ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 5, с. 607–627

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.226+517.925.7

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ЛИНЕЙНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

© 2022 г. Д. П. Емельянов

Применение метода спектрального выделения особенностей для построения решения краевой задачи для нерегулярно вырождающегося эллиптического дифференциального оператора первого порядка с аналитическими коэффициентами в прямоугольнике приводит к необходимости решения последовательности краевых задач для вырождающихся обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с аналитическими коэффициентами на отрезке с большим параметром при неизвестной функции. Для фундаментальной системы решений этих уравнений и для функций Грина данной последовательности задач получены оценки их поведения при стремлении параметра к бесконечности. Решение краевой задачи для вырождающегося по одной переменной (y) эллиптического дифференциального оператора с аналитическими коэффициентами построено в виде ряда Пуассона – ряда по собственным функциям предельного оператора с аналитическими по y коэффициентами. Данная работа обобщает на случай вырождения первого порядка результаты, ранее полученные для аналогичных уравнений с вырождением второго порядка.

DOI: 10.31857/S037406412205003X, EDN: CBABOB

Введение. Будем рассматривать следующие две краевые задачи для нерегулярно вырождающегося эллиптического уравнения в прямоугольнике $\Omega = \{(x,y): 0 < x < 1,\ 0 < y < b\} \equiv$ $\equiv (0,1)\times(0,b)$: *задачу* D (согласно терминологии М.В. Келдыша [1])

$$u''_{xx} + yu''_{yy} + c(y)u'_y - a(y)u = f(x,y), \quad (x,y)\in\Omega,$$
$$u(0,y) = u(1,y) = u(x,b) = u(x,0) = 0 \qquad (1)$$

и *задачу* E

$$u''_{xx} + yu''_{yy} + c(y)u'_y - a(y)u = f(x,y), \quad (x,y)\in\Omega,$$
$$u(0,y) = u(1,y) = u(x,b) = 0, \quad |u(x,0)| < +\infty. \qquad (2)$$

Определение. Будем говорить, что некоторая функция $\varphi(y)$, определённая на отрезке $[0,b]$, *принадлежит классу* A, если функция $\varphi(y)$ может быть представлена рядом по целым степеням y, сходящимся в интервале $(-R,R)$ для некоторого $R > b$. Иначе говоря, аналитическое продолжение функции $\varphi(z)$ должно быть аналитической функцией в круге $\{z\in\mathbb{C}: |z| < R\}$.

Коэффициенты $a(y)$ и $c(y)$ дифференциального оператора считаем принадлежащими классу A. Кроме того, если $a(y) \geqslant 0$ при $y\in[0,b]$, то правая часть уравнения $f(x,y)$ при каждом фиксированном x принадлежит классу A по y и непрерывна по совокупности переменных в $\overline{\Omega}$, где $\overline{\Omega} = \{x,y\colon\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant b\} \equiv [0,1]\times[0,b]$.

Однородные задачи указанного вида $(f\equiv 0)$ для области с гладкой границей были поставлены М.В. Келдышем в работах [1; 2, с. 299–301], а также доказаны существование и единственность классических решений. Явного вида решений не было приведено, однако были сформулированы условия корректной разрешимости краевых задач в терминах показателя вырождения m и знаков коэффициентов $a(y)$ и $c(y)$ уравнений. Из полученных результатов М.В. Келдыша следует, в частности, что решение задачи (2) единственно при $c(0)\geqslant 1$, а решение задачи (1) единственно при $c(0) < 1$.

Эти задачи исследовались и другими авторами. Отметим работы А.И. Янушаускаса [3, гл. 3–5], М.М. Смирнова [4, с. 88–94] $(0 < m < 2)$, Е.И. Моисеева [5, с. 73–88] (y^m – при производной u_{xx}, $m > 0$), В.М. Ивакина [6] $(m > 2)$, И.М. Петрушко [7, 8] $(m = 1)$ и др. Решения задач получены в виде либо интегралов (с помощью метода функций Грина), либо биортогональных рядов, исследовалось асимптотическое поведение решений при $y \to 0$.

В [9; 10; 11 гл. X] предложен новый метод исследования таких задач – метод спектрального выделения особенностей, позволяющий построить решение задачи в виде ряда Пуассона по собственным функциям предельного оператора $(y = 0)$ и указать, каким образом факт вырождения уравнения сказывается на решении и каким образом аналитичность коэффициентов уравнения наследуется решением задачи (обобщение теоремы Коши–Ковалевской). В работах [9; 10; 11, гл. X; 12; 13] данным методом была полностью решена задача E, аналогичная (2), но с квадратичным регулярным вырождением.

Цель данной работы – перенести указанные результаты на случай поставленных задач (1) и (2) с линейным вырождением.

Применим метод функции Грина для вспомогательных задач для вырождающихся обыкновенных дифференциальных операторов первого порядка. От задач (1) и (2) переходим к расширенным (регуляризованным) задачам, решение которых ищем в виде ряда Пуассона

$$v(x, y, \tau) = \sum_{k=1}^{+\infty} [\tau_k \varphi_k(y) + \eta_k(y)]\psi_k(x), \tag{3}$$

где φ_k, η_k – аналитические функции, представимые на отрезке $[0, b]$ рядами по степеням y, $\psi_k = \sin(\pi k x)$ – собственные функции “предельного” оператора $L : lw(x) = -w''(x) + a(0)w(x)$, $x \in (0, 1)$, $w(0) = w(1) = 0$, отвечающие собственным значениям $\lambda_k = -k^2\pi^2 - a(0)$. Расширенные задачи получаются из исходных задач после перехода в пространство бесконечной размерности (по аналогии с методом регуляризации сингулярных возмущений [11]), $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots)$ – новые независимые переменные, τ_k отвечает своему собственному значению λ_k, $k = 1, 2, \ldots$ При $\tau_k = (y/b)^r$ или $\tau_k = \ln y$ (конкретный вид τ_k будет указан далее) решение расширенных задач переходит в решение задач (1) и (2). Новые переменные позволяют описать особенности решения, связанные с вырождением эллиптического оператора.

Для нахождения функций φ_k, η_k приходим к необходимости решить серию задач следующего вида в случае постановки задачи D (далее обозначаем неизвестную функцию как $y = y(x)$):

$$\begin{gathered} xy_k''(x) + c(x)y_k'(x) - (a(x) + \pi^2k^2)y_k(x) = f_k(x), \quad x \in (0, b), \\ y_k(0) = y_k(b) = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \end{gathered} \tag{4}$$

и в случае постановки задачи E:

$$\begin{gathered} xy_k''(x) + c(x)y_k'(x) - (a(x) + \pi^2k^2)y_k(x) = f_k(x), \quad x \in (0, b), \\ |y_k(0)| < +\infty, \quad y_k(b) = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \end{gathered} \tag{5}$$

где $f_k(t)$ – коэффициенты спектрального разложения $f(x, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t)\psi_k(x)$.

В п. 1 данной работы исследуются задачи (5). Для некоторой серии решений уравнений из задач (5) с нулевой правой частью будет получена асимптотика решений при $k \to +\infty$. На основании этого результата в п. 2 будут получены оценки для функций из фундаментальной системы решений задач (4) и (5), а также их функций Грина. Подобные результаты для функции Грина в самосопряжённом случае для ОДУ без вырождения следуют, например, из результатов [14, гл. I]. Общие результаты для задачи Коши для систем ОДУ без вырождения изложены в книге [15, гл. VI].

В п. 3 методом спектрального выделения особенностей будут построены формальные решения задач (1) и (2) в виде рядов (3) (при соответствующих τ_k). Полученные в п. 2 оценки функций Грина позволят доказать сходимость этих рядов к классическим решениям задач (1) и (2).

Результат работы можно трактовать как обобщение теоремы Коши–Ковалевской на рассмотренные вырождающиеся эллиптические уравнения – предложенная форма решения указывает, каким образом аналитичность коэффициентов уравнения наследуется решением задачи.

1. Асимптотическая формула решения задачи Коши для дифференциального уравнения с линейным вырождением. Рассмотрим следующую задачу для дифференциального уравнения с линейным вырождением:

$$xy_k'' + c(x)y_k' - (a(x) + \pi^2 k^2)y_k = 0, \quad x \in (0, b),$$

$$y_k(0) = 1, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

В этом разделе мы полагаем, что коэффициенты $a(x)$ и $c(x)$ уравнения являются непрерывно дифференцируемыми на промежутке $[0, b]$ функциями, при этом производная функции $\bar{c}(x) = (c(x) - c(0))/x$ непрерывна на $(0, b]$ и может иметь интегрируемую особенность в точке 0. Положим, что $a(x) \geqslant 0$, $c(0) \equiv c_0 \geqslant 1$.

Получим равномерную асимптотику последовательности решений $y_k(x)$ данной задачи (6) при $k \to +\infty$. При этом решение полагается априорно существующим и единственным при каждом $k > 0$.

Некоторые аналоги требуемых результатов в случае без вырождения следуют из [14, с. 17, лемма 2.2] или же могут быть получены с использованием теоремы Тихонова [16, § 7]. Наличие вырождения существенно затрудняет доказательство.

В соответствии с методом спектрального выделения особенностей [9; 10; 11, гл. X; 12; 13] рассмотрим вспомогательную задачу

$$x\bar{y}_k'' + c(0)\bar{y}_k' - \pi^2 k^2 \bar{y}_k = 0, \quad x \in (0, b),$$

$$\bar{y}_k(0) = 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Разложив $\bar{y}_k(x)$ в ряд по степеням x и приравняв коэффициенты при равных степенях x, легко показать [17, с. 51], что

$$\bar{y}_k(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\pi k i\sqrt{x})^\alpha} J_\alpha(2\pi k i\sqrt{x}), \quad k \in \mathbb{N},$$

где J_α – функция Бесселя первого рода, i – мнимая единица, $\alpha = c_0 - 1$.

Перейдём в задаче (6) к малому параметру $\mu = 1/(\pi k)$ и будем искать её решение в следующем виде:

$$y(x, \mu) = \bar{y}(x, \mu) \cdot z(x, \mu), \quad \mu > 0,$$

где $z(x, \mu)$ – новая неизвестная функция, $\bar{y}(x, \mu) = \bar{y}_k(x)$ при $k = 1/\pi\mu$. Подставим данное соотношение в уравнение (6) и поделим полученное выражение на $\bar{y}(x, \mu)$. Введём вспомогательные обозначения

$$\bar{c}(x) = (c(x) - c_0)/x, \quad R_\mu(x) = -iJ_{\alpha+1}(2i\sqrt{x}/\mu)/J_\alpha(2i\sqrt{x}/\mu), \quad \tilde{R}_\mu(x) = \bar{y}'(x, \mu)/\bar{y}(x, \mu).$$

В силу формул дифференцирования функций Бесселя [17, с. 56] имеет место соотношение $\tilde{R}_\mu(x) = R_\mu(x)/(\mu\sqrt{x})$, и полученную для $z(x, \mu)$ задачу можно записать как

$$\mu x \frac{d^2 z}{dx^2} + 2\sqrt{x}R_\mu(x)\frac{dz}{dx} + \mu c(x)\frac{dz}{dx} + \bar{c}(x)\sqrt{x}R_\mu(x)z - \mu a(x)z = 0, \quad x \in (0, b),$$

$$z(0, \mu) = 1, \quad \mu > 0. \tag{7}$$

Принимая во внимание тот факт, что $R_\mu(x) \to 1$ при $\mu \to 0 + 0, x > 0$ (см. асимптотики $J_\alpha(ix)$ в [17, с. 222] при $x \to +\infty$), запишем предельную задачу (7) при $\mu = 0$:

$$2\frac{d\bar{z}}{dx} + \bar{c}(x)\bar{z} = 0, \quad x \in (0, b),$$

$$\bar{z}(0) = 1. \tag{8}$$

Далее докажем, что $z(x,\mu) \to \bar{z}(x)$ при $\mu \to 0+0$, $x \in (0,b]$. Введём функцию

$$\varphi(x,\mu) = \frac{\mu a(x) - \bar{c}(x)\sqrt{x}R_\mu(x)}{\mu c(x) + 2\sqrt{x}R_\mu(x)}, \quad x \in (0,b], \quad \mu > 0.$$

Функция $\varphi(x,\mu)$ определяет начальное значение $z'(x,\mu)$ при $x=0$: $z'(0,\mu) = \varphi(0,\mu)$, $\varphi(x,\mu)$ непрерывна при $(x,\mu) \in [0,b] \times [0,\mu_0] \setminus \{(0,0)\}$ и, вообще говоря, имеет разрыв в точке $(0,0)$. Исследуем её свойства при $(x,\mu) \to (0,0)$. Для начала отметим, что $R_\mu(x) \sim \mathrm{const} \times \sqrt{x}/\mu$ при $(x,\mu) \to (0,0)$, $R_\mu(x) \leqslant 1$, $x \in [0,b]$, $\mu > 0$, а $a(x)$ и $\bar{c}(x)$ являются непрерывно дифференцируемыми на $(0,b]$, непрерывными и интегрируемыми на $[0,b]$ функциями, $c(0) \geqslant 1$, следовательно, в достаточно малой окрестности точки $(0,0)$ справедлива цепочка неравенств

$$|\varphi(x,\mu)| \leqslant \left|\frac{\mu a(x)}{\mu c(x) + 2\sqrt{x}R_\mu(x)}\right| + \left|\frac{\bar{c}(x)\sqrt{x}R_\mu(x)}{\mu c(x) + 2\sqrt{x}R_\mu(x)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{\mu a(x)}{\mu c(x)}\right| + \left|\frac{\bar{c}(x)\sqrt{x}R_\mu(x)}{2\sqrt{x}R_\mu(x)}\right| \leqslant \left|\frac{a(x)}{c(x)}\right| + \left|\frac{\bar{c}(x)}{2}\right| \leqslant \mathrm{const},$$

т.е. $\varphi(x,\mu)$ ограничена в некоторой окрестности точки $(0,0)$, а значит, и в $[0,b] \times [0,\mu_0]$. Далее, имеем

$$R'_\mu(x) = \frac{1}{\mu\sqrt{x}}\left(1 - \mu\frac{2\alpha+1}{2\sqrt{x}}R_\mu(x) - R^2_\mu(x)\right), \quad |R'_\mu(x)| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{\mu\sqrt{x}},$$

следовательно, функцию $\varphi'_x(x,\mu)$ можно оценить следующим образом:

$$|\varphi'_x(x,\mu)| \leqslant \left|\frac{\mu a'(x) - \bar{c}'(x)\sqrt{x}R_\mu(x) - \bar{c}(x)R_\mu(x)/2\sqrt{x} - \bar{c}(x)\sqrt{x}R'_\mu(x)}{\mu c(x) + 2\sqrt{x}R_\mu(x)}\right| +$$

$$+\left|\frac{(\mu a(x) - \bar{c}(x)\sqrt{x}R_\mu(x))(\mu c'(x) + R_\mu(x)/\sqrt{x} + 2\sqrt{x}R'_\mu(x))}{(\mu c(x) + 2\sqrt{x}R_\mu(x))^2}\right|.$$

Оценивая данные дроби аналогично $\varphi(x,\mu)$ в достаточно малой окрестности точки $(0,0)$, получаем неравенство

$$|\varphi'_x(x,\mu)| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{x}, \quad x \in [0,b], \quad \mu \geqslant 0.$$

Таким образом, функция $x\varphi'_x(x,\mu)$ является ограниченной в прямоугольнике $[0,b] \times [0,\mu_0]$.

Сведём уравнение второго порядка (7) к системе дифференциальных уравнений, положив $w(x,\mu) = z'_x(x,\mu)$:

$$\mu x\frac{dw}{dx} + 2\sqrt{x}R_\mu(x)w + \mu c(x)w + \bar{c}(x)\sqrt{x}R_\mu(x)z - \mu a(x)z = 0, \quad x \in (0,b),$$

$$\frac{dz}{dx} = w,$$

$$z(0,\mu) = 1, \quad \mu > 0. \tag{9}$$

При этом $w(0,\mu) = \varphi(0,\mu)$. Сделаем в задаче (9) замену неизвестных функций таким образом, чтобы начальные условия стали нулевыми. Пусть

$$z = \hat{z} + 1, \quad w = \varphi(x,\mu) + \varphi(x,0)\hat{z} + \hat{w}.$$

Тогда задача (9) будет преобразована к виду

$$\mu x\frac{d\hat{w}}{dx} + \mu x\varphi'_x(x,\mu) + \mu x\varphi'_x(x,0)\hat{z} + \mu x\varphi(x,0)\frac{d\hat{z}}{dx} + 2\sqrt{x}R_\mu(x)\hat{w} + \mu c(x)\hat{w} +$$

$$+\bar{c}(x)\sqrt{x}R_\mu(x)\hat{z}-\mu a(x)\hat{z}+\hat{z}\varphi(x,0)(2\sqrt{x}R_\mu(x)+\mu c(x))=0,$$
$$\frac{d\hat{z}}{dx}=\varphi(x,\mu)+\varphi(x,0)\hat{z}+\hat{w},$$
$$\hat{z}(0,\mu)=\hat{w}(0,\mu)=0,\quad x\in(0,b),\quad \mu>0.$$

Подставим $d\hat{z}/dx$ из второго уравнения в первое. Введём для удобства следующие обозначения:

$$A(x)=-x\frac{\bar{c}(x)}{2}+c(x),\quad B(x)=-x\frac{\bar{c}'(x)}{2}+x\frac{\bar{c}^2(x)}{4}-a(x)-\frac{\bar{c}(x)c(x)}{2},$$
$$D(x)=-\frac{\bar{c}(x)}{2},\quad \Phi(x,\mu)=-x\varphi'_x(x,\mu)+x\frac{\bar{c}(x)}{2}\varphi(x,\mu).$$

После подстановки получим окончательный вид задачи (9) в новых неизвестных:

$$\mu x\frac{d\hat{w}}{dx}+2\sqrt{x}R_\mu(x)\hat{w}+\mu A(x)\hat{w}+\mu B(x)\hat{z}=\mu\Phi(x,\mu),$$
$$\frac{d\hat{z}}{dx}=D(x)\hat{z}+\hat{w}+\varphi(x,\mu),$$
$$\hat{z}(0,\mu)=\hat{w}(0,\mu)=0,\quad x\in(0,b),\quad \mu>0. \tag{10}$$

Коэффициенты $A(x)$, $B(x)$ и $D(x)$ являются непрерывными на $[0,b]$, при этом функция $A(x)$ непрерывно дифференцируема и $A(0)=c(0)$, функции $\Phi(x,\mu)$, $\varphi(x,\mu)$ ограничены в $[0,b]\times[0,\mu_0]$ и интегрируемы по x при любом $\mu\geqslant 0$.

Сформулируем и докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть семейство функций* $v_\mu(x)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$0\leqslant v_\mu(x)\leqslant A+\varkappa\int\limits_0^x \ln\frac{x}{\xi}v_\mu(\xi)\,d\xi,\quad x\in[0,b], \tag{11}$$

равномерно по $\mu\in\{\mu\}$; *постоянные* $A,\varkappa>0$. *Тогда существует постоянная* $C>0$, *не зависящая от* μ *и* x, *такая, что справедливы неравенства*

$$0\leqslant v_\mu(x)\leqslant C,\quad \forall x\in[0,b],\quad \forall\mu\in\{\mu\}.$$

Доказательство. Заменим (11) на более слабое неравенство

$$0\leqslant v_\mu(x)\leqslant A+\varkappa\int\limits_0^x \ln\frac{b}{\xi}v_\mu(\xi)\,d\xi,\quad x\in[0,b],\quad \mu\in\{\mu\}.$$

Положим

$$V_\mu(x)=\int\limits_0^x \ln\frac{b}{\xi}v_\mu(\xi)\,d\xi\geqslant 0,\quad V'_\mu(x)=\ln\frac{b}{x}v_\mu(x),\quad V_\mu(0)=0,\quad x\in(0,b],\quad \mu\in\{\mu\}.$$

Тогда имеем

$$0\leqslant\frac{V'_\mu(x)}{\ln(b/x)}\leqslant A+\varkappa V_\mu(x),\quad x\in(0,b],\quad \mu\in\{\mu\},$$
$$0\leqslant V'_\mu(x)\leqslant A\ln\frac{b}{x}+\varkappa V_\mu(x)\ln\frac{b}{x},\quad x\in(0,b],\quad \mu\in\{\mu\}. \tag{12}$$

Рассмотрим задачу

$$\bar{V}'(x) = A\ln\frac{b}{x} + \varkappa\bar{V}(x)\ln\frac{b}{x},$$
$$\bar{V}(0) = 0, \quad x\in[0,b], \quad \mu\in\{\mu\}. \tag{13}$$

Её решение имеет вид

$$\bar{V}(x) = \bar{V}_0(x)\int\limits_0^x \frac{A\ln(b/\xi)}{\bar{V}_0(\xi)}\,d\xi, \quad \bar{V}_0(x) = e^{b\varkappa x}\left(\frac{x}{b}\right)^{-\varkappa x}, \quad x\in[0,b], \quad \mu\in\{\mu\},$$

так как $0 < C_0 \leqslant \bar{V}_0(x) \leqslant C_1$, очевидно, что $\bar{V}(x)$ – ограниченная и положительная функция.

Покажем, что $0\leqslant V_\mu(x)\leqslant \bar{V}(x)$. Действительно, существует функция $\rho_\mu(x)$ такая, что

$$V'_\mu(x) = \rho_\mu(x)\left(A\ln\frac{b}{x} + \varkappa\ln\frac{b}{x}V_\mu(x)\right), \quad 0\leqslant\rho_\mu(x)\leqslant 1, \quad x\in(0,b], \quad \mu\in\{\mu\}.$$

Обозначив разность $\bar{V}(x) - V_\mu(x) = d_\mu(x)$, получим, совместив последнее уравнение и условие (13), следующую задачу:

$$d'_\mu(x) = \bar{\rho}_\mu(x)\left(A\ln\frac{b}{x} + \varkappa\ln\frac{b}{x}\,\bar{V}(x)\right) + \rho_\mu(x)\varkappa\ln\frac{b}{x}\,d_\mu(x),$$
$$d_\mu(0) = 0, \quad x\in(0,b], \quad \mu\in\{\mu\},$$

где $0\leqslant\bar{\rho}_\mu(x) = 1-\rho_\mu(x)\leqslant 1$. Последняя задача решается в квадратурах. С учётом свойств коэффициентов уравнения, анализируя полученный интеграл, имеем $d_\mu(x)\geqslant 0$, что равносильно

$$V_\mu(x)\leqslant\bar{V}(x)\leqslant\bar{C} = \mathrm{const}.$$

Выразим $V'_\mu(x)$ через $v_\mu(x)$, подставим данное соотношение и полученную оценку в (12):

$$0\leqslant\ln\frac{b}{x}v_\mu(x)\leqslant A\ln\frac{b}{x} + \varkappa\ln\frac{b}{x}\bar{C}, \quad x\in(0,b], \quad \mu\in\{\mu\},$$
$$0\leqslant v_\mu(x)\leqslant A + \varkappa\bar{C} = C, \quad x\in(0,b], \quad \mu\in\{\mu\}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Рассмотрим задачу*

$$\mu x\frac{d\hat{w}}{dx} + 2\sqrt{x}R_\mu(x)\hat{w} + \mu A(x)\hat{w} + \mu B(x)\hat{z}(x) = \mu\Phi(x,\mu),$$
$$\hat{w}(0,\mu) = 0, \quad x\in[0,b], \quad \mu > 0, \tag{14}$$

где $\hat{z}(x)$ – некоторая ограниченная и интегрируемая на $[0,b]$ функция. Тогда решение (классическое) $\hat{w}(x)$ задачи (14) существует, единственно, и для любых $x\in[0,b]$, $\mu\in(0,\mu_0]$ справедливы оценки

$$|\hat{w}(x)|\leqslant W_1 + W_2\max_{\xi\in[0,x]}|\hat{z}(\xi)|, \quad |\hat{w}(x)|\leqslant W_1 + W_2\frac{1}{x}\int\limits_0^x|\hat{z}(\xi)|\,d\xi, \tag{15}$$

где константы W_1 и W_2 не зависят от x, μ и $\hat{z}(x)$.

Доказательство. I. Найдём решение однородного уравнения (14)

$$\mu x\frac{d\mathring{w}}{dx} + 2\sqrt{x}R_\mu(x)\mathring{w} + \mu A(x)\mathring{w} = 0, \quad \frac{d\mathring{w}}{\mathring{w}} = \left(-\frac{2}{\sqrt{x}}R_\mu(x) - \frac{A(x)}{x}\right)dx,$$

$$\mathring{w}(x) = \exp\biggl(-\int\limits_b^x \frac{2R_\mu(\xi)}{\mu\sqrt{\xi}}\,d\xi\biggr)\exp\biggl(-\int\limits_b^x \frac{A(\xi)}{\xi}\,d\xi\biggr).$$

Введём обозначение

$$P(x,\mu) = -\int\limits_b^x \frac{2R_\mu(\xi)}{\sqrt{\xi}}\,d\xi.$$

$P(x,\mu)$ при каждом фиксированном $\mu>0$ является непрерывной, монотонно убывающей на $[0,b]$ функцией переменного x.

Разложим $A(x) = c_0 + \bar{A}(x)$. Заметим, что $\bar{A}(x)/x$ является непрерывной функцией на отрезке $[0,b]$. Тогда

$$\exp\biggl(-\int\limits_b^x \frac{A(\xi)}{\xi}\,d\xi\biggr) = \exp\biggl(-\int\limits_b^x \frac{c_0}{\xi}\,d\xi\biggr)\exp\biggl(-\int\limits_b^x \frac{\bar{A}(\xi)}{\xi}\,d\xi\biggr) =$$

$$= \exp(c_0\ln b - c_0\ln x)\exp\biggl(-\int\limits_b^x \frac{\bar{A}(\xi)}{\xi}\,d\xi\biggr) = x^{-c_0}\hat{A}(x),$$

где

$$0 < C_1 \leqslant \hat{A}(x) = b^{c_0}\exp\biggl(-\int\limits_b^x \frac{\bar{A}(\xi)}{\xi}\,d\xi\biggr) \leqslant C_2.$$

Объединив оценки, получим

$$C_1 e^{P(x,\mu)/\mu}x^{-c_0} \leqslant \mathring{w}(x) \leqslant C_2 e^{P(x,\mu)/\mu}x^{-c_0}, \quad x\in[0,b], \quad \mu>0.$$

II. Методом вариации произвольной постоянной получим решение задачи (14):

$$\hat{w}(x) = \mathring{w}(x)\int\limits_0^x \frac{\Phi(\xi,\mu) - B(\xi)\hat{z}(\xi)}{\xi\mathring{w}(\xi)}\,d\xi.$$

Для получения равномерной оценки (15) вынесем максимум модуля $\hat{z}(x)$ из интеграла. Положим $M = \max\limits_{\substack{\xi\in[0,x]\\ \mu\in[0,\mu_0]}} (|\Phi(\xi,\mu)|, |B(\xi)|)$. В результате будем иметь

$$|\hat{w}(x)| \leqslant \int\limits_0^x \frac{|\Phi(\xi,\mu)|\mathring{w}(x)}{\xi\mathring{w}(\xi)}\,d\xi + \max_{\xi\in[0,x]}|\hat{z}(\xi)|\int\limits_0^x \frac{|B(\xi)|\mathring{w}(x)}{\xi\mathring{w}(\xi)}\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant M\Bigl(1 + \max_{\xi\in[0,x]}|\hat{z}(\xi)|\Bigr)\int\limits_0^x \frac{C_2 e^{P(x,\mu)/\mu}x^{-c_0}}{\xi C_1 e^{P(\xi,\mu)/\mu}\xi^{-c_0}}\,d\xi =$$

$$= \frac{MC_2}{C_1}\Bigl(1 + \max_{\xi\in[0,x]}|\hat{z}(\xi)|\Bigr)x^{-c_0}\int\limits_0^x e^{(P(x,\mu)-P(\xi,\mu))/\mu}\xi^{c_0-1}\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{MC_2}{C_1}\Bigl(1 + \max_{\xi\in[0,x]}|\hat{z}(\xi)|\Bigr)x^{-c_0}\int\limits_0^x \xi^{c_0-1}\,d\xi = \frac{MC_2}{C_1 c_0}\Bigl(1 + \max_{\xi\in[0,x]}|\hat{z}(\xi)|\Bigr).$$

Теперь получим интегральную оценку (15). Отметим, что $x\mathring{w}(x)/(\xi\mathring{w}(\xi)) \leqslant C_2/C_1$ при $0 \leqslant \xi \leqslant x$. Через $\bar{M}$ обозначим величину

$$\bar{M} = \max\biggl(\frac{x\mathring{w}(x)|B(\xi)|}{\xi\mathring{w}(\xi)}\biggr),$$

где максимум берётся по всем значениям $\mu \in [0, \mu_0]$, $x \in [0, b]$, $\xi \in [0, x]$.

Оценим $\hat{w}(x)$ иначе:

$$|\hat{w}(x)| \leqslant \int\limits_0^x \frac{|\Phi(\xi,\mu)|\mathring{w}(x)}{\xi\mathring{w}(\xi)}\,d\xi + \frac{1}{x}\int\limits_0^x \frac{x\mathring{w}(x)|B(\xi)||\hat{z}(\xi)|}{\xi\mathring{w}(\xi)}\,d\xi \leqslant \frac{MC_2}{C_1c_0} + \bar{M}\frac{1}{x}\int\limits_0^x |\hat{z}(\xi)|\,d\xi.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Рассмотрим задачу*

$$\frac{d\hat{z}}{dx} = D(x)\hat{z} + \hat{w}(x) + \varphi(x,\mu),$$
$$\hat{z}(0,\mu) = 0, \quad x \in [0,b], \quad \mu > 0, \tag{16}$$

где $\hat{w}(x)$ *– некоторая ограниченная и интегрируемая на* $[0, b]$ *функция. Тогда решение (классическое)* $\hat{z}(x)$ *задачи (16) существует, единственно и для любых* $x \in [0, b]$, $\mu \in (0, \mu_0]$ *справедлива оценка*

$$|\hat{z}(x)| \leqslant Z_1 + Z_2\int\limits_0^x |\hat{w}(\xi)|\,d\xi, \tag{17}$$

где константы Z_1 *и* Z_2 *не зависят от* x, μ *и выбора* $\hat{w}(x)$.

Доказательство. I. Аналогично доказательству леммы 2 найдём решение однородного уравнения

$$\frac{d\mathring{z}}{dx} = D(x)\mathring{z}, \quad 0 < \bar{Z}_1 \leqslant \mathring{z}(x) = \exp\biggl(\int\limits_0^x D(\xi)\,d\xi\biggr) \leqslant \bar{Z}_2.$$

II. Решение задачи (16) имеет вид

$$\hat{z}(x) = \mathring{z}(x)\int\limits_0^x \frac{\hat{w}(\xi) + \varphi(\xi,\mu)}{\mathring{z}(\xi)}\,d\xi.$$

Применив полученные оценки $\mathring{z}(x)$, придём к неравенству

$$|\hat{z}(x)| \leqslant \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1}\biggl(\max_{\substack{\xi\in[0,x]\\ \mu\in[0,\mu_0]}} |\varphi(\xi,\mu)| + \int\limits_0^x |\hat{w}(\xi)|\,d\xi\biggr),$$

что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Решение* $\{\hat{z}(x), \hat{w}(x)\}$ *системы (10) равномерно ограничено по* $x \in [0, b]$, $\mu \in [0, \mu_0]$, *если оно существует.*

Доказательство. Система (10) является объединением задач (14) и (16). Её решение существует, следовательно, является непрерывным на $[0, b]$ при каждом фиксированном $\mu > 0$. Тогда, применив лемму 2 и второе соотношение (15), а также лемму 3 и соотношение (17), получим

$$|\hat{w}(x)| \leqslant W_1 + W_2\frac{1}{x}\int\limits_0^x |\hat{z}(\xi)|\,d\xi, \quad |\hat{z}(x)| \leqslant Z_1 + Z_2\int\limits_0^x |\hat{w}(\xi)|\,d\xi.$$

Совместим данные неравенства:

$$|\hat{z}(x)| \leqslant Z_1 + Z_2 \int_0^x \left(W_1 + W_2 \frac{1}{\xi} \int_0^\xi |\hat{z}(\zeta)|\, d\zeta \right) d\xi \leqslant$$

$$\leqslant Z_1 + bZ_2W_1 + Z_2W_2 \int_0^x |\hat{z}(\zeta)| \int_\zeta^x \frac{1}{\xi}\, d\xi\, d\zeta = Z_1 + bZ_2W_1 + Z_2W_2 \int_0^x |\hat{z}(\zeta)| \ln \frac{x}{\zeta}\, d\zeta.$$

Таким образом, для $|\hat{z}(x)|$ выполнены все условия леммы 1, следовательно, существует постоянная $C_1 > 0$ такая, что $|\hat{z}(x)| \leqslant C_1$ равномерно по всем $x \in [0, b]$, $\mu \in [0, \mu_0]$.

Использовав первое неравенство (15) леммы 2, оценим $\hat{w}(x)$:

$$|\hat{w}(x)| \leqslant W_1 + W_2 \max_{\xi \in [0,x]} |\hat{z}(\xi)| \leqslant W_1 + W_2 C_1 = C_2.$$

Лемма доказана.

Сформулируем и докажем теорему о предельном переходе в задаче (7) при $\mu \to 0+0$.

Теорема 1. *Пусть решение задачи (7) существует. Тогда найдётся постоянная $M > 0$, не зависящая от μ, такая, что*

$$|z(x,\mu)|, |z'_x(x,\mu)| \leqslant M, \quad |z''_{xx}(x,\mu)| \leqslant M/(\mu x), \quad x \in [0,b], \quad \mu \in (0, \mu_0].$$

Кроме того, решение $z(x,\mu)$ задачи (7) сходится к решению $\bar{z}(x)$ предельной задачи (8) при $\mu \to 0+0$ равномерно по $x \in [0,b]$. Для любого $\varepsilon \in (0,b)$ $z'_x(x,\mu)$ сходится к $\bar{z}'(x)$ при $\mu \to 0+0$ равномерно по $x \in [\varepsilon, b]$.

Доказательство. Из леммы 4 следует равномерная ограниченность функций $|\hat{z}(x,\mu)|$ и $|\hat{w}(x,\mu)|$:

$$z(x) = \hat{z}(x) + 1, \quad z'(x) = w(x) = \varphi(x,\mu) + \varphi(x,0)\hat{z}(x) + \hat{w}(x),$$

$$z''(x) = w'(x) = -\frac{2\sqrt{x}R_\mu(x)w(x) + \mu c(x)w(x) + \bar{c}(x)\sqrt{x}R_\mu(x)z(x) - \mu a(x)z(x)}{\mu x},$$

из чего, очевидно, следуют оценки теоремы. Кроме того, из этого факта следует предкомпактность множества решений $\{z(x,\mu)\}_{\mu \in (0,\mu_0]}$ в $C[0,b]$, а значит, и $\{\hat{z}(x,\mu)\}_{\mu \in (0,\mu_0]}$.

В доказательстве леммы 2 было получено интегральное представление для $\hat{w}(x)$:

$$\hat{w}(x) = \mathring{w}(x) \int_0^x \frac{\Phi(\xi,\mu) - B(\xi)\hat{z}(\xi)}{\xi \mathring{w}(\xi)}\, d\xi = \int_0^x \frac{\mathring{w}(x)}{\xi \mathring{w}(\xi)} L(\xi,\mu)\, d\xi,$$

где $|L(x,\mu)| < C_3$ в силу доказанной ограниченности $\hat{z}(x)$.

Применим в данном неравенстве оценки $\mathring{w}(x)$ сверху и снизу из доказательства леммы 2:

$$|\hat{w}(x)| \leqslant C_3 \int_0^x \frac{C_2 x^{-c_0} \exp(P(x,\mu)/\mu)}{\xi C_1 \xi^{-c_0} \exp(P(\xi,\mu)/\mu)}\, d\xi \leqslant \frac{C_3 C_2}{C_1} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{x \exp(P(x,\mu)/\mu)}{\xi \exp(P(\xi,\mu)/\mu)}\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_3C_2}{C_1\varepsilon} \int_0^x \exp\left(\frac{1}{\mu}(P(x,\mu) - P(\xi,\mu))\right) d\xi = \frac{C_3C_2}{C_1\varepsilon} \int_0^x \exp\left(-\frac{1}{\mu} \int_\xi^x \frac{2R_\mu(\zeta)}{\sqrt{\zeta}}\, d\zeta\right) d\xi.$$

При достаточно малых μ имеет место оценка снизу $2R_\mu(x) \geqslant x/b$, $x \in [0,b]$. Таким образом,

$$|\hat{w}(x)| \leqslant \frac{C_3C_2}{C_1\varepsilon}\int\limits_0^x \exp\left(-\frac{1}{\mu}\int\limits_\xi^x \frac{2p\zeta}{b\sqrt{\zeta}}\,d\zeta\right)d\xi = \frac{2pC_3C_2}{C_1\varepsilon}\int\limits_0^x \exp\left(-\frac{2}{3b\mu}\frac{x^3-\xi^3}{x^{3/2}+\xi^{3/2}}\right)d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2pC_3C_2}{C_1\varepsilon}\int\limits_0^x \exp\left(-\frac{1}{3b^{5/2}\mu}(x-\xi)(x^2+x\xi+\xi^2)\right)d\xi \leqslant \frac{2pC_3C_2}{C_1\varepsilon}\int\limits_0^x \exp\left(-\frac{1}{\mu}\frac{\varepsilon^2}{3b^{5/2}}(x-\xi)\right)d\xi.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0,b)$ и введём величины

$$C_4 = \varepsilon^2/3b^{5/2} \geqslant 0, \quad C_5 = 2pC_3C_2/C_1\varepsilon \geqslant 0.$$

Тогда

$$|\hat{w}(x)| \leqslant C_5\int\limits_0^x \exp\left(-\frac{C_4}{\mu}(x-\xi)\right)d\xi \leqslant \mu\frac{C_5}{C_4}\exp\left(-\frac{C_4}{\mu}x\right)\exp\left(\frac{C_4}{\mu}x\right) = C\mu \to 0, \quad \mu \to 0+0,$$

т.е. $\hat{w}(x) \to 0$ равномерно на любом $[\varepsilon,b]$ при $\mu \to 0+0$. Так как функция $\hat{w}(x)$ равномерно ограничена на $[0,b]$, она сходится на нём к 0 в среднем.

Выделим из $\{z(x,\mu)\}_{\mu\in(0,\mu_0]}$ произвольную последовательность с $\mu \to 0+0$, имеющую равномерный предел. Пусть $\hat{z}(x,\mu_l) \to \tilde{z}(x)$ при $\mu_l \to 0+0$. Перейдём от задачи (10) к эквивалентной ей системе интегральных уравнений и подставим в неё $\hat{z}(x,\mu_l)$ и $\hat{w}(x,\mu_l)$:

$$\int\limits_0^x \mu\xi\frac{d\hat{w}}{dx}(\xi)\,d\xi \equiv \mu x\hat{w}(x) - \int\limits_0^x \mu\hat{w}(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int\limits_0^x [\mu\Phi(\xi,\mu) - 2\sqrt{\xi}R_\mu(\xi)\hat{w}(\xi) - \mu A(\xi)\hat{w}(\xi) - \mu B(\xi)\hat{z}(\xi)]\,d\xi,$$

$$\hat{z}(x) = \int\limits_0^x [D(\xi)\hat{z}(\xi) + \hat{w}(\xi) + \varphi(\xi,\mu)]\,d\xi, \quad x \in [0,b], \quad \mu > 0.$$

Данная система допускает предельный переход при $\mu_l \to 0+0$. Первое уравнение обратится в тождество $0=0$, из второго будет получено

$$\tilde{z}(x) = \int\limits_0^x [D(\xi)\tilde{z}(\xi) + \varphi(\xi,0)]\,d\xi, \quad x \in [0,b]. \tag{18}$$

Решение $\tilde{z}(x)$ этого уравнения существует и единственно.

Таким образом, любая последовательность $\{\hat{z}(x,\mu_l)\}$ при $\mu_l \to 0+0$ имеет единственную в $C[0,b]$ предельную точку $\tilde{z}(x)$, являющуюся решением интегрального уравнения (18). Доказано, что при $\mu \to 0+0$ $\hat{z}(x,\mu) \to \tilde{z}(x)$ равномерно сходится на $[0,b]$, для любого $\varepsilon \in$ $\in (0,b]$ $\hat{w}(x,\mu) \to 0$ равномерно на $[\varepsilon,b]$. Так как $\varphi(x,0) = -\bar{c}(x)/2 = D(x)$, то уравнение (18) примет вид

$$\tilde{z}(x) = -\int\limits_0^x \frac{\bar{c}(x)}{2}(\tilde{z}(\xi)+1)\,d\xi, \quad x \in [0,b].$$

Отметим, что при $\mu \to 0+0$ функция $z(x,\mu)$ сходится равномерно к $\bar{\bar{z}}(x) = \tilde{z}(x) - 1$. Тогда

$$\bar{\bar{z}}(x) = 1 - \int\limits_0^x \frac{\bar{c}(x)}{2} \bar{\bar{z}}(\xi)\, d\xi, \quad x \in [0,b].$$

Продифференцировав это уравнение, получим для функции $\bar{\bar{z}}(x)$ задачу (8), т.е. именно решение (8) $\bar{z}(x)$ является равномерным пределом $z(x,\mu)$:

$$z'(x,\mu) = w(x,\mu) = \varphi(x,\mu) + \varphi(x,0)\hat{z}(x,\mu) + \hat{w}(x,\mu) \to \varphi(x,0)(1+\tilde{z}(x)) = -\frac{\bar{c}(x)}{2}\bar{z}(x) = \bar{z}'(x),$$

указанная сходимость – равномерная на $[\varepsilon, b]$ для любого $b \geqslant \varepsilon > 0$. Теорема полностью доказана.

Приведём следствия теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть решение задачи (6) $y_k(x)$ существует. Тогда*

$$y_k(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\pi k i\sqrt{x})^\alpha} J_\alpha(2\pi k i\sqrt{x})\left(\exp\left(-\int\limits_0^x \frac{\bar{c}(\xi)}{2}\, d\xi\right) + \bar{o}(1)\right), \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in [0,b],$$

при $k \to +\infty$ равномерно на $x \in [0,b]$.

Для доказательства достаточно найти решение задачи (8) $\bar{z}(x)$, применить теорему 1 о равномерной сходимости $z(x,\mu)$ к $\bar{z}(x)$ и вернуться к начальным обозначениям задачи (6).

2. Оценки функций из фундаментальной системы решений и функции Грина.

Теорема 3. *Пусть решение задачи (6) $y_k(x)$ существует. Тогда найдутся не зависящие от $x \in [0,b]$ и $k > 0$ постоянные $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ такие, что при достаточно больших k и $x \in [0,b]$ имеют место неравенства*

$$0 < C_1 \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1 + (\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \leqslant y_k(x) \leqslant C_2 \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1 + (\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}, \tag{19}$$

$$0 < C_1 k \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1 + (\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \leqslant y_k'(x) \leqslant C_2 \frac{k}{\sqrt{x}} \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1 + (\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}, \tag{20}$$

$$|y_k''(x)| \leqslant C_2 \frac{k^2}{x} \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1 + (\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}. \tag{21}$$

Доказательство. I. Вновь воспользуемся разложением $y_k(x) = \bar{y}_k(x) z_k(x)$, где $z_k(x) = z(x, \mu = 1/(\pi k))$. При $t \to +\infty$ имеет место следующая асимптотическая формула [17, с. 222]:

$$J_\alpha(it) = \frac{\mathrm{const}}{\sqrt{t}} e^t \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

Применим её к $\bar{y}_k(x)$. Существуют постоянные $A > 0$, $B_1 > 0$ и $B_2 > 0$ такие, что выполнено

$$0 < B_1 \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \leqslant \bar{y}_k(x) \leqslant B_2 \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}, \quad k\sqrt{x} \geqslant A.$$

При $0 \leqslant k\sqrt{x} \leqslant A$ можно выбрать постоянные $B_3 > 0$ и $B_4 > 0$ так, чтобы выполнялось

$$0 < B_3 \leqslant \bar{y}_k(x) \leqslant B_4, \quad 0 \leqslant k\sqrt{x} \leqslant A.$$

Совместив последние неравенства, имеем

$$0 < B_5 \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1 + (\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \leqslant \bar{y}_k(x) \leqslant B_6 \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1 + (\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}, \quad B_5, B_6 > 0. \tag{22}$$

Аналогично могут быть оценены производные

$$\bar{y}'_k(x) = -\frac{\pi k i}{\sqrt{x}}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\pi k i\sqrt{x})^\alpha}J_{\alpha+1}(2\pi k i\sqrt{x}),$$

$$0 < B_5 k\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \leqslant \bar{y}'_k(x) \leqslant B_6\frac{k}{\sqrt{x}}\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}, \quad B_5, B_6 > 0, \tag{23}$$

$$\bar{y}''_k(x) = -\frac{\pi^2 k^2}{x}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(\pi k i\sqrt{x})^\alpha}J_{\alpha+2}(2\pi k i\sqrt{x}),$$

$$\bar{y}''_k(x) \leqslant B_6\frac{k^2}{x}\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}. \tag{24}$$

II. В силу теоремы 1 $z_k(x) \underset{k\to+\infty}{\to} \bar{z}(x)$ – решению задачи (8). Тогда найдётся достаточно большой номер k_0 и постоянные $D_1 > 0$ и $D_2 > 0$ такие, что $0 < D_1 \leqslant z_k(x) \leqslant D_2$; $|z'_k(x)| \leqslant D_2$, $|z''_k(x)| \leqslant D_2 k/x$ при $k \geqslant k_0$. В совокупности с неравенствами (22) эти оценки дают (19):

$$y'_k(x) = \bar{y}'_k(x)z_k(x) + \bar{y}_k(x)z'_k(x).$$

В силу неравенств (22) и (23)

$$|y'_k(x)| \leqslant D_2 B_6\frac{k}{\sqrt{x}}\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} + D_2 B_6\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \leqslant C_2\frac{k}{\sqrt{x}}\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}},$$

$$|y'_k(x)| \geqslant D_1 B_5 k\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} - D_2 B_6\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} =$$

$$= k\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}\left(D_1 B_5 - \frac{D_2 B_6}{k}\right) \geqslant C_1 k\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}$$

при $(D_1 B_5 - D_2 B_6/k) \geqslant C_1 > 0$, что выполнено при $k \geqslant k_0$. Оценки (20) доказаны. Аналогично, применив в оценке $y''_k(x)$ неравенства (22), (23) и (24), получим оценку (21):

$$|y''_k(x)| \leqslant D_2 B_6\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}\left(\frac{k^2}{x} + \frac{2k}{\sqrt{x}} + \frac{k}{x}\right) \leqslant C_2\frac{k^2}{x}\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь изначальные условия на коэффициенты уравнений (1) и (2).

Теорема 4. *Пусть коэффициенты* $a(x)$, $c(x)$ *из класса* A, $a(x) \geqslant 0$ *и* $c(0) \geqslant 1$. *Тогда существует единственное решение задачи (6), также принадлежащее классу* A.

Доказательство данного утверждения мы опустим, так как оно во многом повторяет доказательство теоремы 1 из [13].

Построенные решения $y_k(x)$ задач (9) можно выбрать в качестве элементов фундаментальных систем решений для задач (5), удовлетворяющих левому краевому условию этих задач. Соответственно, теперь будем обозначать их как $Y_k^0(x) \equiv y_k(x)$. Будем называть их первыми элементами фундаментальных систем решений (ФСР) задач (5).

Аналогично далее мы будем рассматривать некоторую последовательность решений последовательности задач

$$xy''_k + c(x)y'_k - (a(x) + \pi^2 k^2)y_k = 0, \quad x \in (0, b),$$

$$y_k(b) = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{25}$$

при $c_0 \geqslant 1$. Решение каждой такой задачи определено не однозначно. Использовав известное следствие формулы Остроградского–Лиувилля, частные решения задач (25) можно представить в следующем виде:

$$Y_k^b(x) = -Y_k^0(x) \int\limits_b^x \frac{1}{(Y_k^0(\xi))^2} \exp\biggl(-\int\limits_b^\xi \frac{c(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta\biggr)\,d\xi, \quad x \in (0,b], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{26}$$

Система решений $\{Y_k^0, Y_k^b\}$ является линейно независимой по построению. Поэтому положим функции $Y_k^b(x)$ вторыми элементами ФСР задач (5). По аналогии с $Y_k^0(x)$ получим оценки на систему $Y_k^b(x)$ при $k \to +\infty$.

Теорема 5. *Найдётся не зависящая от* $x \in (0,b]$ *и* k *постоянная* $C > 0$ *такая, что при достаточно больших* $k \in \mathbb{N}$ *и* $c(0) > 1$ *имеют место неравенства*

$$0 \leqslant Y_k^b(x) \leqslant C\frac{x^{-c_0+1}}{1+k\sqrt{x}}\frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}}, \quad x \in (0,b], \tag{27}$$

$$0 \leqslant -\frac{dY_k^b}{dx}(x) \leqslant Cx^{-c_0}\frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}}, \quad x \in (0,b], \tag{28}$$

$$\left|\frac{d^2Y_k^b}{dx^2}(x)\right| \leqslant Ckx^{-c_0-1}\frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}}, \quad x \in (0,b]. \tag{29}$$

При $c(0) = 1$ *имеют место неравенства*

$$0 \leqslant Y_k^b(x) \leqslant C\ln\biggl(2+\frac{1}{k\sqrt{x}}\biggr)\frac{1}{1+k\sqrt{x}}\frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}}, \quad x \in (0,b], \tag{30}$$

$$0 \leqslant -\frac{dY_k^b}{dx}(x) \leqslant C\ln\biggl(2+\frac{1}{k\sqrt{x}}\biggr)\frac{1}{x}\frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}}, \quad x \in (0,b], \tag{31}$$

$$\left|\frac{d^2Y_k^b}{dx^2}(x)\right| \leqslant C\frac{k}{x^2}\frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}}, \quad x \in (0,b]. \tag{32}$$

Здесь $\alpha = c(0) - 1$.

Доказательство. Для упрощения выкладок будем использовать символ const для обозначения, возможно, различных положительных постоянных, не зависящих от $x \in (0,b]$ и $k \in \mathbb{N}$:

$$Y_k^b(x) \leqslant -\mathrm{const} \times Y_k^0(x) \int\limits_b^x \frac{\xi^{-c_0}}{(Y_k^0(\xi))^2}\,d\xi, \quad x \in (0,b], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Применим оценки теоремы 3:

$$Y_k^b(x) \leqslant \mathrm{const} \times \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \int\limits_x^b \xi^{-c_0}\biggl(\frac{1+(\pi k\sqrt{\xi})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{\xi}}}\biggr)^2 d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \times \frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}} \int\limits_x^b \xi^{-c_0} e^{4\pi k(\sqrt{x}-\sqrt{\xi})}\biggl(\frac{1+(\pi k\sqrt{\xi})^{\alpha+1/2}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}\biggr)^2 d\xi.$$

Введём новые переменные

$$k\sqrt{x} = t, \quad k\sqrt{\xi} = \tau, \quad \tau - t = \nu.$$

Тогда получим

$$I(k,x) = \int\limits_x^b \xi^{-c_0} e^{4\pi k(\sqrt{x}-\sqrt{\xi})} \left(\frac{1+(\pi k\sqrt{\xi})^{\alpha+1/2}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}\right)^2 d\xi =$$

$$= 2k^{2\alpha} \int\limits_t^{k\sqrt{b}} \tau^{1-2c_0} e^{-4\pi\nu} \left(\frac{1+(\pi\tau)^{\alpha+1/2}}{1+(\pi t)^{\alpha+1/2}}\right)^2 d\tau.$$

Обозначим ядро интеграла через

$$K(t,\tau) = \tau^{1-2c_0} e^{-4\pi\nu} \left(\frac{1+(\pi\tau)^{\alpha+1/2}}{1+(\pi t)^{\alpha+1/2}}\right)^2 \leqslant \mathrm{const} \times \tau^{1-2c_0} e^{-4\pi\nu} \left(\frac{1+(\pi t)^{\alpha+1/2}+(\pi\nu)^{\alpha+1/2}}{1+(\pi t)^{\alpha+1/2}}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \times \tau^{1-2c_0} e^{-4\pi\nu} (1+(\pi\nu)^{2\alpha+1}) \leqslant \mathrm{const} \times e^{-4\pi\nu} \tau^{1-2c_0} \leqslant \mathrm{const} \times e^{-4\pi\nu} \nu^{1-2c_0}, \quad \tau = t+\nu.$$

В силу данной оценки ядра можем выбрать точку $\gamma > 0$, не зависящую от t, такую, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \tau^{1-2c_0} K(t,\tau)\, d\nu = \int\limits_0^{\gamma} \tau^{1-2c_0} K(t,\tau)\, d\nu + \int\limits_\gamma^{+\infty} \tau^{1-2c_0} K(t,\tau)\, d\nu \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \left[\int\limits_0^\gamma e^{-4\pi\nu} \tau^{1-2c_0}\, d\nu + \gamma^{1-2c_0} \int\limits_\gamma^{+\infty} e^{-4\pi\nu}\, d\nu \right] \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \left[\int\limits_0^\gamma \tau^{1-2c_0}\, d\nu + \frac{\gamma^{1-2c_0} e^{-4\pi\gamma}}{4\pi} \right] \leqslant \mathrm{const} \int\limits_0^\gamma \tau^{1-2c_0}\, d\nu.$$

Рассмотрим случай $c_0 > 1$. Тогда

$$I(k,x) \leqslant \mathrm{const} \times k^{2\alpha} \int\limits_t^{t+\gamma} \tau^{1-2c_0} d\tau \leqslant \mathrm{const} \times k^{2\alpha} (t^{-2\alpha} - (t+\gamma)^{-2\alpha}) =$$

$$= \mathrm{const} \times \left(x^{-\alpha} - \left(\sqrt{x} + \frac{\gamma}{k}\right)^{-2\alpha} \right) = \mathrm{const} \times x^{-\alpha} \left(1 - \left(1 + \frac{\gamma}{k\sqrt{x}}\right)^{-2\alpha}\right).$$

Исследовав отдельно случаи больших и малых $k\sqrt{x}$, получим общую оценку

$$I(k,x) \leqslant \mathrm{const} \times \frac{x^{-\alpha}}{1+k\sqrt{x}},$$

которая доказывает неравенство (27). Аналогично при $c_0 = 1$ получаем оценку

$$I(k,x) \leqslant \mathrm{const} \times \int\limits_t^{t+\gamma} \tau^{-1} d\tau = \mathrm{const} \times \ln\left(1 + \frac{\gamma}{k\sqrt{x}}\right) \leqslant \mathrm{const} \times \frac{\ln(2+(k\sqrt{x})^{-1})}{1+k\sqrt{x}},$$

что доказывает неравенство (30):

$$-\frac{dY_k^b}{dx}(x) = \frac{dY_k^0}{dx}(x) \int\limits_b^x \frac{1}{(Y_k^0(\xi))^2} \exp\left(-\int\limits_b^\xi \frac{c(\zeta)}{\zeta}\, d\zeta\right) d\xi + \frac{1}{Y_k^0(x)} \exp\left(-\int\limits_b^x \frac{c(\zeta)}{\zeta}\, d\zeta\right) \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \times \frac{k}{\sqrt{x}} \frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}} I(k,x) + \text{const} \times x^{-c_0} \frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}}.$$

При $c_0>1$ аналогично получаем

$$-\frac{dY_k^b}{dx}(x) \leqslant \text{const} \times \frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}} \left[x^{-c_0} + \frac{k}{\sqrt{x}} \frac{1}{1+k\sqrt{x}} x^{-\alpha}\right] \leqslant \text{const} \times x^{-c_0} \frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}},$$

при $c_0=1$ получаем

$$-\frac{dY_k^b}{dx}(x) \leqslant \text{const} \times \frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}} \left[\frac{1}{x} + \frac{k}{\sqrt{x}} \frac{\ln(2+1/k\sqrt{x})}{1+k\sqrt{x}}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \times \frac{\ln(2+1/k\sqrt{x})}{x} \frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}}.$$

Оценки (28) и (31) доказаны. Наконец, дифференцируя определение $Y_k^b(x)$ дважды и производя аналогичные выкладки, имеем

$$\left|\frac{d^2Y_k^b}{dx^2}(x)\right| \leqslant \text{const} \times x^{-c_0-1} \frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}} + \text{const} \times \frac{k^2}{x} \frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}} I(k,x),$$

и, соответственно, оценки (29) при $c_0>1$ и (32) при $c_0=1$. Теорема доказана.

Мы получили набор оценок для фундаментальных систем решений задач (5). Получим аналогичные оценки в случае задач (4) при $c(0)<1$, сведя их к задачам (5).

Будем искать решения уравнений (4) в виде $y_k(x)=x^{1-c_0}\check{y}_k(x)$, где $\check{y}_k(x)$ – новая неизвестная функция. Тогда

$$y_k'(x) = x^{1-c_0}\check{y}_k'(x) + (1-c_0)x^{-c_0}\check{y}_k(x),$$

$$xy_k''(x) = x^{2-c_0}\check{y}_k''(x) + 2(1-c_0)x^{1-c_0}\check{y}_k'(x) - c_0(1-c_0)x^{-c_0}\check{y}_k(x),$$

$$x\check{y}_k'' + \check{c}(x)\check{y}_k' - (\check{a}(x)+\pi^2k^2)\check{y}_k = 0, \tag{33}$$

где

$$\check{c}(x) = 2 + c(x) - 2c(0), \quad \check{a}(x) = a(x) + (c_0(1-c_0) - (1-c_0)c(x))x^{-1}.$$

Для уравнений (33) можно поставить краевые задачи вида (5). Выполнены все условия теорем 3–5, а значит можем выбрать описанным выше образом фундаментальные системы решений этих задач, обозначив их $\{\check{Y}_k^0(x), \check{Y}_k^b(x)\}$. Соответственно, функции из фундаментальных систем решений задач (4) имеют вид

$$Y_k^0(x) = x^{1-c_0}\check{Y}_k^0(x), \quad Y_k^b(x) = x^{1-c_0}\check{Y}_k^b(x), \quad x\in(0,b], \quad k\in\mathbb{N}.$$

Заметим, что $\check{c}_0 = 2+c_0-2c_0 = 2-c_0>1$ и, соответственно, мы можем положить в общем случае $\alpha=|c_0-1|$. Применив оценки теорем 3 и 5, получена следующая

Теорема 6. *Пусть $c(0)<1$. Тогда существуют не зависящие от $x\in[0,b]$ и $k\in\mathbb{N}$ постоянные C_1 и C_2 такие, что при достаточно больших k имеют место неравенства*

$$0 < C_1x^{1-c_0}\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \leqslant Y_k^0(x) \leqslant C_2x^{1-c_0}\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}, \quad x\in[0,b],$$

$$0 < C_1x^{-c_0}k\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}} \leqslant \frac{dY_k^0}{dx}(x) \leqslant C_2x^{-c_0}k\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}, \quad x\in[0,b],$$

$$\left|\frac{d^2Y_k^0}{dx^2}(x)\right| \leqslant C_2x^{-1-c_0}k^2\frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}, \quad x\in[0,b],$$

$$0 \leqslant Y_k^b(x) \leqslant C_2 \frac{1}{1+k\sqrt{x}} \frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}}, \quad x \in [0,b],$$

$$0 \leqslant -\frac{dY_k^b}{dx}(x) \leqslant C_2 \frac{1}{x^{3/2}} \frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}}, \quad x \in [0,b],$$

$$\left|\frac{d^2Y_k^b}{dx^2}(x)\right| \leqslant C_2 \frac{k}{x^{5/2}} \frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}}, \quad x \in [0,b].$$

Для получения оценок функций Грина краевых задач (4) и (5) необходимы оценки определителей Вронского ФСР уравнений этих задач по модулю снизу. Покажем, что существует единая оценка для случаев $c_0 > 1$, $c_0 = 1$ и $c_0 < 1$, которая не зависит от k:

$$w_k(x) = Y_k^0(x)\frac{dY_k^b}{dx}(x) - \frac{dY_k^0}{dx}(x)Y_k^b(x), \quad x \in [0,b], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Подставим в эту формулу выражение (26) функции $Y_k^b(x)$, в результате получим

$$w_k(x) = -\exp\biggl(-\int\limits_b^x \frac{c(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta\biggr), \quad x \in [0,b], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Теорема 7. *Существует не зависящая от $x \in (0,b]$ и $k \in \mathbb{N}$ постоянная W такая, что имеют место неравенства*

$$w_k(x) \leqslant W x^{-c_0} < 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad x \in [0,b].$$

Доказательство.

$$w_k(x) = -\exp\biggl(-\int\limits_b^x \frac{c(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta\biggr) = -\exp\biggl(-\int\limits_b^x \frac{c_0}{\zeta}\,d\zeta\biggr)\exp\biggl(-\int\limits_b^x \overline{c}(\zeta)\,d\zeta\biggr) =$$

$$= -\exp\Bigl(-c_0(\ln x - \ln b)\Bigr)\exp\biggl(-\int\limits_b^x \overline{c}(\zeta)\,d\zeta\biggr) = -x^{-c_0}\exp\biggl(c_0\ln b - \int\limits_b^x \overline{c}(\zeta)\,d\zeta\biggr).$$

Введём обозначение

$$W = -\min_{x\in[0,b]} \exp(c_0 \ln b - \int\limits_b^x \overline{c}(\zeta)\,d\zeta) < 0$$

и получим требуемое утверждение. Теорема доказана.

Построим функции Грина задач (4) и (5). Будем рассматривать случай произвольного $c(0)$. Используем ранее введённые обозначения $Y_k^0(x)$ и $Y_k^b(x)$ и запишем функции Грина задач (4) и (5) в общем виде:

$$G_k(x,\xi) = \begin{cases} Y_k^0(x)Y_k^b(\xi)(\xi w_k(\xi))^{-1}, & 0 \leqslant x < \xi \leqslant b, \\ Y_k^0(\xi)Y_k^b(x)(\xi w_k(\xi))^{-1}, & b \geqslant x > \xi > 0, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{34}$$

Решения задач (4) и (5) соответственно имеют вид

$$Y_k(x) = \int\limits_0^b G_k(x,\xi) f_k(\xi)\,d\xi, \quad x \in [0,b], \quad k \in \mathbb{N}. \tag{35}$$

Теорема 8. *Для любого* $\varepsilon \in (0,b)$ *найдутся постоянные* $C_1 = C_1(\varepsilon)$ *и* C_2, *не зависящая от* ε, *такие, что при всех* $k \in \mathbb{N}$ *имеют место неравенства*

$$\int\limits_0^b |G_k(x,\xi)|\,d\xi \leqslant C_2 \frac{1}{1+k\sqrt{x}}\frac{1}{k}, \quad x \in [0,b], \tag{36}$$

$$\int\limits_0^b |G_k(x,\xi)|\,d\xi \leqslant C_1 \frac{1}{k^2}, \quad x \in [\varepsilon,b], \tag{37}$$

$$\int\limits_0^b \left|\frac{dG_k}{dx}(x,\xi)\right| d\xi \leqslant C_1 \frac{1}{k}, \quad x \in [\varepsilon,b]. \tag{38}$$

Доказательство. Для доказательства неравенства (36) применим оценки теорем 3, 5, 6 и 7 к интегралу от функции (34). В случае $c_0 \geqslant 1$, выбрав наихудшую оценку, получим

$$\int\limits_0^b |G_k(x,\xi)|\,d\xi \leqslant \frac{\mathrm{const}}{1+k\sqrt{x}} \int\limits_0^x \ln\left(2+\frac{1}{k\sqrt{x}}\right) e^{2\pi k(\sqrt{\xi}-\sqrt{x})} \frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{1+(\pi k\sqrt{\xi})^{\alpha+1/2}}\,d\xi \,+$$

$$+\,\frac{\mathrm{const}}{1+k\sqrt{x}} \int\limits_x^b \ln\left(2+\frac{1}{k\sqrt{\xi}}\right) e^{2\pi k(\sqrt{x}-\sqrt{\xi})} \frac{1+(\pi k\sqrt{\xi})^{\alpha+1/2}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}\,d\xi \equiv \frac{\mathrm{const}}{1+k\sqrt{x}}[I_1(k,x,\xi)+I_2(k,x,\xi)].$$

Во втором интеграле $I_2(k,x,\xi)$ применим замену $k\sqrt{x}=t$, $k\sqrt{\xi}=\tau$, $\tau-t=\nu$. Тогда получим

$$I_2(k,x,\xi) = \frac{2}{k^2}\int\limits_t^{k\sqrt{b}} \tau \ln\left(2+\frac{1}{\tau}\right) e^{2\pi(t-\tau)} \frac{1+(\pi\tau)^{\alpha+1/2}}{1+(\pi t)^{\alpha+1/2}} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mathrm{const}}{k^2} k\sqrt{b} \int\limits_0^{k\sqrt{b}-t} \ln\left(2+\frac{1}{\nu+t}\right) e^{-2\pi\nu} \frac{1+(\pi t)^{\alpha+1/2}+(\pi\nu)^{\alpha+1/2}}{1+(\pi t)^{\alpha+1/2}}\,d\nu \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\mathrm{const}}{k} \int\limits_0^{+\infty} \ln\left(2+\frac{1}{\nu}\right) e^{-2\pi\nu}(1+(\pi\nu)^{\alpha+1/2})\,d\nu.$$

Так как последний интеграл сходится и не зависит от k, то получаем

$$I_2(k,x,\xi) \leqslant \frac{\mathrm{const}}{k}.$$

Рассмотрим теперь интеграл $I_1(k,x,\xi)$ и сделаем в нём замену по формулам $k\sqrt{x}=t$, $k\sqrt{\xi}=\tau$, $\nu = t-\tau$. В результате будем иметь

$$I_1(k,x,\xi) \leqslant \ln\left(2+\frac{1}{t}\right)\frac{2}{k^2}\int\limits_0^t \tau e^{-2\pi(t-\tau)} \frac{1+(\pi t)^{\alpha+1/2}}{1+(\pi\tau)^{\alpha+1/2}} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \ln\left(2+\frac{1}{t}\right)\frac{\mathrm{const}}{k^2} t \int\limits_0^{+\infty} e^{-2\pi\nu}(1+(\pi\nu)^{\alpha+1/2}) d\tau.$$

Заметим, что $t\ln(2+t^{-1}) \leqslant \text{const}\times(1+k\sqrt{b})$, а интеграл является сходящимся. Поэтому

$$I_1(k,x,\xi) \leqslant \frac{\text{const}}{k},$$

что доказывает неравенства (36) и (37) при $c_0 \geqslant 1$. Случай $c_0 < 1$ исследуется аналогично:

$$\int\limits_0^b \left|\frac{dG_k}{dx}(x,\xi)\right| d\xi \leqslant \text{const}\times\int\limits_0^x \frac{e^{2\pi k\sqrt{\xi}}}{1+(\pi k\sqrt{\xi})^{\alpha+1/2}}\frac{1}{x}\frac{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{x}}}\,d\xi +$$

$$+\,\text{const}\times\int\limits_x^b \frac{e^{2\pi k\sqrt{x}}}{1+(\pi k\sqrt{x})^{\alpha+1/2}}\frac{1}{\xi^{3/2}}\frac{1+(\pi k\sqrt{\xi})^{\alpha+1/2}}{e^{2\pi k\sqrt{\xi}}}\,d\xi.$$

Использовав технику, применённую ранее, получим оценку (38):

$$\int\limits_0^b \left|\frac{dG_k}{dx}(x,\xi)\right| d\xi \leqslant \frac{\text{const}}{\varepsilon^{3/2}k}, \quad x\in[\varepsilon,b].$$

Теорема доказана.

3. Решение задач для эллиптического уравнения. Вернёмся к решению задач (1) и (2). Разложим правую часть $f(x,y)$ уравнений в ряд Фурье

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(y)\sin(\pi kx), \quad (x,y)\in\Omega.$$

Соответственно, будем искать решения задач (1) и (2) в виде

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty} Y_k(y)\sin(\pi kx), \quad (x,y)\in\bar{\Omega}, \tag{39}$$

где $Y_k(y)$ – решения задач (4) и (5) соответственно.

Теорема 9. *Пусть правая часть $f_k(y)$ задач (4) и (5) ограничена по норме в пространстве $C^2[0,b]$. Тогда при $k\in\mathbb{N}$ имеют место соотношения*

$$Y_k(y) = -\frac{f_k(y)}{\pi^2k^2} + \frac{1}{1+k\sqrt{y}}O\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

равномерно по $y\in[0,b]$. Кроме того, для любого $\varepsilon\in(0,b)$ справедливы равенства

$$Y_k(y) = -\frac{f_k(y)}{\pi^2k^2} + O\left(\frac{1}{k^4}\right), \quad Y_k'(y) = -\frac{f_k'(y)}{\pi^2k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right), \quad Y_k''(y) = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

равномерно по $y\in[\varepsilon,b]$.

Доказательство данной теоремы осуществляется аналогично доказательству леммы 5 из статьи [13] с учётом доказанной нами теоремы 8.

Теорема 10. *Пусть правая часть $f(x,y)$ задач (1) и (2) имеет вторую непрерывную производную по y в $\overline{\Omega}=[0,1]\times[0,b]$, при каждом фиксированном $y\in(0,b)$ принадлежит классу Гёльдера по x. Тогда классические решения данных задач существуют и выражаются рядом (39), где коэффициенты $Y_k(y)$ определяются формулой (35). Ряд сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$, допускает двукратное дифференцирование под знаком суммы по x и по y внутри Ω.*

Доказательство данной теоремы осуществляется аналогично доказательству теоремы 5 из работы [13] с учётом результатов теоремы 9.

Наконец, построим решения задач (1) и (2) в том случае, когда коэффициенты дифференциального оператора и правая часть являются аналитическими функциями.

Пусть функции $a(y)$, $c(y)$ и $f(x,y)$ принадлежат классу A при каждом фиксированном $x \in [0,1]$. Тогда имеют место следующие разложения в степенные ряды:

$$a(y)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n, \quad c(y)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n y^n, \quad f_k(y)=\sum_{n=0}^{+\infty} f_{kn} y^n, \quad k\in\mathbb{N},$$

радиус сходимости всех рядов не меньше R. Будем искать частное решение уравнений из задач (4) и (5) в виде

$$\eta_k(y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\eta_{kn}^A y^n+\ln y\sum_{n=0}^{+\infty}\eta_{kn}^S y^n \equiv \eta_k^{(A)}(y)+\ln y\cdot\eta_k^{(S)}(y). \tag{40}$$

Подставив указанные выше степенные ряды в соответствующие уравнения (4) и (5) и приравняв коэффициенты при y^n, $\ln y\cdot y^n$, получим систему уравнений относительно коэффициентов η_{kn}^A, η_{kn}^S:

$$(n+c_0)(n+1)\eta_{k,n+1}^S+\sum_{m=0}^{n-1} c_{n-m}(m+1)\eta_{k,m+1}^S-\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}\eta_{k,m}^S-\pi^2k^2\eta_{k,n}^S=0,$$

$$[(n+c_0)(n+1)\eta_{k,n+1}^A+(2n+1+c_0)\eta_{k,n+1}^S]+\sum_{m=0}^{n-1} c_{n-m}[(m+1)\eta_{k,m+1}^A+\eta_{k,m+1}^S]-$$

$$-\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}\eta_{k,m}^A-\pi^2k^2\eta_{k,n}^A=f_{kn}, \quad n\in\mathbb{N}_0, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Данная система не определяет $\eta_{k,0}^A$, $\eta_{k,0}^S$. Положим $\eta_{k,0}^A=1$, $\eta_{k,0}^S=0$, что гарантирует ограниченность решения в окрестности точки 0. Остальные коэффициенты рядов могут быть найдены рекуррентно из системы уравнений.

Если $c_0\neq 0,-1,-2,\ldots$, то

$$\eta_{k,n}^A=(n(n+c_0-1))^{-1}\Big[f_{k,n-1}+\sum_{m=0}^{n-1}(a_{n-m-1}-mc_{n-m})\eta_{k,m}^A-\pi^2k^2\eta_{k,n-1}^A\Big], \tag{41}$$

$$\eta_{k,n}^S=0, \quad k,n\in\mathbb{N}. \tag{42}$$

В случаях $c_0=0,-1,-2,\ldots$ формулы (41) и (42) верны лишь при $n=\overline{1,-c_0}$. Рассмотрим номер $n=1-c_0$. Можно выбрать

$$\eta_{k,n}^S=(2n-1+c_0)^{-1}\Big[f_{k,n-1}+\sum_{m=0}^{n-1}(a_{n-m-1}-mc_{n-m})\eta_{k,m}^A-\pi^2k^2\eta_{k,n-1}^A\Big],$$

$$\eta_{k,n}^A=0, \quad k\in\mathbb{N}, \quad n=1-c_0.$$

Аналогично при $n=2-c_0, 3-c_0,\ldots$ коэффициенты η_{kn}^A, η_{kn}^S корректно выражаются через предыдущие. Таким образом, данная система уравнений разрешима.

Теорема 11. *Пусть функция $f(x,y)$ представима рядом по степеням $x-1/2$ и y, сходящимся при $x\in(-\varepsilon,1+\varepsilon)$, $y\in(-R,R)$ при некотором $\varepsilon>0$. Тогда функции $\eta_k^{(A)}(y)$ и*

$\eta_k^{(S)}(y)$ *из формулы (40) принадлежат классу* A, *а соответствующие им степенные ряды сходятся при* $y \in (-R, R)$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 6 из статьи [13].

I. Рассмотрим случай $c(0) < 1$. Тогда однородные уравнения (4) имеют по два линейно независимых ограниченных решения. В силу теоремы 4 одно из них имеет вид

$$\varphi_k(y) = y^{1-c_0}\varphi_k^{(A)}(y),$$

а другое можно построить описанным в данной главе методом, положив $f_k(y) \equiv 0$. Оно будет иметь вид

$$\chi_k(y) = \chi_k^{(A)}(y) + \ln y \cdot \chi_k^{(S)}(y),$$

где $\varphi_k^{(A)}(y)$, $\chi_k^{(A)}(y)$ и $\chi_k^{(S)}(y)$ – функции из класса A.

II. Пусть $c(0) \geqslant 1$. Тогда единственное ограниченное решение (с точностью до постоянного множителя) задачи (5) даётся теоремой 4 и имеет вид

$$\varphi_k(y) = \varphi_k^{(A)}(y),$$

где $\varphi_k^{(A)}(y)$ – функция из класса A.

Теорема 12. *Пусть функция* $f(x, y)$ *представима рядом по степеням* $x - 1/2$ *и* y, *сходящимся при* $x \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$, $y \in (-R, R)$ *при некотором* $\varepsilon > 0$.

1. Если $c(0) \geqslant 1$, *то классическое решение задачи (2) имеет вид*

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\eta_k^{(A)}(y) - \frac{\eta_k^{(A)}(b)}{\varphi_k^{(A)}(b)}\varphi_k^{(A)}(y)\right)\sin(\pi k x), \quad (x,y) \in \bar{\Omega}.$$

2. Если $c(0) < 1$ *и* $c(0) \neq 0, -1, -2, \ldots$, *то классическое решение задачи (1) имеет вид*

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\eta_k^{(A)}(y) - \chi_k^{(A)}(y) - \frac{\eta_k^{(A)}(b) - \chi_k^{(A)}(b)}{b^{1-c(0)}\varphi_k^{(A)}(b)}y^{1-c(0)}\varphi_k^{(A)}(y)\right)\sin(\pi k x), \quad (x,y) \in \bar{\Omega}.$$

3. Если $c(0) = 0, -1, -2, \ldots$, *то классическое решение задачи (1) имеет вид*

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\eta_k^{(A)}(y) + \ln y \cdot \eta_k^{(S)}(y) - \chi_k^{(A)}(y) - \ln y \cdot \chi_k^{(S)}(y) - \right.$$

$$\left. - \frac{\eta_k^{(A)}(b) + \ln b \cdot \eta_k^{(S)}(b) - \chi_k^{(A)}(b) - \ln b \cdot \chi_k^{(S)}(b)}{b^{1-c(0)}\varphi_k^{(A)}(b)}y^{1-c(0)}\varphi_k^{(A)}(y)\right), \quad (x,y) \in \bar{\Omega}.$$

Указанные ряды сходятся равномерно по $(x, y) \in \overline{\Omega}$ *и допускают двукратное дифференцирование под знаком суммы по* x *и по* y *внутри* Ω, *функции* $\eta_k^{(A)}$, $\eta_k^{(S)}$, $\chi_k^{(A)}$, $\chi_k^{(S)}$, $\varphi_k^{(A)}$ *принадлежат классу* A.

Доказательство. Выражение в скобках в силу наших построений является решением задач (1) и (2) соответственно, т.е. совпадает с функциями (35), а указанные ряды Фурье – с рядами (39), они сходятся к классическому решению в силу теоремы 10. Принадлежность коэффициентов классу A следует из теоремы 11. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность профессору И.С. Ломову за постановку задачи и полезные обсуждения результатов.

Статья опубликована при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Келдыш М.В.* О некоторых случаях вырожденных уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. № 2. С. 181–183.
2. *Келдыш М.В.* Избранные труды. Математика. М., 1985
3. *Янушаускас А.И.* Аналитическая теория эллиптических уравнений. Новосибирск, 1979.
4. *Смирнов М.М.* Уравнения смешанного типа. М., 1985.
5. *Моисеев Е.И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М., 1988.
6. *Ивакин В.М.* Видоизмененная задача Дирихле для вырождающихся на границе эллиптических уравнений и систем // Аналитические методы в теории эллиптических уравнений. Новосибирск, 1982. С. 12–21.
7. *Петрушко И.М.* Краевые задачи для уравнений смешанного типа // Тр. Мат. Ин-та им. В.А. Стеклова. 1968. Т. 103. С. 181–200.
8. *Петрушко И.М.* О фредгольмовости некоторых краевых задач для уравнения $u_{xx} + yu_{yy} + \alpha(x,y)u_y + \beta(x,y)u_x + \gamma(x,y)u = f(x,y)$ в смешанной области // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 1. С. 123–135.
9. *Ломов И.С.* Малые знаменатели в аналитической теории вырождающихся дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 12. С. 2079–2089.
10. *Ломов И.С.* Метод спектрального разделения переменных для нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов // Докл. РАН. 2001. Т. 376. № 5. С. 593–596.
11. *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. М., 2011.
12. *Емельянов Д.П., Ломов И.С.* Построение точных решений нерегулярно вырождающихся эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 1. С. 45–58.
13. *Емельянов Д.П., Ломов И.С.* Использование рядов Пуассона в аналитической теории нерегулярно вырождающихся эллиптических дифференциальных операторов // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 5. С. 655–672.
14. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Введение в спектральную теорию (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы). М., 1970.
15. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1958.
16. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973.
17. *Ватсон Дж.Н.* Теория бесселевых функций. М., 1949.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 17.01.2022 г.
После доработки 17.01.2022 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.