ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 5, с. 628–637

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.32+517.929

КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

© 2022 г. Н. В. Зайцева

Для двух гиперболических дифференциально-разностных уравнений с операторами сдвигов общего вида, действующими по всем пространственным переменным, построены трёхпараметрические семейства решений. Доказаны теоремы, что полученные решения являются классическими при выполнении условия положительности вещественной части символа дифференциально-разностных операторов. Приведены классы уравнений, для которых эти условия выполнены.

DOI: 10.31857/S0374064122050041, EDN: CBCDZS

Введение. В последние годы в приложениях математики широкое распространение получили функционально-дифференциальные уравнения или, иначе, дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. Систематическое изучение уравнений с отклоняющимся аргументом было начато в сороковых годах XX в. благодаря приложениям к теории автоматического управления и связано с работами А.Д. Мышкиса [1], Э. Пинни [2], Р. Беллмана и К.Л. Кука [3], Г.А. Каменского [4], Л.Э. Эльсгольца [5], Дж. Хейла [6].

Простыми представителями обыкновенных уравнений с отклоняющимся аргументом могут служить уравнения

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t-h))$$

и

$$u'(t) = f(t, u(t), u(t-h), u'(t-h)),$$

где $h > 0$ – заданная постоянная величина.

Возникновение таких уравнений обеспечивается элементом задержки в моделируемой системе, в результате действия которого скорость эволюции системы определяется её состоянием не только в текущий момент времени t, но и в предшествующий момент $t-h$.

Появление "запаздывания" h порой приводит не только к количественным, но и к качественным изменениям постановок задач и свойств их решений. Так, в качестве начального условия для уравнений первого порядка задаётся не только значение $u(t_0)$, как для классических уравнений, а все значения искомой функции $u(t)$ при $t_0 - h \leqslant t \leqslant t_0$.

Вопрос об устойчивости систем, описываемых такими уравнениями, решается на основе анализа корней соответствующих характеристических уравнений, которые оказываются не алгебраическими (как для обычных дифференциальных уравнений), а трансцендентными.

Реальные объекты могут описываться функционально-дифференциальными уравнениями и более сложной структуры. В частности, уравнения могут включать не одно, а несколько дискретных запаздываний, а также "распределённое запаздывание", что приводит к изучению интегро-дифференциальных уравнений, которые в линейном случае могут, например, иметь вид

$$u'(t) = \int\limits_{t_0}^{t} K(t,s)u(s)\,ds + f(t), \quad t \geqslant t_0.$$

Данные уравнения описывают системы, обладающие памятью.

Существенные результаты в исследовании задач для функционально-дифференциальных уравнений различных классов были получены А.Л. Скубачевским [7, 8], В.В. Власовым [9, 10], А.Н. Зарубиным [11, 12], А.Б. Муравником [13–19], А.В. Разгулиным [20], Л.Е. Россовским [21] и другими авторами.

Специальный класс функционально-дифференциальных уравнений составляют дифференциально-разностные уравнения, теория краевых задач для которых продолжает развиваться. В настоящее время достаточно полно исследованы задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений в ограниченных областях, большой вклад в разработку и развитие теории для них принадлежит А.Л. Скубачевскому [7, 8].

В неограниченных областях задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений изучены в значительно меньшей степени. Обширное исследование таких задач представлено в работах А.Б. Муравника [13–19]. В частности, в работах [17–19] рассматриваются краевые задачи для многомерных эллиптических дифференциально-разностных уравнений.

Параболические уравнения с отклонениями по времени (или с переменными запаздываниями) в старших производных были исследованы в работах В.В. Власова [9]. Краевые задачи в ограниченных областях для параболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами по пространственным переменным изучались в работах А.Л. Скубачевского и Р.В. Шамина [22], А.Л. Скубачевского и А.М. Селицкого [23]. В случае же неограниченной области задачи для таких уравнений были изучены в монографии А.Б. Муравника [13].

В работе А.Н. Зарубина [12] рассмотрена задача Коши для гиперболического уравнения с запаздыванием по времени, встречающимся при математическом моделировании процессов в средах с фрактальной геометрией. В работе В.В. Власова и Д.А. Медведева [10] гиперболические дифференциально-разностные уравнения были исследованы для случая, когда операторы сдвига также действуют по переменной времени.

В настоящее время, насколько нам известно, имеется незначительное число работ, посвящённых изучению гиперболических дифференциально-разностных уравнений, содержащих сдвиги по пространственной переменной. В работах [24–28] построены семейства классических решений для двумерных гиперболических уравнений, причём сдвиги по единственной пространственной переменной x, изменяющейся на всей вещественной оси, присутствуют либо в потенциалах, либо в старшей производной.

В данной работе в полупространстве $\{(x,t) : x \in \mathbb{R}^n, \ \ t > 0\}$ исследуется вопрос существования гладких решений двух гиперболических дифференциально-разностных уравнений, первое из которых содержит суперпозиции дифференциальных операторов и операторов сдвига по каждой из пространственных переменных:

$$u_{tt}(x,t) = L_1 u \stackrel{\text{def}}{=} a^2 \sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j}(x,t) + \sum_{j=1}^{n} b_j u_{x_j x_j}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j - h_j, x_{j+1}, \ldots, x_n, t), \tag{1}$$

где a, b_1, $\ldots$, b_n и h_1, $\ldots$, h_n – заданные вещественные числа.

Второе уравнение содержит сумму дифференциальных операторов и операторов сдвига по каждой из пространственных переменных:

$$u_{tt}(x,t) = L_2 u \stackrel{\text{def}}{=} c^2 \sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j}(x,t) - \sum_{j=1}^{n} d_j u(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j - l_j, x_{j+1}, \ldots, x_n, t), \tag{2}$$

где c, d_1, $\ldots$, d_n и l_1, $\ldots$, l_n – заданные вещественные числа.

Определение 1. Функция $u(x,t)$ называется *классическим решением* уравнения (1) (уравнения (2)), если в каждой точке полупространства $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ существуют классические, т.е. определённые в смысле пределов отношений конечных разностей, производные u_{tt} и $u_{x_j x_j}$ $(j = \overline{1,n})$, и в каждой точке этого полупространства выполняется соотношение (1) (соответственно, соотношение (2)).

Определение 2. Будем называть дифференциально-разностный оператор L *положительным*, если вещественная часть символа этого оператора положительна, т.е. выполняется условие $\operatorname{Re} L(\xi) > 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Вещественная часть символа дифференциально-разностного оператора $-L_1$ уравнения (1) равна

$$-\mathrm{Re}\, L_1(\xi) = |\xi|^2 + \sum_{j=1}^{n} a_j \xi_j^2 \cos(h_j \xi_j).$$

В дальнейшем будем считать оператор $-L_1$ положительным, т.е. для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполняется условие

$$a^2|\xi|^2 + \sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j^2 \cos(h_j \xi_j) > 0. \tag{3}$$

Оператор $-L_2$ уравнения (2) также будем считать положительным в дальнейших рассуждениях, т.е. для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ будет выполняться условие

$$c^2|\xi|^2 + \sum_{j=1}^{n} d_j \cos(l_j \xi_j) > 0. \tag{4}$$

1. Построение решений уравнения (1). Для нахождения решений уравнения используем классическую операционную схему [29, § 10], согласно которой применим формально к уравнению (1) преобразование Фурье $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\xi\cdot x}\, dx$ по n-мерной переменной x и перейдём к двойственной переменной ξ.

С учётом формул [30, § 9] $F_x[\partial_x^\alpha \partial_t^\beta f] = (-i\xi)^\alpha \partial_t^\beta F_x[f]$ и $F_x[f(x-x_0)] = e^{ix_0\cdot\xi} F_x[f]$ получим для нахождения функции $\widehat{u}(\xi,t) := F_x[u](\xi,t)$ начальную задачу

$$\frac{d^2\widehat{u}}{dt^2} = -\left(a^2|\xi|^2 + \sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j^2 \cos(h_j\xi_j) + i \sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j^2 \sin(h_j \xi_j)\right)\widehat{u}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

$$\widehat{u}(0) = 0, \quad \widehat{u}_t(0) = 1. \tag{6}$$

Для удобства в дальнейших вычислениях введём следующие обозначения:

$$\alpha(\xi) := \sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j^2 \cos(h_j \xi_j), \quad \beta(\xi) := \sum_{j=1}^{n} b_j \xi_j^2 \sin(h_j \xi_j).$$

Тогда уравнение (5) принимает вид

$$\frac{d^2\widehat{u}}{dt^2} = -(a^2|\xi|^2 + \alpha(\xi) + i\beta(\xi))\widehat{u}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

корни характеристического уравнения для которого определяются по формуле

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{-(a^2|\xi|^2 + \alpha(\xi) + i\beta(\xi))} = \pm i\sqrt{a^2|\xi|^2 + \alpha(\xi) + i\beta(\xi)} = \pm i\rho(\xi) e^{i\varphi(\xi)},$$

где

$$\rho(\xi) := [(a^2|\xi|^2 + \alpha(\xi))^2 + \beta^2(\xi)]^{1/4}, \tag{7}$$

$$\varphi(\xi) := \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\beta(\xi)}{a^2|\xi|^2 + \alpha(\xi)}. \tag{8}$$

Отметим, что при выполнении условия (3) функции (7) и (8) определены корректно для любого значения $\xi \in \mathbb{R}^n$, так как подкоренное выражение в формуле (7) всегда положительно, а знаменатель аргумента арктангенса в (8) не обращается в нуль.

Таким образом, общее решение уравнения (5) имеет вид

$$\widehat{u}(\xi,t) = C_1(\xi) e^{it\rho(\xi)[\cos\varphi(\xi) + i\sin\varphi(\xi)]} + C_2(\xi) e^{-it\rho(\xi)[\cos\varphi(\xi) + i\sin\varphi(\xi)]},$$

где $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$ – произвольные постоянные, зависящие от параметра ξ, для определения которых подставим функцию $\widehat{u}(\xi,t)$ в начальные условия (6). Из системы

$$C_1(\xi)+C_2(\xi)=0, \quad C_1(\xi)-C_2(\xi)=\frac{1}{i\rho(\xi)[\cos\varphi(\xi)+i\sin\varphi(\xi)]}$$

находим значения констант

$$C_1(\xi)=\frac{e^{-i\varphi(\xi)}}{2i\rho(\xi)}, \quad C_2(\xi)=-\frac{e^{-i\varphi(\xi)}}{2i\rho(\xi)}.$$

В результате решение задачи (5), (6) определяется по формуле

$$\widehat{u}(\xi,t)=\frac{e^{-i\varphi(\xi)}}{2i\rho(\xi)}[e^{it\rho(\xi)[\cos\varphi(\xi)+i\sin\varphi(\xi)]}-e^{-it\rho(\xi)[\cos\varphi(\xi)+i\sin\varphi(\xi)]}]=$$

$$=\frac{e^{-i\varphi(\xi)}}{2i\rho(\xi)}[e^{-t\rho(\xi)\sin\varphi(\xi)}e^{it\rho(\xi)\cos\varphi(\xi)}-e^{t\rho(\xi)\sin\varphi(\xi)}e^{-it\rho(\xi)\cos\varphi(\xi)}]=$$

$$=\frac{1}{2i\rho(\xi)}[e^{-t\rho(\xi)\sin\varphi(\xi)}e^{i(t\rho(\xi)\cos\varphi(\xi)-\varphi(\xi))}-e^{t\rho(\xi)\sin\varphi(\xi)}e^{-i(t\rho(\xi)\cos\varphi(\xi)+\varphi(\xi))}]=$$

$$=\frac{1}{2i\rho(\xi)}[e^{-tG_1(\xi)}e^{i(tG_2(\xi)-\varphi(\xi))}-e^{tG_1(\xi)}e^{-i(tG_2(\xi)+\varphi(\xi))}], \tag{9}$$

где введены обозначения

$$G_1(\xi):=\rho(\xi)\sin\varphi(\xi), \quad G_2(\xi):=\rho(\xi)\cos\varphi(\xi). \tag{10}$$

Применим теперь к равенству (9) формально обратное преобразование Фурье F_ξ^{-1} и получим

$$u(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{2i\rho(\xi)}[e^{-tG_1(\xi)}e^{i(tG_2(\xi)-\varphi(\xi))}-e^{tG_1(\xi)}e^{-i(tG_2(\xi)+\varphi(\xi))}]e^{-ix\cdot\xi}\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{2i(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\rho(\xi)}[e^{-tG_1(\xi)}e^{i(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)}-e^{tG_1(\xi)}e^{-i(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)}]\,d\xi.$$

С учётом чётности функций $\alpha(\xi)$, $\rho(\xi)$, $G_2(\xi)$ и нечётности функций $\beta(\xi)$, $\varphi(\xi)$, $G_1(\xi)$ по каждой переменной ξ_j преобразуем последнее выражение следующим образом:

$$\frac{1}{2i(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\rho(\xi)}[e^{-tG_1(\xi)}e^{i(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)}-e^{tG_1(\xi)}e^{-i(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)}]\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{2i(2\pi)^n}\biggl[\int\limits_{\mathbb{R}^n_-}\frac{1}{\rho(\xi)}[e^{-tG_1(\xi)}e^{i(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)}-e^{tG_1(\xi)}e^{-i(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)}]\,d\xi+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{1}{\rho(\xi)}[e^{-tG_1(\xi)}e^{i(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)}-e^{tG_1(\xi)}e^{-i(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)}]\,d\xi\biggr]=$$

$$=\frac{1}{2i(2\pi)^n}\biggl[\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{1}{\rho(\xi)}[e^{tG_1(\xi)}e^{i(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)}-e^{-tG_1(\xi)}e^{-i(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)}]\,d\xi+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{1}{\rho(\xi)}[e^{-tG_1(\xi)}e^{i(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)}-e^{tG_1(\xi)}e^{-i(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)}]\,d\xi\bigg]=$$

$$=\frac{1}{2i(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{1}{\rho(\xi)}[2ie^{tG_1(\xi)}\sin{(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)}+2ie^{-tG_1(\xi)}\sin{(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)}]\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{1}{\rho(\xi)}[e^{tG_1(\xi)}\sin{(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)}+e^{-tG_1(\xi)}\sin{(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)}]\,d\xi.$$

Используем полученное представление и докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *При выполнении условия (3) функции*

$$F(x,t;\xi):=e^{tG_1(\xi)}\sin{(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)},\tag{11}$$

$$H(x,t;\xi):=e^{-tG_1(\xi)}\sin{(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi)},\tag{12}$$

где $\varphi(\xi)$ определяется по формуле (8), $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$ – равенствами (10), удовлетворяют уравнению (1) в классическом смысле.

Доказательство. Подставим сначала функцию (11) непосредственно в уравнение (1). Для этого найдём производные

$$F_{x_j}(x,t;\xi)=\xi_je^{tG_1(\xi)}\cos{(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)},$$

$$F_{x_jx_j}(x,t;\xi)=-\xi_j^2e^{tG_1(\xi)}\sin{(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)},$$

$$F_t(x,t;\xi)=G_1(\xi)e^{tG_1(\xi)}\sin{(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)}+G_2(\xi)e^{tG_1(\xi)}\cos{(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)},$$

$$\begin{gathered}F_{tt}(x,t;\xi)=[G_1^2(\xi)-G_2^2(\xi)]e^{tG_1(\xi)}\sin{(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)}+\\+2G_1(\xi)G_2(\xi)e^{tG_1(\xi)}\cos{(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)}.\end{gathered}\tag{13}$$

Найдём теперь значения выражений $2G_1(\xi)G_2(\xi)$ и $G_1^2(\xi)-G_2^2(\xi)$. Так как функции $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$ определяются равенствами (10), то

$$2G_1(\xi)G_2(\xi)=\rho^2(\xi)\sin(2\varphi(\xi)).$$

Из формулы (8) следует, что $|2\varphi(\xi)|<\pi/2$, а следовательно, $\cos(2\varphi(\xi))>0$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$\sin(2\varphi(\xi))=\frac{\operatorname{tg}{(2\varphi(\xi))}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(2\varphi(\xi))}}=\operatorname{tg}\bigg(\operatorname{arctg}\frac{\beta(\xi)}{a^2|\xi|^2+\alpha(\xi)}\bigg)\bigg[1+\operatorname{tg}^2\bigg(\operatorname{arctg}\frac{\beta(\xi)}{a^2|\xi|^2+\alpha(\xi)}\bigg)\bigg]^{-1/2}=$$

$$=\frac{\beta(\xi)}{a^2|\xi|^2+\alpha(\xi)}\bigg[1+\frac{\beta^2(\xi)}{(a^2|\xi|^2+\alpha(\xi))^2}\bigg]^{-1/2}=$$

$$=\frac{\beta(\xi)}{a^2|\xi|^2+\alpha(\xi)}\bigg[\frac{(a^2|\xi|^2+\alpha(\xi))^2}{(a^2|\xi|^2+\alpha(\xi))^2+\beta^2(\xi)}\bigg]^{1/2}=\frac{\beta(\xi)}{a^2|\xi|^2+\alpha(\xi)}\frac{|a^2|\xi|^2+\alpha(\xi)|}{\rho^2(\xi)}.$$

В силу выполнения условия (3) из последнего равенства получим

$$\sin(2\varphi(\xi))=\frac{\beta(\xi)}{a^2|\xi|^2+\alpha(\xi)}\frac{a^2|\xi|^2+\alpha(\xi)}{\rho^2(\xi)}=\frac{\beta(\xi)}{\rho^2(\xi)},$$

а значит,

$$2G_1(\xi)G_2(\xi)=\beta(\xi).\tag{14}$$

При установленном выше неравенстве $\cos(2\varphi(\xi)) > 0$ и выполнении условия (3) найдём теперь

$$G_1^2(\xi) - G_2^2(\xi) = \rho^2(\xi)[\sin^2\varphi(\xi) - \cos^2\varphi(\xi)] = -\rho^2(\xi)\cos(2\varphi(\xi)) =$$

$$= -\frac{\rho^2(\xi)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(2\varphi(\xi))}} = -\rho^2(\xi)\left[\frac{(a^2|\xi|^2+\alpha(\xi))^2}{(a^2|\xi|^2+\alpha(\xi))^2+\beta^2(\xi)}\right]^{1/2} = -a^2|\xi|^2 - \alpha(\xi). \tag{15}$$

С учётом найденных выражений (14) и (15) функция (13) примет вид

$$F_{tt}(x,t;\xi) = [-(a^2|\xi|^2+\alpha(\xi))\sin(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi) + \beta(\xi)\cos(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)]e^{tG_1(\xi)}.$$

Подставим теперь производные F_{tt} и $F_{x_jx_j}$ в уравнение (1):

$$F_{tt}(x,t;\xi) - a^2\sum_{j=1}^n F_{x_jx_j}(x,t;\xi) = \Big[-(a^2|\xi|^2+\alpha(\xi))\sin(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi) +$$

$$+\beta(\xi)\cos(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi) + a^2\sum_{j=1}^n \xi_j^2\sin(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)\Big]e^{tG_1(\xi)} =$$

$$= [-\alpha(\xi)\sin(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi) + \beta(\xi)\cos(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)]e^{tG_1(\xi)} =$$

$$= \Big[-\sum_{j=1}^n b_j\xi_j^2\cos(h_j\xi_j)\sin(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi) +$$

$$+\sum_{j=1}^n b_j\xi_j^2\sin(h_j\xi_j)\cos(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi)\Big]e^{tG_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{j=1}^n b_j\xi_j^2\sin(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi - h_j\xi_j)e^{tG_1(\xi)} =$$

$$= \sum_{j=1}^n b_jF_{x_jx_j}(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j-h_j,x_{j+1},\ldots,x_n,t;\xi).$$

Непосредственной подстановкой в уравнение (1) аналогично проверяется, что и функция (12) удовлетворяет ему в классическом смысле. Теорема доказана.

Следствие 1. *При выполнении условия (3) семейство функций*

$$G(x,t;A,B,\xi) := Ae^{tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\cdot\xi) + Be^{-tG_1(\xi)}\sin(tG_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\cdot\xi),$$

где $\varphi(\xi)$ определяется по формуле (8), $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$ – равенствами (10), удовлетворяет уравнению (1) в классическом смысле при любых вещественных значениях параметров A, B и ξ.

Остаётся пока открытым вопрос: каким именно условиям должны удовлетворять вещественные коэффициенты $a>0$, $b_1,\ \ldots,\ b_n$ и сдвиги $h_1,\ \ldots,\ h_n$ уравнения (1), чтобы условие (3) выполнялось для любого n-мерного параметра ξ?

Запишем условие (3) в следующем виде:

$$a^2(\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_n^2) + b_1\cos(h_1\xi_1)\xi_1^2 + b_2\cos(h_2\xi_2)\xi_2^2 + \ldots + b_n\cos(h_n\xi_n)\xi_n^2 > 0.$$

Оно очевидно будет выполняться для любых сдвигов $h_1,\ \ldots,\ h_n$ и любых значений $\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n$, если коэффициенты уравнения удовлетворяют следующему условию:

$$\max_{j=\overline{1,n}}|b_j| < a^2.$$

2. Построение решений уравнения (2). Для нахождения решений уравнения (2) также применим формально к этому уравнению преобразование Фурье по n-мерной переменной x и получим для отыскания функции $\widehat{u}(\xi,t) := F_x[u](\xi,t)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\widehat{u}}{dt^2} = -\biggl(c^2|\xi|^2 + \sum_{j=1}^{n} d_j \cos{(l_j\xi_j)} + i\sum_{j=1}^{n} d_j \sin{(l_j\xi_j)}\biggr)\widehat{u}, \quad \xi\in\mathbb{R}^n, \tag{16}$$

к которому, согласно [30, с. 198], добавим два начальных условия:

$$\widehat{u}(0)=0, \quad \widehat{u}_t(0)=1. \tag{17}$$

Для удобства в дальнейших вычислениях введём следующие обозначения:

$$\lambda(\xi) := \sum_{j=1}^{n} d_j\cos{(l_j\xi_j)}, \quad \mu(\xi) := \sum_{j=1}^{n} d_j\sin{(l_j\xi_j)}.$$

Тогда уравнение (16) принимает вид

$$\frac{d^2\widehat{u}}{dt^2} = -(c^2|\xi|^2 + \lambda(\xi) + i\mu(\xi))\widehat{u}, \quad \xi\in\mathbb{R}^n,$$

корни характеристического уравнения для которого определяются по формуле

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{-(c^2|\xi|^2+\lambda(\xi)+i\mu(\xi))} = \pm i\sqrt{c^2|\xi|^2+\lambda(\xi)+i\mu(\xi)} = \pm i\delta(\xi)e^{i\psi(\xi)},$$

где

$$\delta(\xi) := [(c^2|\xi|^2+\lambda(\xi))^2+\mu^2(\xi)]^{1/4}, \tag{18}$$

$$\psi(\xi) := \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\mu(\xi)}{c^2|\xi|^2+\lambda(\xi)}. \tag{19}$$

Отметим также, что при выполнении условия (4) функции (18) и (19) определены корректно для любого значения $\xi\in\mathbb{R}^n$.

Аналогично решению задачи (5), (6) получаем решение задачи (16) и (17):

$$\widehat{u}(\xi,t) = \frac{1}{2i\delta(\xi)}[e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)}e^{i(t\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi))} - e^{t\widetilde{G}_1(\xi)}e^{-i(t\widetilde{G}_2(\xi)+\psi(\xi))}], \tag{20}$$

где введены обозначения

$$\widetilde{G}_1(\xi) := \delta(\xi)\sin\psi(\xi), \quad \widetilde{G}_2(\xi) := \delta(\xi)\cos\psi(\xi). \tag{21}$$

Применяя к равенству (20) формально обратное преобразование Фурье F_ξ^{-1} и учитывая чётность функций $\lambda(\xi)$, $\delta(\xi)$, $\widetilde{G}_2(\xi)$ и нечётность функций $\mu(\xi)$, $\psi(\xi)$, $\widetilde{G}_1(\xi)$ по каждой переменной ξ_j в дальнейших преобразованиях, окончательно получаем

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{2i\delta(\xi)}[e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)}e^{i(t\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi))} - e^{t\widetilde{G}_1(\xi)}e^{-i(t\widetilde{G}_2(\xi)+\psi(\xi))}]e^{-ix\cdot\xi}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2i(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{\delta(\xi)}[e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)}e^{i(t\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi)} - e^{t\widetilde{G}_1(\xi)}e^{-i(t\widetilde{G}_2(\xi)+\psi(\xi)+x\cdot\xi)}]\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{1}{\delta(\xi)}[e^{t\widetilde{G}_1(\xi)}\sin{(t\widetilde{G}_2(\xi)+\psi(\xi)+x\cdot\xi)} + e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)}\sin{(t\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi)}]\,d\xi.$$

На основании полученного интегрального представления доказана следующая теорема.
Теорема 2. *При выполнении условия (4) функции*

$$\widetilde{F}(x,t;\xi) := e^{t\widetilde{G}_1(\xi)} \sin(t\widetilde{G}_2(\xi) + \psi(\xi) + x\cdot\xi), \tag{22}$$

$$\widetilde{H}(x,t;\xi) := e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} \sin(t\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi), \tag{23}$$

где $\psi(\xi)$ *определяется по формуле (19),* $\widetilde{G}_1(\xi)$ *и* $\widetilde{G}_2(\xi)$ *– равенствами (21), удовлетворяют уравнению (2) в классическом смысле.*

Доказательство. Проверим сначала, что функция (23) удовлетворяет уравнению (2). Для этого вычислим производные

$$\widetilde{H}_{x_j}(x,t;\xi) = -\xi_j e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} \cos(t\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi),$$

$$\widetilde{H}_{x_jx_j}(x,t;\xi) = -\xi_j^2 e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} \sin(t\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi),$$

$$\widetilde{H}_t(x,t;\xi) = -\widetilde{G}_1(\xi)e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} \sin(t\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi) + \widetilde{G}_2(\xi)e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} \cos(t\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi),$$

$$\widetilde{H}_{tt}(x,t;\xi) = [\widetilde{G}_1^2(\xi) - \widetilde{G}_2^2(\xi)]e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} \sin(t\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi) -$$
$$- 2\widetilde{G}_1(\xi)\widetilde{G}_2(\xi)e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} \cos(t\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi).$$

Аналогично рассуждениям в теореме 1 находятся значения следующих выражений:

$$2\widetilde{G}_1(\xi)\widetilde{G}_2(\xi) = \mu(\xi), \quad \widetilde{G}_1^2(\xi) - \widetilde{G}_2^2(\xi) = -c^2|\xi|^2 - \lambda(\xi),$$

с учётом которых выражение для $\widetilde{H}_{tt}$ принимает вид

$$\widetilde{H}_{tt}(x,t;\xi) = [-(c^2|\xi|^2 + \lambda(\xi))\sin(t\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi) - \mu(\xi)\cos(t\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi)]e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)}.$$

Подставим теперь непосредственно производные $\widetilde{H}_{tt}$ и $\widetilde{H}_{x_jx_j}$ в уравнение (2):

$$\widetilde{H}_{tt}(x,t;\xi) - c^2\sum_{j=1}^n \widetilde{H}_{x_jx_j}(x,t;\xi) = \bigg[- (c^2|\xi|^2 + \lambda(\xi))\sin(t\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi) -$$

$$- \mu(\xi)\cos(t\widetilde{G}_2(\xi) - \varphi(\xi) - x\cdot\xi) + c^2\sum_{j=1}^n \xi_j^2 \sin(t\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi)\bigg] e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} =$$

$$= -[\lambda(\xi)\sin(t\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi) + \mu(\xi)\cos(t\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi)]e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} =$$

$$= -\bigg[\sum_{j=1}^n d_j \cos(l_j\xi_j)\sin(t\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi) +$$

$$+ \sum_{j=1}^n d_j \sin(l_j\xi_j)\cos(t\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi)\bigg] e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{j=1}^n d_j \sin(t\widetilde{G}_2(\xi) - \psi(\xi) - x\cdot\xi + l_j\xi_j)e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)} =$$

$$= -\sum_{j=1}^n d_j \widetilde{H}(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j - l_j,x_{j+1},\ldots,x_n,t;\xi).$$

Непосредственной подстановкой в уравнение (2) аналогично проверяется, что и функция (22) удовлетворяет уравнению (2) в классическом смысле. Теорема доказана.

Следствие 2. *При выполнении условия (4) трёхпараметрическое семейство функций*

$$\widetilde{G}(x,t;\widetilde{A},\widetilde{B},\xi) := \widetilde{A}e^{t\widetilde{G}_1(\xi)}\sin\left(t\widetilde{G}_2(\xi)+\psi(\xi)+x\cdot\xi\right)+\widetilde{B}e^{-t\widetilde{G}_1(\xi)}\sin\left(t\widetilde{G}_2(\xi)-\psi(\xi)-x\cdot\xi\right),$$

где $\psi(\xi)$ определяется по формуле (19), $\widetilde{G}_1(\xi)$ и $\widetilde{G}_2(\xi)$ – равенствами (21), удовлетворяет уравнению (2) в классическом смысле при любых вещественных значениях параметров $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ и ξ.

Выясним теперь: существуют ли в действительности такие уравнения (2), классические решения которых нами были получены, чтобы условие (4) выполнялось при любом $\xi \in \mathbb{R}^n$? Ответ положительный. Приведём примеры таких уравнений.

Представим условие (4) в следующем виде:

$$(c^2\xi_1^2 + d_1\cos(l_1\xi_1)) + (c^2\xi_2^2 + d_2\cos(l_2\xi_2)) + \ldots + (c^2\xi_n^2 + d_n\cos(l_n\xi_n)) > 0.$$

В работе [27] показано, что каждое из n слагаемых в левой части неравенства, записанного выше, будет положительным, если выполняется условие

$$0 < d_j l_j^2 \leqslant 2c^2, \quad j = \overline{1,n}.$$

В настоящее время вопрос поиска других примеров уравнений (2), для которых выполняется условие (4), остаётся открытым.

Автор признательна А.Б. Муравнику за постановку задачи и ценные советы и А.Л. Скубачевскому за постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке Центра фундаментальной и прикладной математики Московского государственного университета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М., 1972.
2. *Pinney E.* Ordinary Difference-Differential Equations. Berkeley; Los Angeles, 1958.
3. *Беллман Р., Кук К.Л.* Дифференциально-разностные уравнения. М., 1967.
4. *Каменский Г.А., Скубачевский А.Л.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1992.
5. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М. 1971.
6. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984.
7. *Skubachevskii A.L.* Elliptic Functional-Differential Equations and Applications. Basel; Boston; Berlin, 1997.
8. *Скубачевский А.Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // Успехи мат. наук. 2016. Т. 71. Вып. 5 (431). С. 2–122.
9. *Власов В.В.* О разрешимости и свойствах решений функционально-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Мат. сб. 1995. Т. 186. № 8. С. 67–92.
10. *Власов В.В., Медведев Д.А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории // Совр. математика. Фунд. направления. 2008. Т. 30. С. 3–173.
11. *Зарубин А.Н.* Математические основы теории управляемых систем. Орел, 1997.
12. *Зарубин А.Н.* Задача Коши для дифференциально-разностного нелокального волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 10. С. 1406–1409.
13. *Муравник А.Б.* Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши // Совр. математика. Фунд. направления. 2014. Т. 52. С. 3–143.
14. *Muravnik A.* On the half-plane Diriclet problem for differential-difference elliptic equations with several nonlocal terms // Math. Model. of Natural Phenomena. 2017. V. 12. № 6. P. 130–143.

15. *Муравник А.Б.* Эллиптические задачи с нелокальным потенциалом, возникающие в моделях нелинейной оптики // Мат. заметки. 2019. Т. 105. Вып. 5. С. 747–762.
16. *Muravnik A.B.* Half-plane differential-difference elliptic problems with general-kind nonlocal potentials // Complex Variables and Elliptic Equations. 2020. V. 67. P. 1101–1120.
17. *Муравник А.Б.* Эллиптические дифференциально-разностные уравнения в полупространстве // Мат. заметки. 2020. Т. 108. Вып. 5. С. 764–770.
18. *Муравник А.Б.* Эллиптические дифференциально-разностные уравнения общего вида в полупространстве // Мат. заметки. 2021. Т. 110. Вып. 1. С. 90–98.
19. *Муравник А.Б.* Эллиптические дифференциально-разностные уравнения с разнонаправленными сдвигами в полупространстве // Уфимский мат. журн. 2021. Т. 13. № 3. С. 107–115.
20. *Разгулин А.В.* Задача управления двумерным преобразованием пространственных аргументов в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 8. С. 1078–1091.
21. *Россовский Л.Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции // Совр. математика. Фунд. направления. 2014. Т. 54. С. 3–138.
22. *Shamin R.V., Skubachevskii A.L.* The mixed boundary value problem for parabolic differential-difference equation // Funct. Differ. Equat. 2001. V. 8. P. 407–424.
23. *Селицкий А.М., Скубачевский А.Л.* Вторая краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2007. Т. 26. С. 324–347.
24. *Зайцева Н.В.* Глобальные классические решения некоторых двумерных гиперболических дифференциально-разностных уравнений // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 745–751.
25. *Зайцева Н.В.* О глобальных классических решениях некоторых гиперболических дифференциально-разностных уравнений // Докл. РАН. 2020. Т. 491. № 2. С. 44–46.
26. *Zaitseva N.V.* Classical solutions of hyperbolic differential-difference equations with several nonlocal terms // Lobachevskii J. of Math. 2021. V. 42. № 1. P. 231–236.
27. *Зайцева Н.В.* О глобальных классических решениях некоторых гиперболических дифференциально-разностных уравнений // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 498. № 3. С. 37–40.
28. *Зайцева Н.В.* Гиперболические дифференциально-разностные уравнения с нелокальными потенциалами общего вида // Уфимский мат. журн. 2021. Т. 13. № 3. С. 37–44.
29. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши // Успехи мат. наук. 1953. Т. 8. Вып. 6 (58). С. 3–54.
30. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1981.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 05.11.2021 г.
После доработки 20.11.2021 г.
Принята к публикации 01.12.2021 г.