ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 5, с. 591–606

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.35

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА С НЕЛИНЕЙНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

© 2022 г. О. М. Джохадзе

Изучена смешанная задача с нелинейным граничным условием для полулинейного уравнения колебания струны. Исследованы вопросы единственности, локальной и глобальной разрешимости поставленной задачи в зависимости от характера нелинейностей, присутствующих как в уравнении, так и в граничном условии. Рассмотрены случаи несуществования решения не только в целом, но даже локально, а также когда эта задача имеет взрывное решение.

DOI: 10.31857/S0374064122050028, EDN: CASWYZ

1. Постановка задачи. В плоскости независимых переменных x и t в области $D_T :=$ $:= \{(x,t)\in\mathbb{R}^2 : 0<x<l,\ \ 0<t<T\}$ рассмотрим смешанную задачу определения решения $u(x,t)$ полулинейного волнового уравнения вида

$$\Box u + g(u) = f(x,t), \quad (x,t)\in D_T, \tag{1.1}$$

удовлетворяющего начальным

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad u_t(x,0)=\psi(x), \quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{1.2}$$

и краевым условиям

$$u_x(0,t)=F[u_t(0,t)]+\alpha(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{1.3}$$

$$u_x(l,t)=\beta(t), \quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{1.4}$$

где $g,$ $f,$ $\varphi,$ $\psi,$ $F,$ α и β – заданные функции своих аргументов, u – искомая действительная функция, а оператор $\Box := \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}.$

Легко видеть, что при выполнении

$$f\in C^1(\overline{D}_T), \quad g,F\in C^1(\mathbb{R}),$$

$$\varphi\in C^2([0,l]), \quad \psi\in C^1([0,l]), \quad \alpha,\beta\in C^1([0,T]) \tag{1.5}$$

необходимыми условиями разрешимости задачи (1.1)–(1.4) в классе $C^2(\overline{D}_T)$ являются следующие условия согласования второго порядка:

$$\varphi'(0)=F[\psi(0)]+\alpha(0),$$

$$\psi'(0)=F'[\psi(0)]\{\varphi''(0)-g[\varphi(0)]+f(0,0)\}+\alpha'(0),$$

$$\varphi'(l)=\beta(0), \quad \psi'(l)=\beta'(0). \tag{1.6}$$

Отметим, что нелинейное граничное условие вида (1.3), когда функция F зависит только от $u,$ возникает, например, при описании процесса продольных колебаний пружины в случае упругого закрепления одного из её концов, когда натяжение не подчиняется линейному закону Гука и является нелинейной функцией смещения [1, с. 41; 2–4], а также при описании процессов в распределённых автоколебательных системах [5, с. 405]. Краевое условие (1.3) возникает, например, когда конец пружины испытывает сопротивление среды, нелинейно зависящее от скорости его движения [1, с. 42]. Задаче (1.1)–(1.4) посвящены многочисленные работы, в которых в основном решения рассматриваются в пространствах типа Соболева. В настоящей работе задача (1.1)–(1.4) исследуется в классической постановке для достаточно широких классов нелинейных функций, присутствующих как в уравнении (1.1), так и в граничном условии (1.3). При этом предлагается другой подход, когда используются представления решения задач Коши, Гурса и Дарбу в разных частях рассматриваемой области.

В п. 2 приведена эквивалентная редукция поставленной задачи к нелинейному интегральному уравнению типа Вольтерры. В п. 3 доказана локальная разрешимость задачи по переменной t. В п. 4 при некоторых ограничениях на нелинейные функции g и F получена априорная оценка для классического решения этой задачи. В п. 5 доказана глобальная разрешимость в предположении, что $T \leqslant l$. В п. 6 доказана единственность решения. Наконец, в п. 7 рассмотрены случаи несуществования решения не только в целом, но даже локально, а также когда эта задача имеет взрывное решение.

2. Редукция задачи (1.1)–(1.4) к нелинейному интегральному уравнению типа Вольтерры. Далее, с целью избежать трудностей технического характера, ограничимся рассмотрением случая, когда $T = l$, которое будет снято при получении локальной разрешимости и априорной оценки в пп. 3 и 4 соответственно. Пусть $u \in C^2(\overline{D}_l)$ является классическим решением задачи (1.1)–(1.4). Разобьём область D_l, являющуюся квадратом с вершинами в точках $O(0,0)$, $A(0,l)$, $B(l,l)$ и $C(l,0)$, на четыре прямоугольных треугольника $\Delta_1 := \Delta OO_1C$, $\Delta_2 := \Delta OO_1A$, $\Delta_3 := \Delta CO_1B$ и $\Delta_4 := \Delta AO_1B$, где точка $O_1(l/2, l/2)$ – центр квадрата D_l. В треугольнике Δ_1 в силу (1.2) и формулы Даламбера, как известно, справедливо равенство [1, с. 59]

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-t) + \varphi(x+t)] +$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \psi(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^1_{x,t}} f_1(\xi,\tau,u(\xi,\tau))\,d\xi\,d\tau, \quad (x,t) \in \Delta_1. \tag{2.1}$$

Здесь

$$f_1(x,t,s) := f(x,t) - g(s), \quad s \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

а $\Omega^1_{x,t}$ – треугольник с вершинами в точках (x,t), $(x-t,0)$ и $(x+t,0)$.

Как известно, для любой дважды непрерывно дифференцируемой функции w и характеристического для уравнения (1.1) прямоугольника $PP_1P_2P_3$ из области её определения справедливо равенство [6, с. 173]

$$w(P) = w(P_1) + w(P_2) - w(P_3) + \frac{1}{2}\int\limits_{PP_1P_2P_3} \Box w(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{2.3}$$

где P и P_3, а также P_1 и P_2 – противоположные вершины этого прямоугольника, причём ордината точки P больше ординат остальных точек.

Пусть теперь точка $(x,t) \in \Delta_2$. Тогда, положив

$$\mu_1 := u|_{x=0} \tag{2.4}$$

и применив равенство (2.3) для характеристического прямоугольника с вершинами в точках $P(x,t)$, $P_1(0,t-x)$, $P_2(t,x)$ и $P_3(t-x,0)$, а равенство (2.1) для точки $P_2(t,x) \in \Delta_1$, с учётом (1.1), (1.2) и (2.1)–(2.4) получим

$$u(x,t) = u(P_1) + u(P_2) - u(P_3) + \frac{1}{2}\int\limits_{PP_1P_2P_3} f_1(\xi,\tau,u(\xi,\tau))\,d\xi\,d\tau =$$

$$= \mu_1(t-x) - \varphi(t-x) + \frac{1}{2}[\varphi(t-x) + \varphi(t+x)] + \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x} \psi(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^1_{t,x}} f_1(\xi,\tau,u(\xi,\tau))\,d\xi\,d\tau +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{PP_1P_2P_3} f_1(\xi,\tau,u(\xi,\tau))\,d\xi\,d\tau = \mu_1(t-x)+\frac{1}{2}[\varphi(t+x)-\varphi(t-x)]+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x}\psi(\tau)\,d\tau+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^2_{x,t}} f_1(\xi,\tau,u(\xi,\tau))\,d\xi\,d\tau,\quad (x,t)\in\Delta_2. \tag{2.5}$$

Здесь $\Omega^2_{x,t}$ – четырёхугольник $P\widetilde{P}_2P_3P_1,$ где точка $\widetilde{P}_2=\widetilde{P}_2(x+t,0).$

Приняв во внимание, что при $(x,t)\in\Delta_2$ справедливо равенство

$$\int\limits_{\Omega^2_{x,t}} f_1\,d\xi\,d\tau=\int\limits_0^{t-x}d\tau\int\limits_{-x+t-\tau}^{x+t-\tau}f_1\,d\xi+\int\limits_{t-x}^{t}d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}f_1\,d\xi, \tag{2.6}$$

в силу (2.5) будем иметь

$$u_x(x,t)=-\mu_1'(t-x)+\frac{1}{2}[\varphi'(t+x)+\varphi'(t-x)+\psi(t+x)+\psi(t-x)]+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{t-x}[f_1(x+t-\tau,\tau,u(x+t-\tau,\tau))+f_1(-x+t-\tau,\tau,u(-x+t-\tau,\tau))]\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t}[f_1(x+t-\tau,\tau,u(x+t-\tau,\tau))-f_1(x-t+\tau,\tau,u(x-t+\tau,\tau))]\,d\tau. \tag{2.7}$$

В (2.7) подставим $x=0$ и учтём первое из краевых условий (1.3) для неизвестной функции μ_1 при $0\leqslant t\leqslant l.$ В результате получим равенство

$$\mu_1'(t)+F[\mu_1'(t)]=\varphi'(t)+\psi(t)-\alpha(t)+\int\limits_0^t f_1(t-\tau,\tau,u(t-\tau,\tau))\,d\tau. \tag{2.8}$$

Предполагая, что

$$sF(s)\geqslant -M_1,\quad M_1:=\mathrm{const}\geqslant 0\quad \text{для любых}\quad s\in\mathbb{R}, \tag{2.9}$$

и вводя обозначение

$$\Phi(s):=s+F(s),\quad s\in\mathbb{R}, \tag{2.10}$$

очевидно имеем

$$\lim_{s\to\pm\infty}\Phi(s)=\pm\infty. \tag{2.11}$$

При выполнении условия

$$F'(s)\neq -1,\quad s\in\mathbb{R}, \tag{2.12}$$

в силу (2.11) существует обратная к Φ функция $\Phi^{-1}\in C^1(\mathbb{R}).$ Поэтому из равенства (2.8) будем иметь

$$\mu_1'(t)=\Phi^{-1}\Big\{\varphi'(t)+\psi(t)-\alpha(t)+\int\limits_0^t f_1(t-\tau,\tau,u(t-\tau,\tau))\,d\tau\Big\},\quad 0\leqslant t\leqslant l,$$

интегрирование которого с учётом начального условия $\mu_1(0)=\varphi(0)$ даёт функцию

$$\mu_1(t)=\int\limits_0^t \Phi^{-1}\biggl\{\varphi'(\tau)+\psi(\tau)-\alpha(\tau)+\int\limits_0^\tau f_1(\tau-\tau_1,\tau_1,u(\tau-\tau_1,\tau_1))\,d\tau_1\biggr\}\,d\tau+\varphi(0),\quad 0\leqslant t\leqslant l. \tag{2.13}$$

Положив теперь

$$\mu_2:=u|_{x=l}, \tag{2.14}$$

с помощью аналогичных рассуждений, приведённых выше при получении равенства (2.5), будем иметь

$$u(x,t)=\mu_2(x+t-l)+\frac12[\varphi(x-t)-\varphi(2l-x-t)]+$$

$$+\frac12\int\limits_{x-t}^{2l-x-t}\psi(\tau)\,d\tau+\frac12\int\limits_{\Omega^3_{x,t}} f_1(\xi,\tau,u(\xi,\tau))\,d\xi\,d\tau,\quad (x,t)\in\Delta_3, \tag{2.15}$$

и

$$u(x,t)=\mu_1(t-x)+\mu_2(x+t-l)-\frac12[\varphi(t-x)+\varphi(2l-t-x)]+$$

$$+\frac12\int\limits_{t-x}^{2l-t-x}\psi(\tau)\,d\tau+\frac12\int\limits_{\Omega^4_{x,t}} f_1(\xi,\tau,u(\xi,\tau))\,d\xi\,d\tau,\quad (x,t)\in\Delta_4, \tag{2.16}$$

где $\Omega^3_{x,t}$ – четырёхугольник с вершинами $P^3(x,t)$, $P^3_1(l,x+t-l)$, $P^3_2(x-t,0)$ и $P^3_3(2l-x-t,0)$, а $\Omega^4_{x,t}$ – пятиугольник с вершинами $P^4(x,t)$, $P^4_1(0,t-x)$, $P^4_2(t-x,0)$, $P^4_3(2l-x-t,0)$ и $P^4_4(l,x+t-l)$.

Принимая во внимание, что при $(x,t)\in\Delta_3$

$$\int\limits_{\Omega^3_{x,t}} f_1\,d\xi\,d\tau=\int\limits_0^{x+t-l}d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{2l-x-t+\tau}f_1\,d\xi+\int\limits_{x+t-l}^{t}d\tau\int\limits_{x-t+\tau}^{x+t-\tau}f_1\,d\xi,$$

продифференцировав равенство (2.15) по переменной x, при $(x,t)\in\Delta_3$ получаем

$$u_x(x,t)=\mu_2'(x+t-l)+\frac12[\varphi'(x-t)+\varphi'(2l-x-t)]-\frac12[\psi(2l-x-t)+\psi(x-t)]-$$

$$-\frac12\int\limits_0^{x+t-l}[f_1(2l-x-t+\tau,\tau,u(2l-x-t+\tau,\tau))+f_1(x-t+\tau,\tau,u(x-t+\tau,\tau))]\,d\tau+$$

$$+\frac12\int\limits_{x+t-l}^{t}[f_1(x+t-\tau,\tau,u(x+t-\tau,\tau))-f_1(x-t+\tau,\tau,u(x-t+\tau,\tau))]\,d\tau.$$

Подставляя полученное выражение при $x=l$ во второе краевое условие (1.4), для неизвестной функции μ_2 получаем выражение

$$\mu_2'(t)+\varphi'(l-t)-\psi(l-t)-\int\limits_0^t f_1(l-t+\tau,\tau,u(l-t+\tau,\tau))\,d\tau=\beta(t),\quad 0\leqslant t\leqslant l. \tag{2.17}$$

При этом в силу (1.2) и (2.14) имеет место равенство

$$\mu_2(0) = \varphi(l). \tag{2.18}$$

Из (2.17), (2.18) следует

$$\mu_2(t) = \varphi(l-t) + \int_0^t \beta(\tau)\,d\tau + \int_{l-t}^l \psi(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} f_1(l-\tau_1+\tau, \tau, u(l-\tau_1+\tau,\tau))\,d\tau, \quad 0 \leqslant t \leqslant l. \tag{2.19}$$

Замечание 2.1. Из приведённых выше рассуждений следует, что при выполнении условий (2.9) и (2.12) классическое решение $u \in C^2(\overline{D}_l)$ задачи (1.1)–(1.4) удовлетворяет следующему нелинейному интегральному уравнению типа Вольтерры:

$$u(x,t) = (Au)(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}_l, \tag{2.20}$$

где оператор A действует по формулам (2.1) при $(x,t) \in \Delta_1$; (2.5) при $(x,t) \in \Delta_2$; (2.15) при $(x,t) \in \Delta_3$; (2.16) при $(x,t) \in \Delta_4$, причём в этих формулах предполагается, что функции μ_1 и μ_2 задаются равенствами (2.13) и (2.19) соответственно. При этом любое решение нелинейного интегрального уравнения (2.20) класса $C(\overline{D}_l)$ будет принадлежать пространству $C^2(\overline{D}_l)$ и удовлетворять задаче (1.1)–(1.4), если для данных этой задачи выполнены условия гладкости (1.5) и согласования второго порядка (1.6).

Замечание 2.2. Из структуры оператора A и замечания 2.1 следует, что этот оператор действует непрерывным образом из пространства $C(\overline{D}_l)$ в пространство $C^1(\overline{D}_l)$. Теперь, приняв во внимание, что вложение пространства $C^1(\overline{D}_l)$ в пространство $C(\overline{D}_l)$ является компактным [7, с. 135], получим, что оператор

$$A : C(\overline{D}_l) \to C(\overline{D}_l)$$

является компактным.

3. Локальная разрешимость задачи (1.1)–(1.4).

Теорема 3.1. *Пусть $T \leqslant l$ и выполнены условия (1.5), (1.6), (2.9) и (2.12). Тогда найдётся такое положительное число $T_0 := T_0(f, g, F, \varphi, \psi, \alpha, \beta) \leqslant l$, что при $T \leqslant T_0$ задача (1.1)–(1.4) в области D_T будет иметь хотя бы одно классическое решение $u \in C^2(\overline{D}_T)$.*

Доказательство. Поскольку доказательство носит стандартный характер, то приведём его в общих чертах. В силу (2.1), (2.5), (2.13), (2.15), (2.16), (2.19) и теоремы Фубини о повторном интегрировании легко видеть, что равенство (2.20) можно записать в виде

$$u(x,t) = (Au)(x,t) = \int_0^t (A_0 u)(x,t;\tau)\,d\tau + u_0(x,t), \quad (x,t) \in \overline{D}_T, \tag{3.1}$$

где A_0 – ограниченный оператор, действующий в пространстве $C(\overline{D}_T)$, а u_0 – вполне определённая функция из $C(\overline{D}_T)$.

Для фиксированного $r > 0$ положим

$$B_r(u_0) := \{v \in C(\overline{D}_T) : \|v - u_0\|_{C(\overline{D}_T)} \leqslant r\}$$

и

$$M(r) := \sup_{v \in B_r(u_0)} \|A_0 v\|_{C(\overline{D}_T)}, \tag{3.2}$$

причём, исходя из структуры оператора A_0, очевидно, что $M(r) < +\infty$. Тогда для функции $v \in B_r(u_0)$ в силу (3.1) и (3.2) будем иметь

$$|(Av)(x,t) - u_0(x,t)| \leqslant \int\limits_0^t |(A_0 v)(x,t;\tau)|\,d\tau \leqslant tM(r), \quad (x,t) \in D_T.$$

Отсюда следует, что при $T \leqslant T_0 := r/M(r)$ непрерывный и компактный оператор A переводит замкнутый выпуклый шар $B_r(u_0)$ в себя. Поэтому согласно теореме Шаудера существует хотя бы одно решение уравнения (2.20) в $B_r(u_0) \subset C(\overline{D}_T)$ и тем самым в силу замечания 2.1 задачи (1.1)–(1.4) – в области D_T. Теорема доказана.

4. Априорная оценка решения задачи (1.1)–(1.4). Рассмотрим условие

$$(Gg)(s) := \int\limits_0^s g(s_1)\,ds_1 \geqslant -M_2 s^2 - M_3 \quad \text{при всех} \quad s \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

где $M_i := \text{const} \geqslant 0$, $i = 2,3$.

Лемма 4.1. *Пусть выполнены условия (2.9), (4.1). Тогда для решения $u \in C^2(\overline{D}_T)$ задачи (1.1)–(1.4) справедлива априорная оценка*

$$\begin{gathered}\|u\|_{C(\overline{D}_T)} \leqslant c_1\|f\|_{C(\overline{D}_T)} + c_2\|\varphi\|_{C^1([0,l])} + c_3\|\psi\|_{C([0,l])} + c_4\|\alpha\|_{C^1([0,T])} + \\ + c_5\|\beta\|_{C^1([0,T])} + c_6\|g\|_{C([-\|\varphi\|_{C([0,l])}, \|\varphi\|_{C([0,l])}])} + c_7\end{gathered} \tag{4.2}$$

с положительными постоянными $c_i = c_i(M_1, M_2, M_3, l, T)$, $i = \overline{1,7}$, не зависящими от функций u, f, φ, ψ, α и β.

Доказательство. Пусть $u \in C^2(\overline{D}_T)$ является решением задачи (1.1)–(1.4). Умножив обе части равенства (1.1) на $2u_t$ и проинтегрировав по области D_τ, $0 < \tau \leqslant T$, получим

$$\int\limits_{D_\tau} (u_t^2)_t\,dx\,dt - 2\int\limits_{D_\tau} u_{xx}u_t\,dx\,dt + 2\int\limits_{D_\tau} [G(g)(u)]_t\,dx\,dt = 2\int\limits_{D_\tau} fu_t\,dx\,dt. \tag{4.3}$$

Положим $\omega_\tau : t = \tau$, $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant \tau \leqslant T$; $\Gamma := \Gamma_1 \bigcup \omega_0 \bigcup \Gamma_2$, где $\Gamma_1 : x = 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$; $\Gamma_2 : x = l$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Пусть $\nu := (\nu_x, \nu_t)$ – единичный вектор внешней нормали к ∂D_τ. Легко видеть, что справедливы условия

$$\begin{gathered}\nu_x|_{\omega_\tau} = 0, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T, \quad \nu_x|_{\Gamma_1} = -1, \quad \nu_x|_{\Gamma_2} = 1, \\ \nu_t|_{\Gamma_1 \bigcup \Gamma_2} = 0, \quad \nu_t|_{\omega_0} = -1, \quad \nu_t|_{\omega_\tau} = 1, \quad 0 < \tau \leqslant T.\end{gathered} \tag{4.4}$$

Применив интегрирование по частям, с учётом (1.2), (1.4) и (4.4) будем иметь

$$\int\limits_{D_\tau} (u_t^2)_t\,dx\,dt + 2\int\limits_{D_\tau} [(Gg)(u)]_t\,dx\,dt = \int\limits_{\partial D_\tau} u_t^2\nu_t\,ds + 2\int\limits_{\partial D_\tau} (Gg)(u)\nu_t\,ds =$$

$$= \int\limits_{\omega_\tau} u_t^2\,dx - \int\limits_{\omega_0} \psi^2\,dx + 2\int\limits_{\omega_\tau} (Gg)(u)\,dx - 2\int\limits_{\omega_0} (Gg)(\varphi)\,dx,$$

$$-2\int\limits_{D_\tau} u_{xx}u_t\,dx\,dt = 2\int\limits_{D_\tau} [u_x u_{tx} - (u_x u_t)_x]\,dx\,dt = \int\limits_{D_\tau} (u_x^2)_t\,dx\,dt - 2\int\limits_{\partial D_\tau} u_x u_t \nu_x\,ds =$$

$$= \int\limits_{\partial D_\tau} u_x^2\nu_t\,ds + 2\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} u_x u_t\,dt - 2\int\limits_{\Gamma_{2,\tau}} u_x u_t\,dt =$$

$$= \int\limits_{\omega_\tau} u_x^2\,dx - \int\limits_{\omega_0} \varphi'^2\,dx + 2\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} u_x u_t\,dt - 2\int\limits_{\Gamma_{2,\tau}} \beta u_t\,dt, \tag{4.5}$$

где $\Gamma_{i,\tau} := \Gamma_i \bigcap \{t \leqslant \tau\}$, $i = 1, 2$.

Равенство (4.3) в силу (4.5) запишем в виде

$$2\int\limits_{D_\tau} f u_t\,dx\,dt = 2\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} u_x u_t\,dt - 2\int\limits_{\Gamma_{2,\tau}} \beta u_t\,dt - \int\limits_{\omega_0} (\varphi'^2 + \psi^2)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{\omega_\tau} (u_x^2 + u_t^2)\,dx + 2\int\limits_{\omega_\tau} (Gg)(u)\,dx - 2\int\limits_{\omega_0} (Gg)(\varphi)\,dx. \tag{4.6}$$

С учётом (1.3) и (2.9) имеем

$$\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} u_x u_t\,dt = \int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} F(u_t)u_t\,dt + \int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} \alpha u_t\,dt \geqslant -M_1\tau + \int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} \alpha u_t\,dt. \tag{4.7}$$

Из (4.6) согласно (4.1) и (4.7) получаем

$$w(\tau) := \int\limits_{\omega_\tau} (u_x^2 + u_t^2)\,dx \leqslant 2\int\limits_{D_\tau} f u_t\,dx\,dt + 2M_1\tau - 2\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} \alpha u_t\,dt + 2\int\limits_{\Gamma_{2,\tau}} \beta u_t\,dt +$$

$$+ \int\limits_{\omega_0} (\varphi'^2 + \psi^2)\,dx + 2\int\limits_{\omega_0} (Gg)(\varphi)\,dx + 2M_2\int\limits_{\omega_\tau} u^2\,dx + 2M_3 l. \tag{4.8}$$

Далее, поскольку в силу (1.2)

$$u(x,\tau) = \varphi(x) + \int\limits_0^\tau u_t(x,t)\,dt,$$

то справедлива цепочка неравенств

$$|u(x,\tau)|^2 \leqslant 2\varphi^2(x) + 2\bigg(\int\limits_0^\tau u_t(x,t)\,dt\bigg)^2 \leqslant 2\varphi^2(x) + 2\tau\int\limits_0^\tau u_t^2(x,t)\,dt.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{\omega_\tau} u^2\,dx \leqslant 2\|\varphi\|^2_{L_2(\omega_0)} + 2T\int\limits_0^\tau w(t)\,dt, \tag{4.9}$$

где функция w определена в левой части (4.8).

При $(x,t) \in \overline{D}_T$, проинтегрировав очевидное неравенство

$$|u(x,t)|^2 = |u(\xi,t) + \int\limits_\xi^x u_x(x_1,t)\,dx_1|^2 \leqslant 2|u(\xi,t)|^2 + 2l\int\limits_0^l u_x^2(x,t)\,dx$$

по переменной $\xi \in [0,l]$, будем иметь

$$|u(x,t)|^2 \leqslant \frac{2}{l}\int\limits_0^l |u(\xi,t)|^2\,d\xi + 2lw(t) = \frac{2}{l}\int\limits_{\omega_t} u^2\,dx + 2lw(t). \tag{4.10}$$

Из (4.9) и (4.10) следует, что

$$|u(x,t)|^2 \leqslant 4\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + \frac{4T}{l}\int\limits_0^t w(\sigma)\,d\sigma + 2lw(t), \quad (x,t)\in \overline{D}_T. \tag{4.11}$$

Положив

$$\widetilde{w}(t) := \sup_{0\leqslant\tau\leqslant t} w(\tau), \tag{4.12}$$

с учётом очевидного неравенства $w \leqslant \widetilde{w}$ из (4.11) получим

$$\|u\|^2_{C(\overline{D}\tau)} \leqslant 4\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + \frac{4T}{l}\int\limits_0^\tau \widetilde{w}(\sigma)\,d\sigma + 2l\widetilde{w}(\tau), \quad 0\leqslant\tau\leqslant T. \tag{4.13}$$

Далее для любого $\varepsilon > 0$ справедлива цепочка неравенств

$$\Bigl|\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} \alpha u_t\,dt\Bigr| = \Bigl|\alpha(\tau)u(0,\tau) - \alpha(0)u(0,0) - \int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} \alpha' u\,dt\Bigr| \leqslant$$

$$\leqslant |\alpha(\tau)u(0,\tau)| + |\alpha(0)\varphi(0)| + \Bigl|\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} \alpha' u\,dt\Bigr| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4\varepsilon}\|\alpha\|^2_{C([0,\tau])} + \varepsilon\|u\|^2_{C(\overline{D}_\tau)} + |\alpha(0)\varphi(0)| + \frac12\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} \alpha'^2\,dt + \frac12\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} u^2\,dt. \tag{4.14}$$

И аналогично (4.14) имеем

$$\Bigl|\int\limits_{\Gamma_{2,\tau}} \beta u_t\,dt\Bigr| \leqslant \frac{1}{4\varepsilon}\|\beta\|^2_{C([0,\tau])} + \varepsilon\|u\|^2_{C(\overline{D}_\tau)} + |\beta(0)\varphi(l)| + \frac12\int\limits_{\Gamma_{2,\tau}} \beta'^2\,dt + \frac12\int\limits_{\Gamma_{2,\tau}} u^2\,dt. \tag{4.15}$$

В силу (4.11) получаем

$$\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} u^2\,dt = \int\limits_0^\tau u^2(0,t)\,dt \leqslant \int\limits_0^\tau \Bigl[4\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + \frac{4T}{l}\int\limits_0^t w(\sigma)\,d\sigma + 2lw(t)\Bigr]\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 4\tau\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + \frac{4T}{l}\int\limits_0^\tau (\tau - t)w(t)\,dt + 2l\int\limits_0^\tau w(t)\,dt. \tag{4.16}$$

И аналогично (4.16) имеем

$$\int\limits_{\Gamma_{2,\tau}} u^2\,dt \leqslant 4\tau\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + \frac{4T}{l}\int\limits_0^\tau (\tau - t)w(t)\,dt + 2l\int\limits_0^\tau w(t)\,dt. \tag{4.17}$$

Из (4.14) и (4.16) следует, что

$$\Bigl|\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} \alpha u_t\,dt\Bigr| \leqslant \frac{1}{4\varepsilon}\|\alpha\|^2_{C([0,\tau])} + \varepsilon\|u\|^2_{C(\overline{D}_\tau)} + |\alpha(0)\varphi(0)| + \frac12\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} \alpha'^2\,dt +$$

$$+ 2\tau\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + \frac{2T}{l}\int\limits_0^\tau (\tau - t)w(t)\,dt + l\int\limits_0^\tau w(t)\,dt. \tag{4.18}$$

По аналогии с (4.18) из (4.15) и (4.17) имеем

$$\left|\int\limits_{\Gamma_{2,\tau}} \beta u_t\,dt\right| \leqslant \frac{1}{4\varepsilon}\|\beta\|^2_{C([0,\tau])} + \varepsilon\|u\|^2_{C(\overline{D}_\tau)} + |\beta(0)\varphi(l)| + \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_{2,\tau}} \beta'^2\,dt +$$

$$+ 2\tau\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + \frac{2T}{l}\int\limits_0^\tau (\tau - t)w(t)\,dt + l\int\limits_0^\tau w(t)\,dt. \tag{4.19}$$

В силу (4.9), (4.18) и (4.19) с учётом очевидных неравенств

$$2\left|\int\limits_{D_\tau} f u_t\,dx\,dt\right| \leqslant \int\limits_{D_\tau} f^2\,dx\,dt + \int\limits_{D_\tau} u_t^2\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant lT\|f\|^2_{C(\overline{D}_T)} + \int\limits_0^\tau \left[\int\limits_{\omega_t} u_t^2\,dx\right] dt \leqslant lT\|f\|^2_{C(\overline{D}_T)} + \int\limits_0^\tau w(t)\,dt,$$

$$\int\limits_{\omega_0} (\varphi'^2 + \psi^2)\,dx \leqslant l(\|\varphi'\|^2_{C(\omega_0)} + \|\psi\|^2_{C(\omega_0)}),$$

$$2\int\limits_{\omega_0} (Gg)(\varphi)\,dx \leqslant 2l\|(G|g|)(|\varphi|)\|_{C(\omega_0)} = 2l\left\|\int\limits_0^{|\varphi|} |g(s_1)|\,ds_1\right\|_{C(\omega_0)} \leqslant$$

$$\leqslant 2l\|\varphi\|_{C(\omega_0)}\|g\|_{C([-\|\varphi\|_{C(\omega_0)},\|\varphi\|_{C(\omega_0)}])} \leqslant l(\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + \|g\|^2_{C([-\|\varphi\|_{C(\omega_0)},\|\varphi\|_{C(\omega_0)}])})$$

из (4.8) получим

$$w(\tau) \leqslant lT\|f\|^2_{C(\overline{D}_T)} + \int\limits_0^\tau w(t)\,dt + 2M_1T + \frac{1}{2\varepsilon}\|\alpha\|^2_{C([0,\tau])} + 4\varepsilon\|u\|^2_{C(\overline{D}_\tau)} + 2|\alpha(0)\varphi(0)| +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} \alpha'^2\,dt + 8T\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + \frac{8T}{l}\int\limits_0^\tau (\tau - t)w(t)\,dt + 4l\int\limits_0^\tau w(t)\,dt + \frac{1}{2\varepsilon}\|\beta\|^2_{C([0,\tau])} +$$

$$+ 2|\beta(0)\varphi(l)| + \int\limits_{\Gamma_{2,\tau}} \beta'^2\,dt + l(\|\varphi'\|^2_{C(\omega_0)} + \|\psi\|^2_{C(\omega_0)} + \|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + \|g\|^2_{C([-\|\varphi\|_{C(\omega_0)},\|\varphi\|_{C(\omega_0)}])}) +$$

$$+ 2M_2\left\{2l\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + 2T\int\limits_0^\tau w(t)\,dt\right\} + 2M_3l \leqslant \alpha_1\int\limits_0^\tau w(t)\,dt + 4\varepsilon\|u\|^2_{C(\overline{D}_\tau)} + \alpha_2, \tag{4.20}$$

где

$$\alpha_1 := 1 + 4\left(M_2T + \frac{2T^2}{l} + l\right),$$

$$\alpha_2 := lT\|f\|^2_{C(\overline{D}_T)} + 2M_1T + \frac{1}{2\varepsilon}\|\alpha\|^2_{C([0,T])} + 2|\alpha(0)\varphi(0)| + \|\alpha'\|^2_{L_2([0,T])} +$$

$$+ 8T\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + \frac{1}{2\varepsilon}\|\beta\|^2_{C([0,T])} + 2|\beta(0)\varphi(l)| + \|\beta'\|^2_{L_2([0,T])} +$$
$$+ l(\|\varphi'\|^2_{C(\omega_0)} + \|\psi\|^2_{C(\omega_0)} + \|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + \|g\|^2_{C([-\|\varphi\|_{C(\omega_0)},\|\varphi\|_{C(\omega_0)}])}) + 4M_2 l\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + 2M_3 l. \quad (4.21)$$

Так как величина $\|u\|^2_{C(\overline{D}_\tau)}$ относительно переменной τ является неубывающей функцией, применив лемму Гронуолла к неравенству (4.20), получим

$$w(\tau) \leqslant \exp(\alpha_1 T)(4\varepsilon\|u\|^2_{C(\overline{D}_\tau)} + \alpha_2) \leqslant \exp(\alpha_1 T)(4\varepsilon\|u\|^2_{C(\overline{D}_t)} + \alpha_2), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T. \quad (4.22)$$

В обозначении (4.12) из (4.22) следует

$$\widetilde{w}(t) \leqslant \exp(\alpha_1 T)(4\varepsilon\|u\|^2_{C(\overline{D}_t)} + \alpha_2), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \quad (4.23)$$

С учётом (4.23) из (4.13), приняв во внимание, что функция $\widetilde{w}$ из (4.12) неубывающая, имеем

$$\|u\|^2_{C(\overline{D}\tau)} \leqslant 4\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + 2\left(\frac{2T\tau}{l} + l\right)\widetilde{w}(\tau) \leqslant$$
$$\leqslant 4\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + 2\left(\frac{2T^2}{l} + l\right)\exp(\alpha_1 T)(4\varepsilon\|u\|^2_{C(\overline{D}_\tau)} + \alpha_2), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T. \quad (4.24)$$

Положив

$$\varepsilon = \varepsilon_0 := 4\left(\frac{2T^2}{l} + l\right)\exp(\alpha_1 T), \quad (4.25)$$

из (4.24) будем иметь

$$\|u\|^2_{C(\overline{D}\tau)} \leqslant 8\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)} + \varepsilon_0\alpha_2, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant T, \quad (4.26)$$

где в выражении (4.21) для α_2 в качестве ε взята величина из (4.25).

Прежде чем из (4.26) при $\tau = T$ получить априорную оценку (4.2) с учётом того, что

$$2(|\alpha(0)\varphi(0)| + |\beta(0)\varphi(l)|) \leqslant \|\alpha\|^2_{C([0,T])} + \|\beta\|^2_{C([0,T])} + 2\|\varphi\|^2_{C(\omega_0)},$$

для величины α_2 из (4.21) будем иметь

$$\alpha_2 \leqslant \widetilde{c}_1\|f\|^2_{C(\overline{D}_T)} + \widetilde{c}_2\|\varphi\|^2_{C^1(\omega_0)} + \widetilde{c}_3\|\psi\|^2_{C(\omega_0)} + \widetilde{c}_4\|\alpha\|^2_{C^1([0,T])} + \widetilde{c}_5\|\beta\|^2_{C^1([0,T])} +$$
$$+ \widetilde{c}_6\|g\|^2_{C([-\|\varphi\|_{C(\omega_0)},\|\varphi\|_{C(\omega_0)}])} + \widetilde{c}_7. \quad (4.27)$$

Здесь

$$\widetilde{c}_1 := lT, \quad \widetilde{c}_2 := 2(4T + 1 + (2M_2 + 1)l), \quad \widetilde{c}_3 = \widetilde{c}_6 := l,$$
$$\widetilde{c}_4 = \widetilde{c}_5 := 2\varepsilon_0 + T + 1, \quad \widetilde{c}_7 := 2(M_1 T + M_3 l).$$

Теперь, положив

$$c_1 := \sqrt{lT\varepsilon_0}, \quad c_2 := \sqrt{8 + 2\varepsilon_0(4T + 1 + (2M_2 + 1)l)}, \quad c_3 = c_6 := \sqrt{l\varepsilon_0},$$
$$c_4 = c_5 := \sqrt{(2\varepsilon_0 + T + 1)\varepsilon_0}, \quad c_7 = \sqrt{2(M_1 T + M_3 l)\varepsilon_0}, \quad (4.28)$$

приняв во внимание (4.26), (4.27) и очевидное неравенство $(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{1/2} \leqslant \sum_{i=1}^n |a_i|$, получим оценку (4.2). Лемма доказана.

Замечание 4.1. Приведём некоторые классы функций, которые часто встречаются в приложениях и для которых выполнены условия из (2.9) и (4.1):

1) $F(s) = F_0(s)\operatorname{sign} s + as + b$, где $F_0 \in C(\mathbb{R})$, $F_0 \geqslant 0$; $a, b, s \in \mathbb{R}$, $a > 0$;

2) $g(s) = g_0(s)\operatorname{sign} s + as + b$, где $g_0 \in C(\mathbb{R})$, $g_0 \geqslant 0$; $a, b, s \in \mathbb{R}$;

3) $g \in C(\mathbb{R})$, $g|_{(-\infty,0)} \in L_1(-\infty,0)$; $g|_{(0,+\infty)} \geqslant 0$ (например, $g(s)=\exp(s)$, $s\in\mathbb{R}$).

5. Глобальная разрешимость задачи (1.1)–(1.4). При $\lambda\in[0,1]$ пусть $u=u_\lambda$ является непрерывным решением нелинейного интегрального уравнения типа Вольтерры

$$u=\lambda Au, \tag{5.1}$$

где оператор A присутствует в правой части уравнения (2.20), которая при $(x,t)\in\Delta_2$ в силу (2.5), (2.13) действует по формуле

$$(Au)(x,t)=\int\limits_0^{t-x}\Phi^{-1}\biggl\{\varphi'(\tau)+\psi(\tau)-\alpha(\tau)+\int\limits_0^{\tau}f_1(\tau-\tau_1,\tau_1,u(\tau-\tau_1,\tau_1))\,d\tau_1\biggr\}\,d\tau+$$

$$+\varphi(0)+\frac12[\varphi(t+x)-\varphi(t-x)]+\frac12\int\limits_{t-x}^{t+x}\psi(\tau)\,d\tau+\frac12\int\limits_{\Omega^2_{x,t}}f_1(\xi,\tau,u(\xi,\tau))\,d\xi\,d\tau. \tag{5.2}$$

В силу (5.1) и (5.2), аналогично тому как из (2.6) было получено равенство (2.7), будем иметь

$$u_x(0,t)=-\lambda\Phi^{-1}\biggl\{\varphi'(t)+\psi(t)-\alpha(t)+\int\limits_0^t f_1(t-\tau,\tau,u(t-\tau,\tau))\,d\tau\biggr\}+$$

$$+\lambda\biggl\{\varphi'(t)+\psi(t)+\int\limits_0^t f_1(t-\tau,\tau,u(t-\tau,\tau))\,d\tau\biggr\} \tag{5.3}$$

и

$$u_t(0,t)=\lambda\Phi^{-1}\biggl\{\varphi'(t)+\psi(t)-\alpha(t)+\int\limits_0^t f_1(t-\tau,\tau,u(t-\tau,\tau))\,d\tau\biggr\}. \tag{5.4}$$

Из (5.4) при $\lambda\neq0$ получим

$$\Phi\biggl[\frac1\lambda u_t(0,t)\biggr]=\varphi'(t)+\psi(t)-\alpha(t)+\int\limits_0^t f_1(t-\tau,\tau,u(t-\tau,\tau))\,d\tau,$$

откуда с учётом (2.10) будем иметь

$$\varphi'(t)+\psi(t)+\int\limits_0^t f_1(t-\tau,\tau,u(t-\tau,\tau))\,d\tau=\Phi\biggl[\frac1\lambda u_t(0,t)\biggr]+\alpha(t)=$$

$$=\frac1\lambda u_t(0,t)+F\biggl[\frac1\lambda u_t(0,t)\biggr]+\alpha(t). \tag{5.5}$$

Из (5.3)–(5.5) следует, что

$$u_x(0,t)=-u_t(0,t)+\lambda\biggl\{\frac1\lambda u_t(0,t)+F\biggl[\frac1\lambda u_t(0,t)\biggr]+\alpha(t)\biggr\}=\lambda F\biggl[\frac1\lambda u_t(0,t)\biggr]+\lambda\alpha(t). \tag{5.6}$$

Легко показать, что функция $u=u_\lambda$, $\lambda\in(0,1]$, в области D_T, $T\leqslant l$, в силу (5.6) и замечания 2.1 является классическим решением следующей смешанной задачи:

$$u_{tt}-u_{xx}=\lambda[-g(u)+f(x,t)],\quad (x,t)\in D_T,$$

$$u(x,0)=\lambda\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\lambda\psi(x),\quad 0\leqslant x\leqslant l,$$
$$u_x(0,t)=\lambda F\left[\frac{1}{\lambda}u_t(0,t)\right]+\lambda\alpha(t),\quad u_x(l,t)=\lambda\beta(t),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{5.7}$$

когда данные этой задачи удовлетворяют аналогичным условиям гладкости (1.5) исходной задачи (1.1)–(1.4), а условия согласования имеют вид

$$\varphi'(0)=F[\psi(0)]+\alpha(0),$$
$$\psi'(0)=F'[\psi(0)]\{\varphi''(0)-g[\lambda\varphi(0)]+f(0,0)\}+\alpha'(0),$$
$$\varphi'(l)=\beta(0),\quad \psi'(l)=\beta'(0). \tag{5.8}$$

При этом справедливо и обратное утверждение: классическое решение задачи (5.7) является непрерывным решением нелинейного интегрального уравнения (5.1).

Легко видеть, что условия (5.8) будут выполнены для любого $\lambda\in(0,1]$, если, например,

$$\varphi(0)=0,\quad \varphi'(0)=F[\psi(0)]+\alpha(0),$$
$$\psi'(0)=F'[\psi(0)]\{\varphi''(0)-g(0)+f(0,0)\}+\alpha'(0),$$
$$\varphi'(l)=\beta(0),\quad \psi'(l)=\beta'(0). \tag{5.9}$$

Замечание 5.1. Легко можно проверить, что аналогичные (2.9), (2.12) и (4.1) условия, которые были достаточны при получении априорной оценки (4.2) для классического решения задачи (1.1)–(1.4), также будут выполнены и для функций $\lambda g(s)$ и $\lambda F(s/\lambda)$, $s\in\mathbb{R}$. Действительно, в силу (2.9), (2.12), (4.1) и $\lambda\in(0,1]$ имеем

$$s\lambda F(s/\lambda)=\lambda^2\frac{s}{\lambda}F(s/\lambda)\geqslant-\lambda^2M_1\geqslant-M_1;$$
$$\{\lambda F(s/\lambda)\}'_s=F'(s/\lambda)\neq-1,\quad s\in\mathbb{R};$$
$$\int\limits_0^s\lambda g(s_1)\,ds_1=\lambda\int\limits_0^s g(s_1)\,ds_1\geqslant-M_2\lambda s^2-M_3\lambda\geqslant-M_2s^2-M_3.$$

Таким образом, при выполнении условий (1.5), (2.9), (2.12), (4.1) и (5.9), согласно сказанному выше, при $\lambda\in(0,1]$ непрерывное решение нелинейного интегрального уравнения (5.1) является классическим решением задачи (5.7) и в силу леммы 4.1 удовлетворяет следующей априорной оценке:

$$\|u_\lambda\|_{C(\overline{D}_T)}\leqslant c_1\lambda\|f\|_{C(\overline{D}_T)}+c_2\lambda\|\varphi\|_{C^1([0,l])}+c_3\lambda\|\psi\|_{C([0,l])}+c_4\lambda\|\alpha\|_{C^1([0,T])}+$$
$$+c_5\lambda\|\beta\|_{C^1([0,T])}+c_6\lambda\|g\|_{C([-\lambda\|\varphi\|_{C([0,l])},\lambda\|\varphi\|_{C([0,l])}])}+c_7\leqslant c_1\|f\|_{C(\overline{D}_T)}+$$
$$+c_2\|\varphi\|_{C^1([0,l])}+c_3\|\psi\|_{C([0,l])}+c_4\|\alpha\|_{C^1([0,T])}+c_5\|\beta\|_{C^1([0,T])}+$$
$$+c_6\|g\|_{C([-\|\varphi\|_{C([0,l])},\|\varphi\|_{C([0,l])}])}+c_7, \tag{5.10}$$

где c_i, $i=\overline{1,7}$, – те же постоянные, что и в лемме 4.1, которые были определены в (4.28).

Замечание 5.2. Согласно приведённым выше рассуждениям для непрерывного решения интегрального уравнения (5.1) справедлива априорная оценка (5.10) при $\lambda\in(0,1]$, которая справедлива и при $\lambda=0$, поскольку в этом случае $u_\lambda=u_0=0$.

Таким образом, для решения $u=u_\lambda$ уравнения (5.1) с непрерывным компактным оператором A при любом $\lambda\in[0,1]$ имеет место априорная оценка (5.10), в которой постоянные c_i, $i=\overline{1,7}$, не зависят от λ. Поэтому согласно теореме Лере–Шаудера [8, с. 375] уравнение (5.1) при $\lambda=1$ имеет хотя бы одно решение $u\in C(\overline{D}_T)$, которое в силу приведённых выше рассуждений является также и классическим решением задачи (1.1)–(1.4) при выполнении условий (1.5), (2.9), (2.12), (4.1) и (5.9).

Тем самым доказана

Теорема 5.1. *Пусть $T \leqslant l$, имеют место условия (1.5), (2.9), (2.12), (4.1) и (5.9). Тогда задача (1.1)–(1.4) имеет хотя бы одно классическое решение класса $C^2(\overline{D}_T)$.*

6. Единственность решения задачи (1.1)–(1.4) класса $C^2(\overline{D}_T)$.

Теорема 6.1. *Задача (1.1)–(1.4) не может иметь более одного решения класса $C^2(\overline{D}_T)$, если наряду с (1.5) дополнительно потребовать, чтобы выполнялось*

$$F'(s) \geqslant 0 \quad \textit{для любых} \quad s \in \mathbb{R}. \tag{6.1}$$

Доказательство. Действительно, допустим, что задача (1.1)–(1.4) имеет два возможных различных решения u_1 и u_2 класса $C^2(\overline{D}_T)$. Тогда для их разности $v := u_2 - u_1$ будут справедливы следующие тождества:

$$v_{tt} - v_{xx} + \widetilde{g}(x,t)v = 0, \quad (x,t) \in D_T, \tag{6.2}$$

$$v(x,0) = 0, \quad v_t(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{6.3}$$

$$v_x(0,t) = \widetilde{F}(t)v_t(0,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{6.4}$$

$$v_x(l,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{6.5}$$

Здесь

$$\widetilde{g}(x,t) := \int\limits_0^1 g'[u_1(x,t) + \tau(u_2(x,t) - u_1(x,t))]\,d\tau, \tag{6.6}$$

$$\widetilde{F}(t) := \int\limits_0^1 F'[u_{1t}(0,t) + \tau(u_{2t}(0,t) - u_{1t}(0,t))]\,d\tau. \tag{6.7}$$

Умножив обе части равенства (6.2) на $2v_t$ и проинтегрировав по области D_τ, $0 < \tau \leqslant T$, с учётом (6.3), (6.5) аналогично тому, как из (4.3) было получено (4.6), будем иметь

$$0 = 2\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} v_x v_t\,dt + \int\limits_{\omega_\tau} (v_x^2 + v_t^2)\,dx + 2\int\limits_{D_\tau} \widetilde{g}(x,t)vv_t\,dx\,dt. \tag{6.8}$$

В силу (6.1), (6.4) и (6.7) имеем

$$\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} v_x v_t\,dt = \int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} \widetilde{F}(t)v_t^2\,dt \geqslant 0. \tag{6.9}$$

Согласно (6.9) из (6.8) получим

$$\widetilde{w}(\tau) := \int\limits_{\omega_\tau} (v_x^2 + v_t^2)\,dx \leqslant -2\int\limits_{D_\tau} \widetilde{g}(x,t)vv_t\,dx\,dt. \tag{6.10}$$

С учётом (1.5) для непрерывной в $\overline{D}_T$ функции $\widetilde{g}$ из (6.6) существует такое $M = \mathrm{const} \geqslant 0$, что

$$|\widetilde{g}(x,t)| \leqslant M \quad \text{для всех точек} \quad (x,t) \in \overline{D}_T. \tag{6.11}$$

Далее, поскольку в силу (6.3) следует

$$v(x,t) = \int\limits_0^t v_t(x,t')\,dt', \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau,$$

то

$$v^2(x,t)=\Bigl(\int\limits_0^t v_t(x,t')\,dt'\Bigr)^2\leqslant t\int\limits_0^t v_t^2(x,t')\,dt'\leqslant\tau\int\limits_0^\tau v_t^2(x,t')\,dt'$$

и, тем самым, справедливы неравенства

$$\int\limits_{D_\tau} v^2\,dx\,dt\leqslant\tau^2\int\limits_{D_\tau} v_t^2\,dx\,dt\leqslant T^2\int\limits_0^\tau\widetilde{w}(t)\,dt, \tag{6.12}$$

где $\widetilde{w}$ определена в левой части (6.10).

Теперь в силу (6.11), (6.12) и очевидного неравенства $2vv_t\leqslant v^2+v_t^2$ из (6.10) получим

$$\widetilde{w}(\tau)\leqslant M(1+T^2)\int\limits_0^\tau\widetilde{w}(t)\,dt.$$

Отсюда в силу леммы Гронуолла следует, что $\widetilde{w}(\tau)=0,\ \ 0<\tau\leqslant T,$ и с учётом (6.3) имеем $v=u_2-u_1=0.$ Теорема 6.1 доказана.

Из теорем 5.1 и 6.1 вытекает теорема существования и единственности классического решения задачи (1.1)–(1.4).

Теорема 6.2. *Пусть $T\leqslant l$ и выполнены условия (1.5), (2.9), (2.12), (4.1), (5.9) и (6.1). Тогда задача (1.1)–(1.4) имеет единственное классическое решение $u\in C^2(\overline{D}_T)$.*

7. Случаи нарушения разрешимости задачи (1.1)–(1.4).

7.1. Ниже, использовав метод пробных функций [9, с. 10–12], покажем, что нарушение условия (4.1), вообще говоря, может стать причиной отсутствия глобальной разрешимости задачи (1.1)–(1.4).

Действительно, пусть

$$g(s)\geqslant\lambda|s|^p,\quad \lambda>0,\quad p>1,\quad s\in\mathbb{R}. \tag{7.1}$$

Легко видеть, что при выполнении неравенства (7.1) условие (4.1) будет нарушено.

Умножив обе части уравнения (1.1) на пробную функцию $\chi\in C^2(\overline{D}_T)$ такую, что

$$\chi|_{D_T}>0,\quad \chi|_{\partial D_T}=\chi_t|_{\partial D_T}=\chi_x|_{\partial D_T}=0, \tag{7.2}$$

после интегрирования по частям получим

$$\int\limits_{D_T} u\Box\chi\,dx\,dt+\int\limits_{D_T} g(u)\chi\,dx\,dt=\int\limits_{D_T} f\chi\,dx\,dt, \tag{7.3}$$

где $u\in C^2(\overline{D}_T)$ – классическое решение задачи (1.1)–(1.4).

В силу (7.1)–(7.3) имеем

$$\lambda\int\limits_{D_T}|u|^p\chi\,dx\,dt\leqslant\int\limits_{D_T}|u\Box\chi|\,dx\,dt+\int\limits_{D_T} f\chi\,dx\,dt. \tag{7.4}$$

Если в неравенстве Юнга с параметром $\varepsilon>0$

$$ab\leqslant\frac{\varepsilon}{p}a^p+\frac{1}{p'\varepsilon^{p'-1}}b^{p'},\quad a,b\geqslant0,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\quad p>1,$$

возьмём $a = |u|\chi^{1/p}$, $b = \dfrac{|\Box\chi|}{\chi^{1/p}}$, то с учётом того, что $\dfrac{p'}{p} = p' - 1$, получим

$$|u\Box\chi| = |u|\chi^{1/p}\frac{|\Box\chi|}{\chi^{1/p}} \leqslant \frac{\varepsilon}{p}|u|^p\chi + \frac{1}{p'\varepsilon^{p'-1}}\frac{|\Box\chi|^{p'}}{\chi^{p'-1}}. \tag{7.5}$$

В силу (7.4) и (7.5) будем иметь

$$\left(\lambda - \frac{\varepsilon}{p}\right)\int\limits_{D_T}|u|^p\chi\,dx\,dt \leqslant \frac{1}{p'\varepsilon^{p'-1}}\int\limits_{D_T}\frac{|\Box\chi|^{p'}}{\chi^{p'-1}}\,dx\,dt + \int\limits_{D_T}f\chi\,dx\,dt,$$

откуда при $\varepsilon < \lambda p$ получим

$$\int\limits_{D_T}|u|^p\chi\,dx\,dt \leqslant \frac{p}{(\lambda p - \varepsilon)p'\varepsilon^{p'-1}}\int\limits_{D_T}\frac{|\Box\chi|^{p'}}{\chi^{p'-1}}\,dx\,dt + \frac{p}{\lambda p - \varepsilon}\int\limits_{D_T}f\chi\,dx\,dt. \tag{7.6}$$

С учётом того, что $p' = p/(p-1)$, $p = p'/(p'-1)$ и

$$\min_{0<\varepsilon<\lambda p}\frac{p}{(\lambda p - \varepsilon)p'\varepsilon^{p'-1}} = \frac{1}{\lambda^{p'}},$$

которое достигается при $\varepsilon = \lambda$, из (7.6) следует, что

$$\int\limits_{D_T}|u|^p\chi\,dx\,dt \leqslant \frac{1}{\lambda^{p'}}\int\limits_{D_T}\frac{|\Box\chi|^{p'}}{\chi^{p'-1}}\,dx\,dt + \frac{p'}{\lambda}\int\limits_{D_T}f\chi\,dx\,dt. \tag{7.7}$$

Ниже будем считать, что наряду с (7.2) выполнено условие

$$\kappa_0 := \int\limits_{D_T}\frac{|\Box\chi|^{p'}}{\chi^{p'-1}}\,dx\,dt < +\infty. \tag{7.8}$$

Простая проверка показывает, что в качестве функции χ, удовлетворяющей условиям (7.2) и (7.8), можно взять, например, функцию

$$\chi(x,t) = [xt(l-x)(T-t)]^n, \quad (x,t) \in D_T,$$

при достаточно большом натуральном n.

Положив

$$f = -\mu f_0, \quad f_0 \geqslant 0, \quad f_0 \not\equiv 0, \quad \mu = \mathrm{const} > 0, \tag{7.9}$$

с учётом (7.8) неравенство (7.7) запишем в виде

$$\int\limits_{D_T}|u|^p\chi\,dx\,dt \leqslant \frac{\kappa_0}{\lambda^{p'}} - \frac{\mu p'}{\lambda}\int\limits_{D_T}f_0\chi\,dx\,dt. \tag{7.10}$$

В силу требований, наложенных на функции χ и f_0, будем иметь

$$0 \leqslant \int\limits_{D_T}|u|^p\chi\,dx\,dt, \qquad \int\limits_{D_T}f_0\chi\,dx\,dt > 0. \tag{7.11}$$

Поэтому в предположении, что задача (1.1)–(1.4) имеет классическое решение $u(x,t)$ и

$$\mu > \mu_0 := \frac{\kappa_0}{\lambda^{p'-1}p'}\biggl(\int\limits_{D_T} f_0\chi\,dx\,dt\biggr)^{-1}, \tag{7.12}$$

придём к противоречию, поскольку в силу (7.11) левая часть (7.10) будет неотрицательной, а правая часть – отрицательной.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 7.1. *Пусть выполнены условия (7.1), (7.9) и (7.12). Тогда задача (1.1)–(1.4) не имеет классического решения в области D_T.*

7.2. Наряду с теоремой 7.1 о несуществовании решения задачи (1.1)–(1.4) в фиксированной области D_T, как показывают примеры, возможен также случай, когда эта задача не является даже локально разрешимой, а также когда задача (1.1)–(1.4) имеет взрывное решение.

Действительно, в случае, когда $g=0$, $f=0$, $F(s)=\operatorname{arctg} s - s$, $s\in\mathbb{R}$, а $|\varphi'(t)+{}$ $+\psi(t)-\alpha(t)|>\pi/2$, $t\in[0,l]$, задача (1.1)–(1.4) не разрешима даже локально. При этом если $|\varphi'(t)+\psi(t)-\alpha(t)|<\pi/2$ в случае $0\leqslant t<t_0\leqslant l$ и $|\varphi'(t_0)+\psi(t_0)-\alpha(t_0)|=\pi/2$, то решение этой задачи существует в промежутке $[0,t_0)$, причём в силу формул (2.5), (2.7), (2.8) и (2.16) выполняется

$$\lim_{t\to t_0-0}\|u\|_{C^1(\overline{D}_t)}=\infty.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1977.
2. *Харибегашвили С.С., Джохадзе О.М.* О глобальных и взрывных решениях смешанной задачи с нелинейным граничным условием для одномерного полулинейного волнового уравнения // Мат. сб. 2014. Т. 205. № 4. С. 121–148.
3. *Kharibegashvili S., Shavlakadze N., Jokhadze O.* On the solvability of a mixed problem with a nonlinear boundary condition for a one-dimensional semilinear wave equation // J. of Contemporary Math. Anal. 2018. V. 53. № 5. P. 247–259.
4. *Харибегашвили С.С., Джохадзе О.М.* О разрешимости смешанной задачи с нелинейным граничным условием для одномерного полулинейного волнового уравнения // Мат. заметки. Вып. 108. № 1. С. 137–152.
5. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М., 1981.
6. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М., 1982.
7. *Гильбарг Д., Трудингер Н.С.* Эллиптические уравнения с частными производными второго порядка. М., 1989.
8. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 1993.
9. *Митидиери Э., Похожаев С.И.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. МИАН. 2001. Т. 234. С. 3–383.

Тбилисский государственный университет
имени И.А. Джавахишвили,
Математический институт имени А.М. Размадзе,
г. Тбилиси, Грузия

Поступила в редакцию 13.01.2022 г.
После доработки 13.01.2022 г.
Принята к публикации 21.04.2022 г.