty s^{m/2-1/2}\exp\left(-s\left(1-\frac{\lambda^2}{b^2}\right)-\frac{b^2t^2}{4s}\right)ds\,d\lambda=$$

$$=-\frac{2^{m+k/2+1/2}b^{-k/2-3m/2+1}c(b,k,m)\Gamma(k/2+1/2)}{2\pi i}t^{-3m/2+1/2}\times$$

$$\times \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda(b^2-\lambda^2)^{m/4-1/4} K_{1/2-m/2}(t\sqrt{b^2-\lambda^2}) R(\lambda^2; A-b_1^2 I) w_0\, d\lambda +$$

$$+ \frac{2^{m+k/2+3/2} b^{-k/2+m/2-1} c(b,k,m)\Gamma(k/2+3/2)}{2\pi i(k+1)} t^{-m/2+1/2} \times$$

$$\times \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda(b^2-\lambda^2)^{-m/4-1/4} K_{m/2+1/2}(t\sqrt{b^2-\lambda^2}) R(\lambda^2; A-b_1^2 I)(A-b_1^2 I) w_0\, d\lambda. \tag{41}$$

После умножения равенства (41) на t^m перейдём к пределу при $t \to +0$. Поскольку в области $\operatorname{Re} z > 0$, $K_\nu(z) \neq 0$ асимптотика функции Макдональда при $z \to 0$ имеет вид (24), то для значений $-1 < m < 1$ будем иметь

$$\lim_{t\to 0} t^m w'(t) = -\frac{2^{m+k/2} b^{-k/2-3m/2+1} c(b,k,m)\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(1/2-m/2)}{2\pi i} \times$$

$$\times \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda(b^2-\lambda^2)^{m/2-1/2} R(\lambda^2; A-b_1^2 I) w_0\, d\lambda +$$

$$+ \frac{2^{k/2+m/2} b^{-k/2+m/2-1} c(b,k,m)\Gamma(k/2+1/2)\Gamma(m/1+1/2)}{2\pi i} \times$$

$$\times \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda(b^2-\lambda^2)^{-m/2-1/2} R(\lambda^2; A-b_1^2 I)(A-b_1^2 I) w_0\, d\lambda. \tag{42}$$

Пусть γ – парабола, образ проходимой снизу вверх прямой $\operatorname{Re}\lambda = \sigma$ при отображении $\mu = \lambda^2$. По определению функции от оператора $(A-b_1^2 I)$ (см. [19, с. 136]) получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda(b^2-\lambda^2)^{m/2-1/2} R(\lambda^2; A-b_1^2 I) w_0\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} (b^2-\mu)^{m/2-1/2} R(\mu; A-b_1^2 I) w_0\, d\mu = -\frac{1}{2}(b^2 I - (A-b_1^2 I))^{m/2-1/2} w_0 =$$

$$= -\frac{1}{2}(b_2^2 I - A)^{m/2-1/2} w_0 \tag{43}$$

и аналогично

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \lambda(b^2-\lambda^2)^{-m/2-1/2} R(\lambda^2; A-b_1^2 I)(A-b_1^2 I) w_0\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} (b^2-\mu)^{-m/2-1/2} R(\mu; A-b_1^2 I)(A-b_1^2 I) w_0\, d\mu =$$

$$= \frac{1}{2}(b_2^2 I - A)^{-m/2-1/2}((b_2^2-b^2)I - A) w_0 =$$

$$= \frac{1}{2}(b_2^2 I - A)^{1/2-m/2} - \frac{1}{2} b^2 (b_2^2 I - A)^{-m/2-1/2} w_0. \tag{44}$$

Из равенств (42)–(44) и вытекает справедливость требуемого соотношения (39). Отметим также, что если оператор A такой, что в соотношении (39) можно перейти к пределу при $b \to 0$, то оно превратится в равенство (36) из теоремы 6. Теорема доказана.

В заключение отметим, что в частном случае, когда оператор $A \in G_k$ и для ОФБ $Y_k(t; A)$ справедливо неравенство (3) с постоянной $\omega = 0$, соответствующие результаты о связи решения задачи Дирихле с дробными степенями операторного коэффициента A получены автором ранее в работе [34].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Глушак А.В., Покручин О.А.* Критерий разрешимости задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 1. С. 41–59.
2. *Глушак А.В.* Операторная функция Бесселя // Докл. АН СССР. 1997. Т. 352. № 5. С. 587–599.
3. *Глушак А.В.* Семейство операторных функций Бесселя // Геометрия и механика. Итоги науки и техн. Сер. Совр. математика и её приложения. 2020. Т. 187. С. 36–43.
4. *Васильев В.В., Крейн С.Г., Пискарев С.И.* Полугруппы операторов, косинус-оператор функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. 1990. Т. 28. С. 87–202.
5. *Donaldson J.A.* A singular abstract Cauchy problems // Proc. Nat. Acad. Sci. 1970. V. 66. № 2. P. 269–274.
6. *Carroll R.W., Showalter R.E.* Singular and Degenerate Cauchy Problems. New York, 1976.
7. *Bragg L.R.* Some abstract Cauchy problems in exceptional cases // Proc. Amer. Math. Soc. 1977. V. 65. № 1. P. 105–112.
8. *Глушак А.В., Кононенко В.И., Шмулевич С.Д.* Об одной сингулярной абстрактной задаче Коши // Изв. вузов. Математика. 1986. № 6. С. 55–56.
9. *Глушак А.В.* Критерий разрешимости весовой задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 5. С. 627–637.
10. *Глушак А.В.* Операторная функция Макдональда и неполная задача Коши для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Итоги науки и техн. Сер. Совр. математика и её приложения. 2021. Т. 195. С. 35–43.
11. *Balakrishnan A.V.* Fractional powers of closed operators and semigroups generated by them // Pac. J. Math. 1960. V. 10. P. 419–437.
12. *Fattorini H.O., Radnitz A.* The Cauchy problem with incomplete initial data in Banach spaces // Mich. Math. J. 1971. V. 18. P. 291–320.
13. *Fattorini H.O.* The undetermined Cauchy problem in Banach spaces // Math. Ann. 1973. V. 200. P. 103–112.
14. *Dorroh J.R.* Semigroups of operators and second order Cauchy problems // Semigroup Forum. 1985. V. 31. P. 297–304.
15. *de Laubenfels R.* Second order incomplete expiring Cauchy problems // Semigroup Forum. 1989. V. 39. P. 75–84.
16. *de Laubenfels R.* Existence families, functional calculi and evolution equations // Lect. Not. Math. V. 1570. Berlin, Heidelberg, New York, 1994.
17. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., 1966.
18. *Иосида К.* Функциональный анализ. М., 1967.
19. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967.
20. *Голдстейн Д.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. Киев, 1989.
21. *Псху А.В.* Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка. Нальчик, 2005.
22. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
23. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., 1981.
24. *Глушак А.В.* Операторная формула сдвига решения задачи Коши для абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Мат. заметки. 2019. Т. 105. Вып. 5. С. 656–665.
25. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М., 1983.

26. *Koh E.L., Zemanian A.N.* The complex Hankel and I-transformations of generalized functions // SIAM J. Appl. Math. 1968. V. 16. № 5. P. 945–957.
27. *Брычков Ю.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М., 1977.
28. *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М., 1963.
29. *Прилепко А.М., Тихонов И.В.* Восстановление неоднородного слагаемого в абстрактном эволюционном уравнении // Изв. РАН. Сер. Математика. 1994. Т. 58. № 2. С. 167–188.
30. *Тихонов И.В.* О разрешимости задачи с нелокальным интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 6. С. 841–843.
31. *Глушак А.В.* О стабилизации решения задачи Дирихле для одного эллиптического уравнения в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 4. С. 510–514.
32. *Paquet L.* Équations d'évolution pour opérateurs locaux et équations aux dérivés partielles // C. R. Acad. Sci. 1978. AB286. № 4. P. A215–A218.
33. *Глушак А.В.* О возмущении абстрактного уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу // Мат. заметки. 1996. Т. 60. № 3. С. 363–369.
34. *Глушак А.В.* Операторная функция Бесселя и связанные с нею полугруппы и модифицированное преобразование Гильберта // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 1. С. 128–130.

Белгородский государственный национальный исследовательский университет

Поступила в редакцию 10.11.2021 г.
После доработки 13.03.2022 г.
Принята к публикации 21.04.2022 г.