*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 5, с. 638–655*

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

*УДК 517.956.227+517.958:539.3*

# ВОЛНЫ РЭЛЕЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ОБЛАСТЯХ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ГРАНИЦАМИ

**© 2022 г. С. А. Назаров**

Рассмотрены формально самосопряжённые эллиптические системы дифференциальных уравнений в частных производных, порождающие формально положительные операторы и обладающие полиномиальным свойством. Найдены достаточные условия, обеспечивающие существование поверхностных волн Рэлея в задаче Неймана на полупространстве с периодической границей. Приведены примеры конкретных задач математической физики, в которых полученные достаточные условия упрощаются или превращаются в критерий, а также изучены не обслуживаемые общими результатами задачи теории пластин и пьезоэлектрики, причём последняя требует серьёзной модификации подхода.

DOI: 10.31857/S0374064122050053, EDN: CBEIJR

**1. Постановка задачи.** Пусть $\Omega$ – область в полупространстве $\mathbb{R}^d_+ = \{x = (y, z) : y \in \mathbb{R}^{d-1},\ z \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty)\}$, $d \geqslant 2$, инвариантная относительно целочисленных сдвигов вдоль осей $y_j = x_j$, $j = \overline{1, d-1}$, и бесконечная в направлении оси $z = x_d$, т.е.

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d : (y + \alpha, z) \in \Omega\} \quad \text{для любых мультииндексов} \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{d-1}) \in \mathbb{Z}^{d-1}, \tag{1}$$

где $\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \ldots\}$, $\{x \in \mathbb{R}^d : z > R\} \subset \Omega$, $R > 0$.

Границу $\Gamma$ считаем $(d-1)$-мерной и липшицевой. Введём полубесконечную призму $\Pi = \{x \in \Omega : |y_j| < 1/2,\ j = \overline{1, d-1}\}$ с сечением $\omega = (-1/2, 1/2)^{d-1}$ (единичный куб в $\mathbb{R}^{d-1}$) и криволинейным, не обязательно связным, основанием $\varpi = \{x \in \Gamma : y \in \omega\}$. Рассмотрим краевую задачу

$$\mathcal{L}(\nabla)u(x) = \lambda u(x), \quad x \in \Pi, \tag{2}$$

$$\mathcal{B}(x, \nabla)u(x) = 0, \quad x \in \varpi, \tag{3}$$

с условиями квазипериодичности

$$\partial_j^m u_k(x)|_{x_j=1/2} = e^{i\theta_j}\partial_j^m u_k(x)|_{x_j=-1/2}, \quad x|_{x_j=\pm1/2} \in \partial\Pi,$$

$$j = \overline{1, d-1}, \quad k = \overline{1, K}, \quad m = \overline{0, 2t_k - 1}. \tag{4}$$

Поясним принятые обозначения. Прежде всего, $\nabla = (\partial_1, \ldots, \partial_{d-1})^{\text{т}}$, $\partial_j = \partial/\partial x_j$ и матричный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}(\nabla) = \overline{\mathcal{M}(-\nabla)}^{\text{т}}\mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla), \tag{5}$$

формально самосопряжённый. Здесь $^{\text{т}}$ – знак транспонирования, черта означает комплексное сопряжение, $\mathcal{M}(\nabla)$ – матрица однородных дифференциальных операторов с постоянными (комплексными) коэффициентами, у которой элементы имеют порядки $\operatorname{ord}\mathcal{M}_{nk} = t_k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, где $k = \overline{1, K}$, $n = \overline{1, N}$, а также $K, N \in \mathbb{N}$ и $N \geqslant K$. Сама матрица $\mathcal{M}(\nabla)$ является алгебраически комплектной [1, гл. 3], т.е. существует такое число $\rho_{\mathcal{M}} \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, что для любой строки $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_K)$, у которой элементы $\mathbf{p}_k$ – однородные полиномы степени $\operatorname{ord}\mathbf{p}_k = t_k + \rho$, причём $\rho \geqslant \rho_{\mathcal{M}}$, найдётся полиномиальная строка $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_N)$, удовлетворяющая равенству

$$\mathbf{p}(\xi) = \mathbf{q}(\xi)\mathcal{M}(\xi) \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{6}$$

Это требование обеспечивает неравенство Корна [1, § 3.7.4]

$$\|u; H^{\mathbf{t}}(\Xi)\|^2 \leqslant \mathcal{C}_{\Xi,\mathcal{M}}(\|\mathcal{M}(\nabla)u; L^2(\Xi)\|^2 + \|u; L^2(\Xi)\|^2)$$

$$\text{для} \quad u = (u_1, \ldots, u_k)^{\text{т}} \in H^{\mathbf{t}}(\Xi) = H^{t_1}(\Xi) \times \cdots \times H^{t_K}(\Xi), \tag{7}$$

где фигурируют пространство Лебега $L^2(\Xi)$ с натуральным скалярным произведением $(\,\cdot\,,\cdot\,)_\Xi$ и пространство Соболева $H^l(\Xi)$ порядка $l \in \mathbb{N}$, снабжённое стандартной нормой, а $\Xi \in \mathbb{R}^d$ – произвольная область с $(d-1)$-мерной липшицевой границей $\partial\Xi$ и компактным замыканием $\overline{\Xi} = \Xi \bigcup \partial\Xi$. Разумеется, постоянная Корна $C_{\Xi,\mathcal{M}}$ в неравенстве (7) не зависит от вектор-функции $u \in H^{\mathbf{t}}(\Xi)$. Справедлива формула Грина

$$(\mathcal{L}u, v)_\Xi = a(u, v; \Xi) + (\mathcal{N}u, \mathcal{D}v)_{\partial\Xi}, \tag{8}$$

в которой $v = (v_1, \ldots, v_K)^{\text{т}} \in H^{\mathbf{t}}(\Xi)$, $u \in H^{t_\bullet + \mathbf{t}}(\Xi)$ и $t_\bullet = \max\{t_1, \ldots, t_K\}$. Кроме того, $\mathcal{D}(x, \nabla)$ – система Дирихле на $\partial\Xi$, $\operatorname{ord}\mathcal{D}_{pk} \leqslant t_k - 1$ (см., [2, гл. 2, § 2]), а $(T \times K)$-матрица $\mathcal{N}(x, \nabla)$ – оператор краевых условий Неймана (3), причём $T = t_1 + \ldots + t_K$. Предположим, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – эрмитовы положительно определённые числовые матрицы с размерами $N \times N$ и $K \times K$ соответственно; тогда полуторалинейная форма

$$a(u, v; \Xi) = (\mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla)u, \mathcal{M}(\nabla)v)_\Xi \tag{9}$$

оказывается эрмитовой и положительной, а вариационная постановка задачи (2)–(4) со спектральным параметром $\lambda$ и параметром Флоке $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{d-1}) \in [-\pi, \pi)^{d-1}$

$$a(u, v; \Pi) = \lambda(\mathcal{B}u, v)_\Pi \quad \text{для всех} \quad v \in H^{\mathbf{t}}_\theta(\Pi) \tag{10}$$

осуществляется на пространстве $H^{\mathbf{t}}_\theta(\Pi)$ вектор-функций $u \in H^{\mathbf{t}}(\Pi)$, для которых выполнены устойчивые $(p = \overline{0, t_k - 1})$ условия квазипериодичности (4) (используем терминологию монографии [2, гл. 2])

$$H^{\mathbf{t}}_\theta(\Pi) = \{u \in H^{\mathbf{t}}(\Pi) : \partial_j^m u_k(x)|_{x_j = 1/2} = e^{i\theta_j} \partial_j^m u_k(x)|_{x_j = -1/2} \quad \text{при} \quad x|_{x_j = \pm 1/2} \in \partial\Pi,$$

$$j = \overline{1, d-1}, \quad k = \overline{1, K}, \quad m = \overline{0, t_k - 1}\}. \tag{11}$$

При этом краевые условия Неймана (3) и естественные $(p = \overline{t_k, 2t_k - 1})$ условия квазипериодичности (3) для гладкого решения $H^{t_\bullet + \mathbf{t}}_\theta(\Pi)$ восстанавливаются из интегрального тождества (10) при помощи формулы Грина (8) (см., например, [2, гл. 2; 3, гл. 2]).

**2. Волны Рэлея.** Пусть при каких-то $\lambda \in \mathbb{R}_+$ и $\theta \in [-\pi, \pi)^{d-1}$ у задачи (9) есть нетривиальное решение $u \in H^{\mathbf{t}}(\Pi)$. Обычным способом (см., например, монографии [4, 5]) определим вектор-функцию

$$\Omega \ni x \mapsto \mathbf{u}(x) = e^{i(\theta_1[y_1] + \ldots + \theta_{d-1}[y_{d-1}])} u(y_1 - [y_1], \ldots, y_{d-1} - [y_{d-1}], z), \tag{12}$$

где $[b]$ – целая часть числа $b \in \mathbb{R}$. Нетрудно проверить, что благодаря условиям квазипериодичности, включённым в определение (11), вектор-функция (12) попадает в пространство $H^{\mathbf{t}}_{\text{loc}}(\overline{\Pi})$. Более того, в п. 4 будет проверено, что $\mathbf{u}$ – функция, бесконечно дифференцируемая внутри области $\Omega$ и экспоненциально затухающая при $z \to +\infty$. Таким образом, при дополнительном предположении о гладкости поверхности $\Gamma$ эта вектор-функция удовлетворяет дифференциальной задаче

$$\mathcal{L}(\nabla)\mathbf{u}(x) = \lambda\mathbf{u}(x), \qquad x \in \Omega,$$

$$\mathcal{B}(x, \nabla)\mathbf{u}(x) = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{13}$$

и локализована около границы, т.е. обладает всеми свойствами классических волн Рэлея.

Подобные специфические “поверхностные волны” в деформируемых средах были обнаружены впервые лордом Рэлеем [6], а затем в иных вариантах Г. Лэмбом [7] и Р. Стоунли [8]. Сопутствующие физические явления нашли разнообразные применения в сейсмологии и сейсморазведке, в методах неразрушающего контроля приповерхностных повреждений и прочности соединений и многих других прикладных дисциплинах. Поэтому количество опубликованных исследований в этом направлении, выполненных на разных уровнях строгости, огромно – упомянем несколько монографий [9–11] и работ [12–20], а также обзорную статью [21].

Большинство результатов, особенно для векторных задач, например, в теории упругости, получены при помощи аналитических методов в случае прямых границ и вычислительных методов в случае осциллирующих. Далее, как и в [16–18, 20], применяются вариационные методы спектрального анализа, годящиеся для произвольных периодических границ и широкого класса систем дифференциальных уравнений. Вместе с тем при доказательстве существования экспоненциально затухающей при $z \to +\infty$ волны (12) задействованные методы не предоставляют сколь-нибудь точной информации о её строении, т.е. исследование спектральных характеристик найденных рэлеевских волн оставлено за рамками данной работы.

В следующих двух пунктах изучается задача (2)–(4) при $\lambda = 0$, для которой установлены теоремы 1 и 2, позволяющие сделать выводы о непрерывном спектре задачи (10). В п. 5 (теорема 5) доказываются достаточные условия непустоты дискретного спектра в случае $\theta \neq 0$ (при $\theta = 0$ он заведомо пуст). В п. 6 полученный результат применяется к скалярной и векторным задачам об акустической и упругих средах, а в п. 7 рассматриваются две механические задачи, не охватываемые теоремой 5 и требующие модификации подхода, причём для рассмотренной пьезоэлектрической задачи (п. 7, $5^\circ$) результат и способ его вывода существенно отличаются от, например, задачи теории упругости (п. 6, $2^\circ$).

**3. Полиномиальное свойство и спектр.** В пространстве Соболева $H^{\mathbf{t}}_\theta(\Pi)$ введём эквивалентную норму

$$|||u|||_\theta = (a(u,u;\Pi) + (\mathcal{B}u,u)_\Pi)^{1/2}. \tag{14}$$

Требуемая оценка

$$\|u; H^{\mathbf{t}}_\theta(\Pi)\| \leqslant c_\theta |||u|||_\theta \tag{15}$$

обеспечена применением неравенства Корна (7) в усечённой призме $\Pi(R) = \{x \in \Pi : z < R\}$ и кубах $Q_{R+m} = (R+m, R+m+1) \times (-1/2, 1/2)$, $m \in \mathbb{N}_0$. Просуммировав эти неравенства, придём к соотношению

$$\|u; H^{\mathbf{t}}_\theta(\Pi)\|^2 \leqslant \max\{\mathcal{C}_{\Pi(R),\mathcal{M}}, \mathcal{C}_{Q_0,\mathcal{M}}\}(\|\mathcal{M}(\nabla)u; L^2(\Pi)\|^2 + \|u; L^2(\Pi)\|^2)$$

и, наконец, учтём положительную определённость матриц $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в формулах (9) и (14). Неравенство, обратное для (15), очевидно.

Гильбертово пространство (11), снабжённое скалярным произведением

$$\langle u, v\rangle_\theta = a(u,v;\Pi) + (\mathcal{B}u, v)_\Pi, \tag{16}$$

обозначим через $\mathcal{H}_\theta$ и введём в нем положительный, симметричный и непрерывный, а значит, самосопряжённый оператор $\mathcal{T}_\theta$ при помощи формулы

$$\langle \mathcal{T}_\theta u, v\rangle_\theta = (\mathcal{B}u, v)_\Pi \quad \text{при всех} \quad u, v \in \mathcal{H}_\theta. \tag{17}$$

Его норма не превосходит единицы. Благодаря определениям (14) и (16), (17) вариационная задача (10) оказывается эквивалентной абстрактному уравнению

$$\mathcal{T}_\theta u = \tau u \quad \text{в пространстве } \mathcal{H}_\theta$$

с новым спектральным параметром

$$\tau = (1+\lambda)^{-1}. \tag{18}$$

По спектру $\Sigma_\theta \subset [0,1]$ оператора $\mathcal{T}_\theta$ определяем спектр задачи (10) (или (2)–(4) в случае гладкой границы $\Gamma$)

$$\sigma_\theta = \{\lambda : (1+\lambda)^{-1} \in \Sigma_\theta\} \subset \overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty). \tag{19}$$

Более того, связь (18) спектральных параметров передает все качества (дискретность, непрерывность и проч.) компонент спектра $\mathcal{T}_\theta$ компонентам спектра $\sigma_\theta$.

Изучим спектр (19), используя информацию о задаче (10), полученную на основе теории эллиптических краевых задач в областях с цилиндрическими выходами на бесконечность [22, гл. 5; 23, § 3] и полиномиального свойства [23–25] полуторалинейной формы (19):

$$a(u,u;\Xi)=0, \quad u\in H^{\mathbf{t}}(\Xi) \quad \Leftrightarrow \quad u\in\mathcal{P}|_\Xi. \tag{20}$$

Здесь $\mathcal{P}$ – конечномерное подпространство векторных полиномов. По причине алгебраической комплектности матрицы $\mathcal{M}(\nabla)$ справедливо равенство [23; предложение 1.6]

$$\mathcal{P}=\{p=(p_1,\ldots,p_K)^{\mathrm{т}}:\mathcal{M}(\nabla)p(x)=0, \quad x\in\mathbb{R}^d\}. \tag{21}$$

Подчеркнём, что в линеале (21) могут быть и полиномы $p=(p_1,\ldots,p_K)^{\mathrm{т}}$, у которых $\operatorname{ord} p_k\geqslant \geqslant t_k$ (см. п. 6, 2°).

Высказывание (21) предоставляет много полезных сведений о задаче (10), в частности, следующее утверждение [23; теоремы 1.9, 3.4 и 5.1], пояснения к проверке которого приведено в следующем пункте.

**Теорема 1.** *При* $\theta\in[-\pi,\pi)^{d-1}\setminus\{0\}$ *задача*

$$a(u,v;\Pi)=f(v) \quad \textit{для всех} \quad v\in H^{\mathbf{t}}_\theta(\Pi) \tag{22}$$

*с непрерывным (анти)линейным функционалом* $f\in H^{\mathbf{t}}_\theta(\Pi)^*$ *имеет единственное решение* $u\in H^{\mathbf{t}}_\theta(\Pi)$ *и верна оценка*

$$\|u;H^{\mathbf{t}}_\theta(\Pi)\|\leqslant c_\theta\|f;H^{\mathbf{t}}_\theta(\Pi)^*\|,$$

*в которой множитель* $c_\theta$ *не зависит от* $f$, *но неограниченно возрастает при* $\theta\to 0\in\mathbb{R}^{d-1}$.

Теперь выводим первичную информацию о спектре (19), который представим как дизъюнктное объединение существенного $\sigma^e_\theta$ и дискретного $\sigma^d_\theta$ спектров.

**Следствие 1.** *1) При* $\theta\in[-\pi,\pi)^{d-1}\setminus\{0\}$ *непрерывный спектр* $\sigma^c_\theta$ *совпадает с существенным* $\sigma^e_\theta$ *и приобретает положительную точку отсечки* $\lambda^\dagger_\theta$, *а значит, дискретный спектр* $\sigma^d_\theta$ *может появиться только на интервале* $(0,\lambda^\dagger_\theta)$.

*2) При* $\theta=0$ *спектр* $\sigma_0=\sigma^e_0=\sigma^c_0$ *занимает всю замкнутую положительную полуось* $\overline{\mathbb{R}_+}$ *и поэтому* $\sigma^d_0=\varnothing$.

**Доказательство.** Поскольку второе слагаемое в левой части интегрального тождества

$$a(u,v;\Pi)-\lambda(\mathcal{B}u,v)_\Pi=f(v) \quad \text{для всех} \quad v\in H^{\mathbf{t}}_\theta(\Pi) \tag{23}$$

порождает исчезающее при $\lambda\to 0$ непрерывное возмущение оператора задачи (22), свойство однозначной разрешимости из теоремы 1 передается задаче (23) при $\lambda\in[0,\lambda^\#_\theta)$ и некотором $\lambda^\#_\theta>0$. Согласно общим результатам [26, 27] (см. также [22, гл. 1, § 2 и замечание 3.1.5]) задача (10) не имеет собственных чисел бесконечной кратности, т.е. $\sigma^c_\theta=\sigma^e_\theta$ и, кроме того, $\sigma^c_\theta$ – луч $[\lambda^\dagger_\theta,+\infty)$, т.е. односвязное множество, причём, разумеется, $\lambda^\dagger_\theta\geqslant\lambda^\#_\theta>0$.

По поводу второго утверждения, означающего, что $\lambda^\dagger_0=0$, см. теорему 3.

**4. Экспоненциальные и полиномиальные решения; разрешимость задачи при $\boldsymbol{\theta=0}$.** Пусть носитель функционала $f$ из правой части интегрального тождества (23) компактный и $\operatorname{supp} f\subset\overline{\Pi(R)}$. Тогда решение $u\in H^{\mathbf{t}}_\theta(\Pi)$ бесконечно дифференцируемо на множестве $\overline{\Pi\setminus\Pi(R+\delta)}$ при любом $\delta>0$. В самом деле, гладкость внутри призмы $\{x\in\Pi: z>R\}$ обеспечена локальными оценками (см. монографию [2, § 3] и работы [28, 29]) решений эллиптических*) систем. Выберем какой-либо индекс $j\in\{1,\ldots,d-1\}$, для определённости $j=1$, и рассмотрим вектор-функцию

$$\widehat{u}(x)=\begin{cases}u(x) & \text{при} \ \ x_1\in(-1/2,1/2),\\ e^{\pm i\theta_1}u(x_1\mp 1,x') & \text{при} \ \ x_1\mp 1\in(-1/2,1/2),\end{cases}$$

*) Эллиптичность оператора $\mathcal{L}(\nabla)$ вытекает из полиномиального свойства (20); см. [23, гл. 5, § 1].

где $x' = (x_2, \ldots, x_{d-1}) \in (-1/2, 1/2)^{d-2}$ и $x_d > R$. В силу условий квазипериодичности, включённых в определение пространства (11), вектор-функция $\widehat{u}$ попадает в пространство $H^{\mathbf{t}}_{\mathrm{loc}}(\overline{\Pi_1(R)})$, т.е. упомянутые выше локальные оценки показывают, что она гладкая внутри расширенной призмы $\Pi_{\boxminus}(R) = (-3/2, 3/2) \times (-1/2, 1/2)^{d-2} \times (R, +\infty)$, а значит, в $\Pi(R)$, вплоть до граней $\{\pm 1/2\} \times (-1/2, 1/2)^{d-2} \times (R, +\infty)$. Перебирая по очереди остальные индексы $j$, приходим к нужному утверждению о гладкости.

Приведём некоторые сведения из теории эллиптических краевых задач в цилиндрических областях [22, гл. 5; 23, § 3; 27]. С задачей (2)–(4) в бесконечном цилиндре $\omega \times \mathbb{R}$ свяжем операторный пучок

$$\mathbb{R} \ni \mu \mapsto \mathfrak{A}^{\lambda}_{\theta}(\mu) = \mathcal{L}(\nabla_y, \mu) - \lambda \mathcal{B} : H^{l+\mathbf{t}}_{\theta}(\omega) \to H^{l-\mathbf{t}}_{\theta}(\omega), \tag{24}$$

где $l \geqslant t_{\bullet}$ и $H^{l}_{\theta}(\omega)$ – пространство Соболева функций, подчинённых условиям квазипериодичности на противоположных гранях единичного куба $\omega$

$$\partial^m_j U_k(y)|_{y_j=1/2} = e^{i\theta_j} \partial^m_j U_k(y)|_{y_j=-1/2},$$

$$y|_{y_j=\pm 1/2} \in \partial\omega, \quad j = \overline{1, d-1}, \quad k = \overline{1, K}, \quad m = \overline{0, l-1}. \tag{25}$$

В силу эллиптичности оператора $\mathcal{L}(\nabla)$ спектр пучка (24) состоит из нормальных собственных чисел (без конечных точек сгущения), расположенных в объединении полосы $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\,\mu| \leqslant \leqslant \beta^0_{\lambda}\}$ и двойного угла $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\,\mu| \leqslant \beta^1_{\lambda} |\,\mathrm{Im}\,\mu|\}$, где $\beta^0_{\lambda}$ и $\beta^1_{\lambda}$ – положительные числа (см. [26; 30, гл. 1; 22, гл. 1]). Каждому собственному числу $\mu$ отвечает каноническая система жордановых цепочек

$$\{U^{p,q} : p = \overline{1, \varkappa^g}, \quad q = \overline{0, \varkappa^a_p - 1}\}, \tag{26}$$

которая состоит из собственных $(q = 0)$ и присоединённых $(q > 0)$ векторов, удовлетворяющих уравнениям

$$\mathfrak{A}^{\lambda}_{\theta}(\mu) U^{p,q} = -\sum_{j=1}^{q} \frac{1}{j!} \frac{d^j \mathfrak{A}^{\lambda}_{\theta}}{d\mu^j}(\mu) U^{p,q-j}, \quad p = \overline{1, \varkappa^g}, \quad q = \overline{0, \varkappa^a_p - 1}. \tag{27}$$

При этом $\varkappa^g$ – геометрическая, а $\varkappa^a_1, \ldots, \varkappa^a_{\varkappa^g}$ – частные алгебраические кратности собственного числа $\mu$; $\varkappa^a_1 + \ldots + \varkappa^a_{\varkappa^g}$ – полная его кратность, и уравнения (27) с $q = \varkappa^a_p$ решений не имеют (цепочки непродолжимы). По системе (26) выстраиваются экспоненциальные решения задачи (2)–(4) в цилиндре $\omega \times \mathbb{R}$:

$$\mathcal{U}^{p,q}(y, z) = e^{\mu z} \sum_{j=0}^{q} \frac{z^j}{j!} U^{p,q-j}(y), \quad p = \overline{1, \varkappa^g}, \quad q = \overline{0, \varkappa^a_p - 1}. \tag{28}$$

Изучим экспоненциальные решения при разных значениях параметра Флоке $\theta \in [-\pi, \pi)^{d-1}$. Начнём со случая $\theta = 0$ и заметим, что среди полиномов из линеала (20) только не зависящие от переменных $y_1, \ldots, y_{d-1}$ удовлетворяют на противоположных гранях призмы $\Pi$ условиям “чистой” периодичности, в которые превращаются условия (25) при $\theta = 0$.

**Лемма 1.** *В линеале*

$$\mathcal{P}^0 = \{p \in \mathcal{P} : \textit{полином } p \textit{ зависит только от переменной } z\} \tag{29}$$

*можно ввести базис*

$$p^{k,q}(z) = \mathbf{e}_k \frac{z^q}{q!}, \quad k = \overline{1, K}, \quad q = \overline{0, t_k - 1}, \tag{30}$$

*где* $\mathbf{e}_k = (\delta_{1,k}, \ldots, \delta_{K,k})^{\mathrm{т}}$ *– орт в пространстве* $\mathbb{R}^K$, *а* $\delta_{j,k}$ *– символ Кронекера.*

**Доказательство.** Обратим внимание на важное свойство: $\partial_z p \in \mathcal{P}$ для всякого векторного полинома $p \in \mathcal{P}$ по причине инвариантности формы (9) относительно сдвигов вдоль оси $z$. Ввиду строения матричного дифференциального оператора $\mathcal{M}(\nabla)$ (см. п. 1) линейная оболочка полиномов (30) содержится в $\mathcal{P}^0$. Допустим, что в линеале (29) нашелся полином

$$P(z)=\left(a_1\frac{z^{t_1}}{t_1!},\ldots,a_K\frac{z^{t_K}}{t_K!}\right)^{\mathrm{т}},\quad a=(a_1,\ldots,a_K)^{\mathrm{т}}\in\mathbb{C}^K,\quad |a|=1. \tag{31}$$

Очевидно, что $\mathcal{M}(\mathbf{e}_d\partial_z)=\mathcal{M}(\mathbf{e}_d)Z(\partial_z)$ при $Z(\zeta)=\operatorname{diag}\{\zeta^{t_1},\ldots,\zeta^{t_K}\}$, т.е.

$$0=\mathcal{M}(\nabla)P(z)=\mathcal{M}(\mathbf{e}_d)a.$$

Требование (6), применённое к полиному (31), даёт такой векторный полином $\mathbf{q}$, что

$$\xi_d^{\rho_\mathcal{M}}(\overline{a_1}\xi_d^{t_1},\ldots,\overline{a_K}\xi_d^{t_K})=\mathbf{q}(\xi)\mathcal{M}(\xi)\quad \text{для всех}\quad \xi\in\mathbb{R}^d. \tag{32}$$

Положим $\xi_1=\ldots=\xi_{d-1}=0$ в равенстве (32) и умножим результат справа на $Z(\xi_d)^{-1}a$. В итоге придём к противоречию, доказывацему лемму:

$$\xi_d^{\rho_\mathcal{M}}|a|^2=\mathbf{q}(\mathbf{e}_d\xi_d)\mathcal{M}(\mathbf{e}_d\xi_d)Z(\xi_d)^{-1}a=\mathbf{q}(\mathbf{e}_d\xi_d)\mathcal{M}(\mathbf{e}_d)a=0.$$

Следующее утверждение – конкретизация предложения 1 [25] (см. также обзор [23, предложение 3.2]).

**Теорема 2.** *Существует такое $\gamma_0>0$, что у пучка (24) с параметрами $\theta=0\in\mathbb{R}^{d-1}$ и $\lambda=0$ в полосе $\{\mu\in\mathbb{C}:|\operatorname{Re}\mu|<\gamma_0\}$ есть только одно собственное число $\mu=0$ с полной алгебраической кратностью $2T=2(t_1+\ldots+t_K)$. Ему отвечает каноническая система жордановых цепочек*

$$\{\mathbf{e}_k,0,\ldots,0,U^{k,t_k},\ldots,U^{k,2t_k-1}\},\quad k=\overline{1,K}, \tag{33}$$

*у которых явно указаны первые $t_k$ элементов, а остальные – суть решения уравнений (27) при $\theta=0$, $\lambda=0$ и $q=\overline{t_k,2t_k-1}$.*

Первые $t_k$ элементов жордановой цепочки (33) предоставляют по формуле (28) элементы базиса (30) в линеале (29). Поскольку оператор краевых условий Неймана (3), взятый из формулы Грина (8), представим в виде $\mathcal{N}(x,\nabla)=\mathcal{N}^\#(x,\nabla)\mathcal{M}(\nabla)$ с подходящим матричным дифференциальным оператором $\mathcal{N}^\#(x,\nabla)$, согласно соотношению (21) справедливы равенства

$$\mathcal{N}(x,\nabla)p^{k,q}(x)=0,\quad x\in\varpi,\quad k=\overline{1,K},\quad q=\overline{0,t_k-1}.$$

Таким образом, полиномы (30) удовлетворяют всей задаче (2)–(4) при $\theta=0$, что и поясняет очередное утверждение, доказанное в [23, п. 3, § 5] и [25, § 5].

**Теорема 3.** *Если при некотором $\gamma\in(0,\gamma_0)$ функционал*

$$H_0^{\mathbf{t}}(\Pi)\ni v\mapsto f^\gamma(v)=f(e^{\gamma z}v) \tag{34}$$

*оказался непрерывным, то задача (22) с $\theta=0$ имеет решение $u\in H_0^{\mathbf{t}}(\Pi)$ в том и только в том случае, когда выполнены $T$ условий ортогональности*

$$f(p)=0\quad \textit{для любого}\quad p\in\mathcal{P}^0.$$

*Кроме того, это решение единственное и для него верны включение $e^{\gamma z}u\in H_0^{\mathbf{t}}(\Pi)$ и оценка*

$$\|e^{\gamma z}u;H_0^{\mathbf{t}}(\Pi)\|\leqslant c_\gamma\|f^\gamma;H_0^{\mathbf{t}}(\Pi)^*\|.$$

*При этом число $\gamma_0>0$ взято из теоремы 2, а множитель $c_\gamma$ не зависит от функционала (34), но неограниченно возрастает при $\gamma\to+0$.*

Переформулируем результат для неоднородной задачи Неймана

$$\mathcal{L}(\nabla)u(x) = f(x), \quad x \in \Pi,$$

$$\mathcal{N}(x,\nabla)u(x) = g(x), \quad x \in \varpi, \tag{35}$$

в случае периодических $(\theta = 0)$ гладких правых частей $f$, $g$ и торца $\varpi$. При экспоненциальном затухании вектор-функции $f$ задача (35) с условиями периодичности (4), $\theta = 0$, имеет периодическое гладкое решение $u \in H_0^{\mathbf{t}}(\Pi)$ тогда и только тогда, когда справедливы условия ортогональности

$$(f,p)_\Pi + (g,\mathcal{D}p)_\varpi = 0 \quad \text{при каждом} \quad p \in \mathcal{P}^0,$$

вытекающие из формулы Грина с пробными вектор-функциями $v \in \mathcal{P}^0$. Вместе с тем, как показывает последнее пояснение в формулировке теоремы 3, предельный переход $\gamma \to +0$ невозможен, и действительно оператор задачи (35), (4), $\theta = 0$, в пространстве $H_0^{\mathbf{t}}(\Pi)$ теряет фредгольмовость, так как линеал $\mathcal{P}^0$ содержит по крайней мере все постоянные векторы, из которых нетрудно соорудить сингулярную последовательность Вейля [31, гл. 9, § 1] для оператора $\mathcal{T}_0$ в точке $\tau = 1$, а значит, $\Sigma_0^e = [0,1]$ и $\sigma_0^c = [0,+\infty)$ согласно связи (18) спектральных параметров $\tau$ и $\lambda$.

Теорема 1 придает иные свойства оператору $\mathcal{T}_\theta$ при $\theta \neq 0$ – он становится изоморфизмом, что согласуется со следующим утверждением, вытекающим из предложения 3.2 (1) [23], поскольку задача (22) с условиями квазипериодичности остаётся самосопряжённой, но ни один полином из линеала (21) не удовлетворяет названным условиям при $\theta \neq 0$.

**Теорема 4.** *При* $\theta \in [-\pi,\pi)^{d-1} \setminus \{0\}$ *найдётся такое положительное число* $\gamma(\theta)$, *что полоса* $\{\mu \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}\mu| < \gamma(\theta)\}$ *свободна от спектра пучка* $\mu \mapsto \mathfrak{A}_\theta^0(\mu)$. *При этом* $\gamma(\theta) \to +0$ *в случае* $\theta \to 0 \in \mathbb{R}^{d-1}$.

**Следствие 2.** *При* $\theta \in [-\pi,\pi)^{d-1} \setminus \{0\}$ *и* $|\gamma| < \gamma(\theta)$, *где число* $\gamma(\theta) > 0$ *взято из теоремы 4, решение* $u \in H_\theta^{\mathbf{t}}(\Pi)$ *задачи (22) с правой частью* $f$, *подчинённой требованию (34), удовлетворяет включению* $e^{\gamma z}u \in H_\theta^{\mathbf{t}}(\Pi)$ *и оценке*

$$\|e^{\gamma z}u; H_\theta^{\mathbf{t}}(\Pi)\| \leqslant c_\gamma \|f^\gamma; H_\theta^{\mathbf{t}}(\Pi)^*\|.$$

**Доказательство** выводится из теоремы 4 при помощи общих результатов работы [27] (см. также [22, гл. 3 и 5] и [23, § 3]), однако при малом $\gamma$ может быть получено элементарными средствами. В качестве пробной вектор-функции в интегральном тождестве (22) возьмём произведение $v^\gamma = e^{\gamma z}v \in C_c^\infty(\overline{\Pi})^K \bigcap H_\theta^{\mathbf{t}}(\Pi)$. Ввиду компактности её носителя можно сделать замену неизвестной $u \mapsto u^\gamma = e^{\gamma z}u$. В результате интегральное тождество принимает вид

$$(\mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla - \gamma \mathbf{e}_d)u^\gamma, \mathcal{M}(\nabla + \gamma \mathbf{e}_d)v^\gamma)_\Pi = f(v^\gamma). \tag{36}$$

По замыканию формула (36) верна при $v^\gamma \in H_\theta^{\mathbf{t}}(\Pi)$, а её левая часть порождает малое, с нормой $O(|\gamma|)$, возмущение оператора задачи (22), а значит, при достаточно малом $|\gamma|$ видоизменённая задача остаётся однозначно разрешимой, что и требовалось проверить. Остаётся отметить, что упрощённый подход не позволяет приблизить весовой показатель $\gamma$ к критической величине $\gamma(\theta)$.

Поскольку оператор вложения $\mathcal{H}_\theta \subset L^2(\Pi)^K$ некомпактный, это же свойство присуще оператору $\mathcal{T}_\theta$, заданному формулой (18). Следовательно, по теореме 9.2.1 из [31] существенный спектр $\Sigma_\theta^e$ не может состоять из единственной точки $\tau = 0$. Таким образом, найдутся точки $\tau \in (0,1)$ и $\lambda = \tau^{-1} - 1 > 0$, при которых оператор $\mathcal{T}_\theta - \tau$ и оператор $\mathcal{O}_\theta : H_\theta^{\mathbf{t}}(\Pi) \to \to H_\theta^{\mathbf{t}}(\Pi)^*$ задачи (23) теряют фредгольмовость. Пусть $\lambda = \lambda_\theta^\dagger$ – наименьшая из таких точек; она положительна при $\theta \neq 0$ в силу теоремы 1. Согласно теории краевых задач в цилиндрических областях [22, гл. 3 и 5; 27] у пучка (24) с пороговым параметром $\lambda = \lambda_\theta^\dagger$ есть собственное число $\mu = i\zeta$ на мнимой оси, которому отвечает экспоненциальное решение задачи (2)–(4) в цилиндре $\omega \times \mathbb{R}$

$$w(y,z) = e^{i\zeta z}W(y), \tag{37}$$

где $W$ – соответствующая собственная вектор-функция, удовлетворяющая условиям квазипериодичности (25). Таких собственных чисел может быть несколько – они возникают в результате смещения на мнимую ось из полуплоскостей $\{\mu\in\mathbb{C}: \pm\operatorname{Im}\mu>0\}$ собственных чисел пучка $\mathfrak{A}_\theta^\lambda$ при $\lambda\to\lambda_\theta^\dagger-0.$ Хотя бы одно из них остаётся на мнимой оси при $\lambda>\lambda_\theta^\dagger,$ так как иначе непрерывный спектр теряет связность (см. [22, гл. 1, § 2] и доказательство следствия 1 [26]). Согласно [32] последнее возможно лишь в том случае, когда у собственного вектора $W$ есть присоединённый $W^1,$ который находится из уравнения (27) при $q=1,$ принимающего вид

$$(\mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla_y,i\zeta)W^1,\mathcal{M}(\nabla_y,i\zeta)V)_\omega-\lambda_\theta^\dagger(\mathcal{B}W^1,V)_\omega=$$

$$=-(\mathcal{A}\mathcal{M}'(\nabla_y,i\zeta)W,\mathcal{M}(\nabla_y,i\zeta)V)_\omega-(\mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla_y,i\zeta)W,\mathcal{M}'(\nabla_y,i\zeta)V)_\omega \tag{38}$$

для каждого вектора $V\in H_\theta^{\mathbf{t}}(\omega).$ Здесь $\mathcal{M}'(\nabla_y,\mu)$ – производная матрицы $\mathcal{M}(\nabla_y,\mu)$ по последнему аргументу. Одно из условий разрешимости уравнения (38) получается подстановкой $V=W$ в его правую часть:

$$\operatorname{Re}(\mathcal{A}\mathcal{M}'(\nabla_y,i\zeta)W,\mathcal{M}(\nabla_y,i\zeta)W)_\omega=0. \tag{39}$$

Далее оперируем именно той волной (37), для которой выполнено соотношение (39).

**5. Непустота дискретного спектра.** Согласно максиминимальному принципу [31, теорема 10.2.2] нижняя грань $-\underline{\Sigma_\theta}$ спектра оператора $-\mathcal{T}_\theta$ (со знаком минус, но полуограниченного снизу) вычисляется по формуле

$$-\underline{\Sigma_\theta}=\inf_{u\in H_\theta^{\mathbf{t}}(\Pi)\setminus\{0\}}\frac{-\langle\mathcal{T}_\theta u,u\rangle_\theta}{\langle u,u\rangle_\theta}. \tag{40}$$

При учёте определений (14), (16), (17) и связи (18) спектральных параметров находим, что

$$-\frac{1}{1+\underline{\sigma_\theta}}=\inf_{u\in H_\theta^{\mathbf{t}}(\Pi)\setminus\{0\}}\frac{-(\mathcal{B}u,u)_\Pi}{a(u,u;\Pi)+(\mathcal{B}u,u)_\Pi}\quad\Leftrightarrow\quad\underline{\sigma_\theta}=\inf_{u\in H_\theta^{\mathbf{t}}(\Pi)\setminus\{0\}}\frac{a(u,u;\Pi)}{(\mathcal{B}u,u)_\Pi}. \tag{41}$$

Здесь $\underline{\sigma_\theta}$ – нижняя грань спектра задачи (10), которая (грань) попадает на интервал $(0,\lambda_\theta^\dagger)$ и тем самым в дискретный спектр $\sigma_\theta^d$ в том и только в том случае, если существует пробная вектор-функция $\varphi\in H_\theta^{\mathbf{t}}(\Pi),$ для которой справедливо неравенство

$$a(\varphi,\varphi;\Pi)-\lambda_\theta^\dagger(\mathcal{B}\varphi,\varphi)_\Pi<0. \tag{42}$$

Воспользуемся приёмом из работы [33] и при $\theta\neq0$ положим

$$\varphi^\varepsilon(y,z)=e^{(i\zeta-\varepsilon)z}W(y)+\sqrt{\varepsilon}\psi(x), \tag{43}$$

где $\varepsilon>0$ – малый параметр, $\{i\zeta,W\}$ – собственная пара пучка (24) при $\lambda=\lambda_\theta^\dagger,$ породившая волну (37) и удовлетворяющая требованию (39), а $\psi$ – вектор-функция из пространства $C_c^\infty(\omega\times\mathbb{R})^K$ с малым носителем вокруг какой-то точки $x^0\in\varpi.$ Имеем

$$(\mathcal{B}\varphi^\varepsilon,\varphi^\varepsilon)_\Pi=(\mathcal{B}(e^{(i\zeta-\varepsilon)z}W+\sqrt{\varepsilon}\psi),e^{(i\zeta-\varepsilon)z}W+\sqrt{\varepsilon}\psi)_{\Pi(R)}+$$

$$+\int\limits_R^\infty(\mathcal{B}W,W)_\omega e^{-2\varepsilon z}\,dz=\frac{1}{2\varepsilon}e^{-2\varepsilon R}(\mathcal{B}W,W)_\omega+(\mathcal{B}w,w)_{\Pi(R)}+2\sqrt{\varepsilon}\operatorname{Re}(\mathcal{B}w,\psi)_{\Pi(R)}+O(\varepsilon). \tag{44}$$

Аналогично поступим с первым слагаемым из (42):

$$a(\varphi^\varepsilon,\varphi^\varepsilon;\Pi)=(\mathcal{AM}(\nabla)(e^{(i\zeta-\varepsilon)z}W+\sqrt{\varepsilon}\psi),\mathcal{M}(\nabla)(e^{(i\zeta-\varepsilon)z}W+\sqrt{\varepsilon}\psi))_{\Pi(R)}+$$

$$+\int\limits_R^\infty(\mathcal{AM}(\nabla_y,i\zeta-\varepsilon)W,\mathcal{M}(\nabla_y,i\zeta-\varepsilon)W)_\omega e^{-2\varepsilon z}\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\varepsilon}e^{-2\varepsilon R}(\mathcal{AM}(\nabla_y,i\zeta)W,\mathcal{M}(\nabla_y,i\zeta)W)_\omega+e^{-2\varepsilon R}\operatorname{Re}(\mathcal{AM}'(\nabla_y,i\zeta)W,\mathcal{M}(\nabla_y,i\zeta)W)_\omega+$$

$$+(\mathcal{AM}(\nabla)w,\mathcal{M}(\nabla)w)_{\Pi(R)}+2\sqrt{\varepsilon}\operatorname{Re}(\mathcal{AM}(\nabla)w,\mathcal{M}(\nabla)\psi)_{\Pi(R)}+O(\varepsilon). \quad (45)$$

Подставим выражения (45) и (44) в левую часть соотношения (42) с пробной вектор-функцией (43) и заметим, что слагаемые порядка $\varepsilon^{-1}$ взаимно уничтожаются по причине равенства

$$(\mathcal{AM}(\nabla_y,i\zeta)W,\mathcal{M}(\nabla_y,i\zeta)W)_\omega=\lambda_\theta^\dagger(\mathcal{B}W,W)_\omega, \quad (46)$$

которое выводится интегрированием по частям из уравнения $\mathfrak{A}_\theta^{\lambda_\theta^\dagger}(i\zeta)W=0,$ умноженного скалярно в $L^2(\omega)^K$ на собственный вектор $W.$ Ещё одно упрощение происходит от равенства (39). В результате записываем соотношение (42) в виде

$$I_R^0(w)+2\sqrt{\varepsilon}\operatorname{Re}I_R^1(w,\psi)<-C\varepsilon \quad (47)$$

с некоторым множителем $C>0$ и ингредиентами

$$I_R^0(w)=a(w,w;\Pi(R))-\lambda_\theta^\dagger(\mathcal{B}w,w)_{\Pi(R)},$$

$$I_R^1(w,\psi)=a(w,\psi;\Pi(R))-\lambda_\theta^\dagger(\mathcal{B}w,\psi)_{\Pi(R)}. \quad (48)$$

Размер $R$ подобран так, что $\{x\in\Pi: z>R\}=\omega\times(R,+\infty),$ и величина (48) в силу формулы (46) не изменяется при росте $R.$ Кроме того, ввиду малости носителя вектор-функции $\psi$ и формулы Грина (8) справедливо равенство

$$I_R^1(w,\psi)=(\mathcal{N}w,\mathcal{D}\psi)_\varpi. \quad (49)$$

Подведём итог проделанным выкладкам в основном утверждении данной статьи.

**Теорема 5.** *Пусть волна (37), построенная по собственной паре* $\{i\zeta,W\}$ *пучка (24) с параметрами* $\lambda=\lambda_\theta^\dagger$ *и* $\theta\in[-\pi,\pi)^{d-1}\setminus\{0\},$ *удовлетворяет соотношению (39). Тогда дискретный спектр* $\sigma_\theta^d$ *задачи (10) (или (2)–(4) в дифференциальной постановке) заведомо не пуст в следующих двух случаях:*

*1) величина (49) отрицательна;*

*2) справедливо равенство* $I_R^0(w)=0$ *и вектор-функция* $x\mapsto\mathcal{N}(x,\nabla)w(x)$ *не вырождается хотя бы в одной точке торца* $\varpi$ *полуполосы* $\Pi.$

**Доказательство.** Утверждение 1 сомнений не вызывает: достаточно взять $\varepsilon$ малым, соблюдая тем самым неравенство (47). В утверждении 2 благодаря общим свойствам системы Дирихле (см. [2, гл. 2, § 2]) подбираем точку $x^0\in\varpi,$ для которой $b:=\mathcal{N}(x^0,\nabla)w(x^0)\in\mathbb{C}^T\setminus\{0\},$ и такую пробную вектор-функцию $\psi,$ что $b^{\mathrm{т}}\overline{\mathcal{D}(x^0,\nabla)\psi(x^0)}<0.$ В итоге при малом $\varepsilon>0$ вещественная часть величины $I_R^1(w,\psi)$ стала отрицательной, а значит, выполнено неравенство (47), т.е., как и в первом случае, согласно минимальному принципу (40) и (41) получаем, что $\underline{\sigma_\theta}<\lambda_\theta^\dagger$ и $\underline{\sigma_\theta}\in\sigma_\theta^d.$ Именно в этом и требовалось убедиться.

Теорема 5 предоставляет достаточные условия непустоты дискретного спектра задачи (2)–(4) в призме $\Pi$ при $\theta\neq0$ и существования волн Рэлея (12) в полупространстве $\Omega$ с периодической границей $\Gamma$ (см. формулы (1)). Далее будут приведены конкретные задачи, в которых полученные достаточные условия оказываются полезными.

**6. Примеры.**

1°. *Скалярный оператор второго порядка.* Воспроизведём результат [33] в чуть более общей постановке. Пусть $K = 1$, $N = d \geqslant 2$, $\mathcal{M}(\nabla) = \nabla$ и $\mathcal{B} = 1$. При помощи аффинного преобразования сведём оператор (11) к виду $-\nabla^{\text{т}}\mathcal{A}^0\nabla$, где $\mathcal{A}^0$ – диагональная матрица $\operatorname{diag}\{a_1^0, \ldots, a_d^0\}$ и $a_j^0 > 0$. Простое неравенство

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} \left|\frac{dV}{dt}(t)\right|^2 dt \geqslant \theta^2 \int\limits_{-1/2}^{1/2} |V(t)|^2\, dt \tag{50}$$

для всех $V \in H^1(-1/2, 1/2)$, $V(1/2) = e^{i\theta}V(-1/2)$, $|\theta| \leqslant \pi$, и формула

$$w(y,z) = e^{i\theta_1 y_1} \times \cdots \times e^{i\theta_{d-1} y_{d-1}}$$

для волны (37) показывают, что, во-первых, $\lambda = a_1^0\theta_1^2 + \ldots + a_{d-1}^0\theta_{d-1}^2$ и, во-вторых, величина (48) равна нулю, так как $\overline{\nabla w}^{\text{т}}\mathcal{A}^0\nabla w - \lambda_\theta^\dagger |w|^2 = 0$. Наконец, $\mathcal{N}(x,\nabla) = n(x)^{\text{т}}\mathcal{A}^0\nabla$, где $n$ – единичный вектор внешней нормали на торце $\varpi$. При этом $\mathcal{N}(x,\nabla)w(x) = 0$ почти всюду на $\varpi$, если $\varpi$ – конечное объединение*) прямого торца $\omega \times \{h_0\}$ и участков (двусторонних) гиперплоскостей $\omega_q \times \{h_q\}$, где $0 \leqslant h_0 \leqslant h_1 \leqslant \ldots \leqslant h_Q$ и $\overline{\omega_q} \subsetneqq \overline{\omega}$. Кроме того, неравенство (50) убеждает в том, что $\sigma_\theta^d = \varnothing$ для всех $\theta \in [-\pi,\pi)^{d-1}$ при последней геометрии торца.

2°. *Пространственная задача теории упругости.* Пусть $K = d = 3$, $N = 6$ и $\mathcal{B} = \mathbb{I}_3$,

$$\mathcal{M}(\nabla)^{\text{т}} = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 2^{-1/2}\partial_2 & 2^{-1/2}\partial_3 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 2^{-1/2}\partial_1 & 0 & 2^{-1/2}\partial_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{-1/2}\partial_1 & 2^{-1/2}\partial_2 & \partial_3 \end{pmatrix}. \tag{51}$$

Задача (13) описывает распространение волн в однородном анизотропном упругом пространстве с периодической границей и (вещественной) симметричной и положительно определённой матрицей жёсткости $\mathcal{A}$. Соответствующая квадратичная форма (13) представляет собой удвоенную упругую энергию деформируемого тела $\Xi$ и вырождается на пространстве жёстких смещений

$$\mathcal{P} = \{d(x)b : b \in \mathbb{R}^6\} \tag{52}$$

с линейной матрицей-функцией

$$d(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2^{-1/2}x_2 & 2^{-1/2}x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2^{-1/2}x_1 & 0 & -2^{-1/2}x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2^{-1/2}x_1 & 2^{-1/2}x_2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{53}$$

Множители $2^{-1/2}$ удобны при матричной записи определяющих соотношений теории упругости [34, гл. 4; 35, гл. 3; 36, гл. 2]: в частности, выполнены равенства $\mathcal{M}(\nabla)\mathcal{M}(x)^{\text{т}} = \mathbb{I}_6$ и $d(\nabla)^{\text{т}}d(x)|_{x=0} = \mathbb{I}_6$, где $\mathbb{I}_m$ – единичная матрица размером $m \times m$. Тот факт, что сечение $\omega$ – единичный квадрат, а не прямоугольник, не является ограничительным, так как в теории упругости матричную реализацию операторов системы дифференциальных уравнений (5) и краевых условий

$$\mathcal{N}(x,\nabla)w(x) := \mathcal{M}(n(x))^{\text{т}}\mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla)w(x) \tag{54}$$

можно сохранить при аффинном преобразовании координат путём введения нефизических столбцов смещений и напряжений (см., например, статью [37]).

Как уже упоминалось в п. 1, подобные пространственная и плоская (см. пример 3°) задачи востребованы в практической инженерии и потому изучены в значительной степени (см. [9–21]

*) В этом случае граница $\partial\Pi$ не является липшицевой, однако сама призма $\Pi$ представима как объединение липшицевых областей, и этого свойства достаточно для проведения всех рассуждений.

и многие другие публикации). Приведём лишь несколько следствий теоремы 5, которые могут быть интересны.

Введём скалярную функцию*)

$$\Phi_\theta(w;y)=\overline{\mathcal{M}(\nabla_y,i\zeta)W(y)}^{\mathrm{T}}\mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla_y,i\zeta)W(y)-\lambda_\theta^\dagger|W(y)|^2, \tag{55}$$

построенную по волне (37), удовлетворяющей условию (39). Если эта функция аннулируется всюду на квадрате $\omega=(-1/2,1/2)\ni y=(y_1,y_2)$, то величина (48) равна нулю и по теореме 5 поверхностные волны Рэлея (12) существуют в том случае, если вектор нормальных напряжений (54) отличен от нуля в какой-то точке $x^0\in\varpi$. Разумеется, всегда форму торца $\varpi$ можно подобрать так, чтобы требование к нормальным напряжениям (54) было выполнено, так как шестимерный вектор напряжений $\mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla)w(x)$ не может полностью выродиться всюду в $\Pi$.

Пусть теперь $\pm\Phi_\theta(w;y^\pm)>0$ для каких-то точек $y^\pm\in\omega$; поскольку функция (55) обладает нулевым средним по квадрату $\omega$, оба множества

$$\omega_\theta^\pm=\{y\in\omega:\pm\Phi_\theta(w;y)>0\}$$

не пустые. Теперь нетрудно построить призму $\Pi$, для которой выполнено условие $I_R^0(\omega)<0$ из теоремы 5. Это происходит, например, в случае

$$\Pi=(\Pi_0\bigcup\Upsilon_\theta^-)\setminus\Upsilon_\theta^+,\quad \Pi_0=\omega\times\mathbb{R}_+,$$
$$\Upsilon_\theta^\pm=\omega_\theta^\pm\bigcap\{x:y\in\omega,\pm z\geqslant 0\}, \tag{56}$$

так как разность интегралов

$$I_R^0(w)=\int\limits_{\Upsilon_\theta^-}\Phi_\theta(w;y)\,dx-\int\limits_{\Upsilon_\theta^+}\Phi_\theta(w;y)\,dx$$

отрицательна, когда хотя бы одно из множеств (56) не пустое. Если же $\Upsilon_\theta^\pm=\varnothing$ и $\Pi=\Pi_0$ – полуцилиндр с прямым торцом, то $\Omega=\mathbb{R}^{d-1}\times\mathbb{R}_+$ – полупространство, а соответствующее поле смещений (12) – классическая волна Рэлея (см. [38]).

$3^\circ$. *Изотропная полуполоса.* Пусть $K=d=2$, $N=3$, $\mathcal{B}=\mathbb{I}_2$ и

$$\mathcal{M}(\nabla)=\begin{pmatrix}\partial_1 & 0\\ 0 & \partial_2\\ 2^{-1/2}\partial_2 & 2^{-1/2}\partial_1\end{pmatrix},\quad \mathcal{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\lambda}+2\boldsymbol{\mu} & \boldsymbol{\lambda} & 0\\ \boldsymbol{\lambda} & \boldsymbol{\lambda}+2\boldsymbol{\mu} & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{\mu}\end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{\lambda}\geqslant 0$ и $\boldsymbol{\mu}>0$ – постоянные Ламе однородного изотропного упругого тела $\Pi\subset(-1/2,1/2)\times\times\mathbb{R}$ (масштабированием ширина полуполосы сведена к единице). При этом $\theta\in[-\pi,\pi)$ – скаляр и непосредственные вычисления (см., например, [39]) показывают, что $\lambda_\theta^\dagger=\theta^2\boldsymbol{\mu}$ и $\zeta=0$, $W(y)=(0,e^{i\theta y})^{\mathrm{T}}$ в волне (37). Таким образом,

$$\Phi_\theta(w;y)=0\quad\text{и}\quad \mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla)w(y)=(0,0,\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}i\theta e^{i\theta y},$$

$$\mathcal{M}(n(x))^{\mathrm{T}}\mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla)w(y)=n(x)\boldsymbol{\mu}i\theta e^{i\theta y}.$$

Итак, условия 2) теоремы 5 выполнены в полном объёме, т.е. волна Рэлея существует при любых параметре Флоке $\theta\in[-\pi,\pi)\setminus\{0\}$ и профиле периодической границы $\Gamma$ изотропной деформируемой полуплоскости $\Omega$.

*) Предлагаемые конструкции пригодны и для рассмотренных общих эллиптических систем. Комплексное сопряжение в задачах теории упругости не нужно.

**7. Задачи с вырожденной матрицей $\mathcal{B}$ или знакопеременной матрицей $\mathcal{A}$.**
$4^\circ$. *Пластина Кирхгофа.* Пусть $d=2,\ \ K=3,\ \ N=6$ и

$$\mathcal{M}(\nabla)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)^{\mathrm{T}} & & \mathbb{O}_{2\times 3} & \\ \mathbb{O}_{1\times 3} & 2^{-1/2}\partial_1^2 & \partial_1\partial_2 & 2^{-1/2}\partial_2^2\end{pmatrix}, \tag{57}$$

где $\mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)$ – $(3\times 2)$-матрица дифференциальных операторов из списка (37), а $\mathbb{O}_{p\times q}$ – нулевая матрица размером $p\times q$. Двумерная задача (13) служит асимптотической моделью колебаний тонкой пространственной пластины (см. [36, гл. 7], публикации [39–43] и многие другие). Кроме того, $u'(x)=(u_1(x),u_1(x))^{\mathrm{T}}$ и $u_3(x)$ – осреднённые по толщине вектор продольных смещений и прогиб пластины соответственно. На рассматриваемых низких частотах кинетическая энергия продольных колебаний в принятой модели пренебрежимо мала, и поэтому $\mathcal{B}$ – диагональная вырожденная матрица $\operatorname{diag}\{0,0,1\}$. Отметим, что в среднечастотном диапазоне, наоборот, демпфированы поперечные колебания и в качестве двумерной модели продольных колебаний пластины выступает плоская задача теории упругости из примера $3^\circ$ (и примера $2^\circ$) п. 6. Форма (9) с оператор-матрицей (57) вырождается на пространстве жёстких смещений (52) со следующей линейной матрицей-функцией:

$$d(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2^{-1/2}x_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2^{-1/2}x_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -x_1 & x_2 & 1\end{pmatrix}. \tag{58}$$

Различия между матрицами (58) и (53) обусловлены тем, что в теории Кирхгофа полный вектор смещений в тонкой пространственной пластине восстанавливается по формуле

$$(u_1(x_1,x_2)-x_3\partial_1u_3(x_1,x_2),u_2(x_1,x_2)-x_3\partial_2u_3(x_1,x_2),u_3(x_1,x_2))^{\mathrm{T}}.$$

Подставив сюда столбцы матрицы (58), получаем столбцы матрицы (53).

Известно (см., например, [36, гл. 4, § 2]), что в случае однородных и даже слоистых пластин их срединные плоскости можно зафиксировать так, что матрица $\mathcal{A}$ станет блочно-диагональной

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix}\mathcal{A}^{\leftrightarrows} & \mathbb{O}_{3\times 3}\\ \mathbb{O}_{3\times 3} & \mathcal{A}^{\updownarrow}\end{pmatrix},$$

а задача (13) распадётся на статическую $(\lambda=0)$ плоскую задачу теории упругости и спектральное уравнение четвёртого порядка, в частности, бигармоническое уравнение Софи Жермен [44, § 30] для изотропной пластины; тогда, разумеется, применима теорема 5. Вместе с тем для пластины из композиционного материала матрица $\mathcal{A}$ может быть заполненной целиком, т.е. в системе (2) все уравнения перевязаны.

При вырожденной матрице $\mathcal{B}$ формулы (14) и (16) не задают норму в пространстве $H_0^{\mathbf{t}}(\Pi)$, однако при ненулевом параметре Флоке гильбертово пространство (11) по-прежнему можно снабдить скалярным произведением (14).

**Лемма 2.** *При $\theta\in[-\pi,0)\bigcup(0,\pi)$ в качестве нормы в $H_\theta^{\mathbf{t}}(\Pi)$ можно взять выражение $a(u,u;\Pi)^{1/2}$ или $(a(u,u;\Pi)+\|u_3;L^2(\Pi)\|^2)^{1/2}$, где $a$ – квадратичная форма (9) с матрицей (57) дифференциальных операторов первого и второго порядков.*

**Доказательство.** Только тривиальное жёсткое смещение из линеала (52) с матрицей (58) удовлетворяет условиям квазипериодичности из формулы (11) на сторонах полуполосы $\Pi$, а значит, из правых частей неравенств Корна на множествах $\Pi(R)$ и $Q_{R+m}$, $m\in$ $\in\mathbb{N}_0$ (см. комментарий к соотношению (15)) можно удалить лебеговы нормы $\|u;L^2(\Pi(R))\|$ и $\|u;L^2(Q_{R+m})\|$ соответственно. Таким образом, справедлива оценка

$$\|u;H_\theta^{\mathbf{t}}(\Pi)\|\leqslant c_{\Pi,\mathcal{A},\mathcal{M}}a(u,u;\Pi)^{1/2}.$$

Лемма доказана.

5°. *Пьезоэлектрическая задача.* Пусть $d = 3$, $K = 4$, $N = 9$ и $\mathcal{B} = \mathrm{diag}\,\{1, 1, 1, 0\}$,

$$\mathcal{M}(\nabla)^{\top} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)^{\top} & \mathbb{O}_{3\times 3} \\ \mathbb{O}_{1\times 6} & \nabla^{\top} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{\mathsf{MM}} & \mathcal{A}^{\mathsf{ME}} \\ \mathcal{A}^{\mathsf{EM}} & -\mathcal{A}^{\mathsf{EE}} \end{pmatrix}. \tag{59}$$

Здесь $\mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)^{\top}$ – матрица (51), $\mathcal{A}^{\mathsf{MM}}$ и $\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}$ – (вещественные) симметричные и положительно определённые матрицы, а $\mathcal{A}^{\mathsf{ME}} = (\mathcal{A}^{\mathsf{EM}})^{\top}$ – $(6\times 3)$-матрица без каких-либо особых свойств, но обязательно ненулевая. Кроме того, $u^{\mathsf{M}} = (u_1, u_2, u_3)^{\top}$ – вектор смещений и $u_4$ – электрический потенциал. Задача (13) описывает гармонические во времени колебания пьезоэлектрической среды, в которой возможна свободная трансформация упругой энергии в электромагнитную и наоборот, что и объясняет знак минус у нижнего правого $(3\times 3)$-блока матрицы $\mathcal{A}$. В средне- и низкочастотных диапазонах спектра, в которых реализуются механические колебания, электромагнитными колебаниями следует пренебречь – поэтому спектральный параметр $\lambda$ исчезает из нижней строки системы дифференциальных уравнений (2), т.е. $\mathcal{B}_{44} = 0$. Детальное разъяснение физической постановки пьезоэлектрической задачи можно найти в [45, 46] и других монографиях. В частности, форма (2) ассоциируется не с общей энергией среды, а с её электрической энтальпией [47].

Матрица $\mathcal{A}$ из (59) не является положительной и, поскольку случай $\mathcal{A}^{\mathsf{ME}} = \mathbb{O}_{6\times 3}$ неинтересен ввиду исчезновения обсуждаемого пьезоэлектрического эффекта, добиться свойства формальной положительности у оператора (5) какими-либо заменами не удаётся. Поэтому приёмы, использованные в данной работе, не годятся для формально самосопряжённой задачи (2)–(4) с матрицами (59). Однако, следуя [48], сделаем замену неизвестной $u_4 \mapsto u^{\mathsf{E}} = iu_4$ и тем самым придадим матрице из дифференциального оператора (5) вид

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}^{\mathsf{MM}} & \mathbb{O}_{6\times 3} \\ \mathbb{O}_{3\times 6} & \mathcal{A}^{\mathsf{EE}} \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{6\times 6} & \mathcal{A}^{\mathsf{ME}} \\ \mathcal{A}^{\mathsf{EM}} & \mathbb{O}_{3\times 3} \end{pmatrix} \tag{60}$$

с двумя симметричными $(9\times 9)$-матрицами. Согласно определениям и заключениям из работы [25] для формы (9) с числовой матрицей (60) и дифференциальным оператором $\mathcal{M}(\nabla)$ из списка (59) сохраняется полиномиальное свойство (20), в котором линеал полиномов имеет вид

$$\mathcal{P} = \{(d(x)b^{\mathsf{M}}, b_4)^{\top} : b^{\mathsf{M}} \in \mathbb{C}^6, b_4 \in \mathbb{C}\},$$

где фигурирует матрица жёстких механических смещений (53), а также постоянный электрический потенциал. Таким образом, матрица (5) дифференциальных операторов второго порядка эллиптическая, а значит, теорема 1 и следствие 1, происходящие из анализа соответствующей формально самосопряжённой краевой задачи Неймана (2)–(4) в полубесконечной призме, сохраняют силу. Вместе с тем по-прежнему не удаётся определить самосопряжённый оператор $\mathcal{T}_\theta$ формулой (17) и приходится усложнить его конструкцию посредством трюка [48]. Далее имеем дело с чуть более простым случаем $\theta \in [-\pi, \pi)^2 \setminus \{0\}$, в котором вспомогательные задачи в $\Pi$ становятся однозначно разрешимыми. Именно, пусть $\mathcal{J}u^{\mathsf{M}} := \mathbf{u}_4 \in H^1_\theta(\Pi)$ – решение задачи

$$(\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}\nabla \mathbf{u}_4, \nabla v_4)_\Pi = (\mathcal{A}^{\mathsf{EM}}\mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)u^{\mathsf{M}}, \nabla v_4)_\Pi \quad \text{для всех потенциалов} \quad v_4 \in H^1_\theta(\Pi), \tag{61}$$

найденное по вектору смещений $u^{\mathsf{M}} \in H^1_\theta(\Pi)^3$. При этом $H^1_\theta(\Pi)$ – скалярное пространство Соболева с одним условием квазипериодичности на противоположных гранях призмы $\Pi$. Как проверено в статьях [48, 49] и нетрудно убедиться непосредственными вычислениями, вариационная формулировка пьезоэлектрической задачи (2)–(4) с исходными матрицами (59) равносильна интегральному тождеству

$$(\mathcal{A}^{\mathsf{MM}}\mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)u^{\mathsf{M}}, \mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)v^{\mathsf{M}})_\Pi +$$
$$+ (\mathcal{A}^{\mathsf{ME}}\mathcal{J}\nabla u^{\mathsf{M}}, \mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)v^{\mathsf{M}})_\Pi = \lambda(u^{\mathsf{M}}, v^{\mathsf{M}})_\Pi \quad \text{для всех} \quad v^{\mathsf{M}} \in H^1_\theta(\Pi)^3, \tag{62}$$

а полуторалинейная эрмитова форма

$$\langle u^{\mathsf{M}}, v^{\mathsf{M}}\rangle = (\mathcal{A}^{\mathsf{MM}}\mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)u^{\mathsf{M}}, \mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)v^{\mathsf{M}})_\Pi + (\mathcal{A}^{\mathsf{ME}}\mathcal{J}\nabla u^{\mathsf{M}}, \mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)v^{\mathsf{M}})_\Pi + (u^{\mathsf{M}}, v^{\mathsf{M}})_\Pi,$$

включающая левую часть тождества (62), оказывается положительно определённой, и её можно взять в качестве скалярного произведения в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{\mathsf{M}}_\theta = H^1_\theta(\Pi)^3$. Кроме того, теперь удаётся ввести обладающий нужными свойствами оператор $\mathcal{T}^{\mathsf{M}}_\theta$,

$$\langle \mathcal{T}^{\mathsf{M}}_\theta u^{\mathsf{M}}, v^{\mathsf{M}}\rangle = (u^{\mathsf{M}}, v^{\mathsf{M}})_\Pi \quad \text{для всех векторов смещений} \quad u^{\mathsf{M}}, v^{\mathsf{M}} \in H^1_\theta(\Pi)^3,$$

и новый спектральный параметр (18).

Всё готово для того, чтобы, как и в п. 5, применить минимальный принцип для вывода достаточных условий непустоты дискретного спектра оператора $\mathcal{T}^{\mathsf{M}}_\theta$, а значит, и изолированных собственных чисел исходной пьезоэлектрической задачи, однако интегро-дифференциальный оператор задачи (62) перестал быть локальным, и это обстоятельство существенно влияет на результат дальнейших вычислений.

Поскольку пучок (24) и его спектр сохраняют указанные в п. 4 свойства, на пороге $\lambda^\dagger_\theta$, положительном при $\theta \neq 0$, имеется волна (37) с ненулевой механической $w^{\mathsf{M}} = (w_1, w_2, w_3)^\top$ и какой-то электрической $w_4$ компонентами. Она удовлетворяет системе уравнений (2) и условиям (4) квазипериодичности, но оставляет невязку в краевом условии Неймана (3) на торце $\varpi$

$$g(x) = -\mathcal{M}(n(x))^\top \mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla)w(x)$$

с четвертой, нижней – электрической, компонентой

$$g_4(x) = -n(x)^\top \mathcal{A}^{\mathsf{ME}}\mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)w^{\mathsf{M}}(x) + n(x)^\top\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}\nabla w_4(x), \tag{63}$$

которую компенсируем при помощи решения $\mathbf{w}_4 \in H^1_\theta(\Pi)$ аналогичной (61) статической (без спектрального параметра) задачи

$$(\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}\nabla\mathbf{w}_4, \nabla v_4)_\Pi = (g_4, v_4)_\varpi \quad \text{для всех} \quad v_4 \in H^1_\theta(\Pi). \tag{64}$$

Существование экспоненциально затухающего на бесконечности решения задачи обеспечено теоремой 1 при ненулевом параметре Флоке (если $\theta = 0$, то приходится пользоваться теоремой 3, что усложняет последующий анализ; ср. работы [48, 49]).

Применим минимальный принцип (40) к оператору $\mathcal{T}^{\mathsf{M}}_\theta$ и после похожих на (41) преобразований получим, что

$$-\underline{\Sigma^{\mathsf{M}}_\theta} = \inf_{u^{\mathsf{M}}\in H^1_\theta(\Pi)^3\setminus\{0\}} \frac{-\langle\mathcal{T}^{\mathsf{M}}_\theta u^{\mathsf{M}}, u^{\mathsf{M}}\rangle_\theta}{\langle u^{\mathsf{M}}, u^{\mathsf{M}}\rangle_\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\sigma^{\mathsf{M}}_\theta} = \inf_{u^{\mathsf{M}}\in H^1_\theta(\Pi)^3\setminus\{0\}} \frac{a((u^{\mathsf{M}}, \mathcal{J}u^{\mathsf{M}}), (u^{\mathsf{M}}, \mathcal{J}u^{\mathsf{M}}); \Pi)}{\|u^{\mathsf{M}}; L^2(\Pi)\|^2}.$$

При этом, как и в п. 5, требуется найти пробную вектор-функцию $\varphi^{\mathsf{M}} \in H^1_\theta(\Pi)^3$, для которой справедливо аналогичное (42) неравенство

$$a((\varphi^{\mathsf{M}}, \mathcal{J}\varphi^{\mathsf{M}}), (\varphi^{\mathsf{M}}, \mathcal{J}\varphi^{\mathsf{M}}); \Pi) - \lambda^\dagger_\theta\|\varphi^{\mathsf{M}}; L^2(\Pi)\|^2 < 0. \tag{65}$$

Поскольку электрическая компонента $\mathcal{J}u^{\mathsf{M}} \in H^1_\theta(\Pi)$ определена по механической компоненте $u^{\mathsf{M}} \in H^1_\theta(\Pi)^3$ как решение задачи (61), конструкция (43) нуждается в изменении. Покажем как выводится достаточное условие, сопоставимое с первым утверждением теоремы 5. Положим

$$\varphi^{\mathsf{M}\varepsilon}(y, z) = \mathcal{E}^\varepsilon_R(z)w^{\mathsf{M}}(y, z), \tag{66}$$

где

$$\mathcal{E}^\varepsilon_R(z) = 1 \quad \text{при} \quad z < R, \quad \mathcal{E}^\varepsilon_R(z) = e^{-\varepsilon(z-R)} \quad \text{при} \quad z \geqslant R; \quad \partial_z\mathcal{E}^\varepsilon_R(z) = -\varepsilon e^{-\varepsilon(z-R)}X_R(z), \tag{67}$$

а $X_R$ – функция Хевисайда со скачком в точке $z = R$. Подчеркнём, что использование непрерывного кусочно-гладкого затухающего множителя $\mathcal{E}_R^\varepsilon$ возможно потому, что производная $\partial_z \mathcal{E}_R^\varepsilon$ – ограниченная кусочно-гладкая функция и $t_1 = t_2 = t_3 = 1$, т.е. справедливо включение $\varphi^{\mathsf{M}\varepsilon} \in H_\theta^1(\Pi)^3$. Электрическую компоненту $\varphi_4^\varepsilon = \mathcal{J}\varphi^{\mathsf{M}\varepsilon}$ представим в виде

$$\varphi_4^\varepsilon(y,z) = \mathcal{E}_R^\varepsilon(z) w_4(y,z) - \mathbf{w}_4(y,z) + \varepsilon \mathcal{E}_R^\varepsilon(z) w_4'(y,z), \tag{68}$$

где $w = (w^{\mathsf{M}}, w_4)$ – пороговая волна (37), а $\mathbf{w}_4 \in H_\theta^1(\Pi)$ и $w_4'$ – решения задач (64) и

$$(\mathcal{A}^{\mathsf{EE}} \nabla w_4', \nabla v_4)_\Pi - \varepsilon(\mathcal{A}^{\mathsf{EE}} X \mathbf{e}_3 X_R w_4', \nabla v_4)_\Pi + \varepsilon(\mathcal{A}^{\mathsf{EE}} \nabla w_4', \mathbf{e}_3 X_R v_4)_\Pi =$$
$$= (\mathcal{A}^{\mathsf{EE}} \mathbf{e}_3 X_R w_4, \nabla v_4)_\Pi - (\mathcal{A}^{\mathsf{EE}} \nabla w_4, \mathbf{e}_3 X_R v_4)_\Pi - (\mathcal{A}^{\mathsf{EM}} \mathcal{M}(\mathbf{e}_3) X_R w^{\mathsf{M}}, \nabla v_4)_\Pi +$$
$$+ (\mathcal{A}^{\mathsf{EM}} \mathcal{M}(\nabla) w^{\mathsf{M}}, \mathbf{e}_3 X_R v_4)_\Pi \quad \text{для всех} \quad v_4 \in H_\theta^1(\Pi) \bigcap C_c^\infty(\overline{\Pi})^K. \tag{69}$$

**Лемма 3.** *Задача (69) имеет решение*

$$w_4'(y,z) = e^{i\zeta z} W_4'(y) + \widetilde{w}_4'(y,z), \tag{70}$$

*где* $W_4' \in H_\theta^l(\omega)$ *и* $e^{\gamma z}\widetilde{w}_4' \in H_\theta^1(\Pi)$ *при любых* $l \in \mathbb{N}$ *и* $\gamma \in (0, \gamma(\theta))$.

**Доказательство.** Поскольку функции на первых позициях в скалярных произведениях из правой части интегрального тождества (69) суть произведения $e^{i\zeta z}F(y)$, нужно принять во внимание асимптотические конструкции [27] (см. также [22, гл. 3, § 3]) и решить скалярное уравнение

$$-(\nabla_y, i\zeta - \varepsilon)^{\mathrm{T}} \mathcal{A}^{\mathsf{EE}} (\nabla_y, i\zeta - \varepsilon) W_4' =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon}((\nabla_y, i\zeta - \varepsilon)^{\mathrm{T}} \mathcal{A}^{\mathsf{EE}} (\nabla_y, i\zeta - \varepsilon) W_4(y) - (\nabla_y, i\zeta - \varepsilon)^{\mathrm{T}} \mathcal{A}^{\mathsf{EM}} \mathcal{M}^{\mathsf{M}} (\nabla_y, i\zeta - \varepsilon) W^{\mathsf{M}}(y)), \quad y \in \omega,$$

с условиями квазипериодичности (25), $m = 0, 1$. Подчеркнём, что амплитудная часть $W = ((W^{\mathsf{M}})^{\mathrm{T}}, W_4)^{\mathrm{T}}$ волны (37) удовлетворяет равенству (преобразованная нижняя строка системы (2))

$$(\nabla_y, i\zeta)^{\mathrm{T}} \mathcal{A}^{\mathsf{EE}} (\nabla_y, i\zeta) W_4(y) = (\nabla_y, i\zeta)^{\mathrm{T}} \mathcal{A}^{\mathsf{EM}} \mathcal{M}^{\mathsf{M}} (\nabla_y, i\zeta) W^{\mathsf{M}}(y), \quad y \in \omega,$$

и поэтому правая часть уравнения (70) равномерно ограничена при $\varepsilon \to +0$. В силу теоремы 4 задача (70), (25) однозначно разрешима. Кроме того, оставшийся неучтенным функционал из правой части задачи вида (69) для остатка $\widetilde{w}_4'$ приобрел компактный носитель, а значит, следствие 2 заканчивает проверку леммы, причём ингредиенты представления (69) остаются ограниченными при $\varepsilon \to +0$.

Проверка того факта, что выражение (68) действительно решает задачу (61) с правой частью, построенной по произведению (66), проводится на основе интегральных тождеств (64) и (69) с подходящими пробными функциями.

Повторим выкладки (44), (45) и придём к соотношениям

$$\|\varphi^{\mathsf{M}\varepsilon}; L^2(\Pi)\|^2 = \int_R^\infty \int_\omega e^{-2\varepsilon(z-R)} |W^{\mathsf{M}}(y)|^2 \, dy \, dz + \|w^{\mathsf{M}}; L^2(\Pi(R))\|^2 =$$
$$= \frac{1}{2\varepsilon} \|W^{\mathsf{M}}; L^2(\omega)\|^2 + \|w^{\mathsf{M}}; L^2(\Pi(R))\|^2 \tag{71}$$

и

$$a((\varphi^{\mathsf{M}\varepsilon}, \varphi_4^\varepsilon), (\varphi^{\mathsf{M}\varepsilon}, \varphi_4^\varepsilon); \Pi) = \int_R^\infty e^{-2\varepsilon(z-R)} ((\mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla_y, i\zeta) W, \mathcal{M}(\nabla_y, i\zeta) W)_\omega +$$
$$+ \varepsilon \, 2\mathrm{Re}\, (\mathcal{A}\mathcal{M}(e_3) W, \mathcal{M}(\nabla_y, i\zeta) W)_\omega) \, dz + (\mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla) w, \mathcal{M}(\nabla) w)_{\Pi(R)} - (\mathcal{A}^{\mathsf{EE}} \nabla \mathbf{w}_4, \nabla \mathbf{w}_4)_\Pi +$$

$$+ 2\,\mathrm{Re}\,((\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}\nabla w_4, \nabla \mathbf{w}_4)_\Pi - (\mathcal{A}^{\mathsf{EM}}\mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)w^{\mathsf{M}}, \nabla \mathbf{w}_4)_\Pi) + O(\varepsilon) =$$
$$= \frac{1}{2\varepsilon}(\mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla_y, i\zeta)W, \mathcal{M}(\nabla_y, i\zeta)W)_\omega + (\mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla)w, \mathcal{M}(\nabla)w)_{\Pi(R)} -$$
$$- (\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}\nabla \mathbf{w}_4, \nabla \mathbf{w}_4)_\Pi + 2\,\mathrm{Re}\,(g_4, \mathbf{w}_4)_\varpi + O(\varepsilon). \qquad (72)$$

Если преобразование (71) весьма просто (оно привело к равенству благодаря выбору (67) экспоненциальной весовой функции $\mathcal{E}_R^\varepsilon(z)$), то преобразование (72) достаточно запутано из-за дополнительных слагаемых в определении преобразования (68), поэтому приведём пояснения. Сомножители $\varepsilon$ и $\mathcal{E}_R^\varepsilon(z)$ в последнем слагаемом из (68), а также представление (70), по сути означающее ограниченность решения $w_4'$ задачи (69), демонстрируют, что вклад выражения $\varepsilon\mathcal{E}_R^\varepsilon w_4'$ составляет $O(\varepsilon)$ и им можно пренебречь. Интеграл, содержащий матрицу $-\mathcal{M}(\mathbf{e}_3) = = \partial_\varepsilon \mathcal{M}(\nabla_y, i\zeta - \varepsilon)$, исчез по причине привычного соглашения (39). Согласно следствию 2 решение $\mathbf{w}_4$ задачи (64) с финитным функционалом в правой части затухает на бесконечности с фиксированной (не зависящей от $\varepsilon$) скоростью $O(e^{-\gamma z})$, $\gamma > 0$, и, следовательно, в скалярных произведениях $(\mathcal{A}^{\mathsf{EM}}\mathcal{M}(\nabla)\mathcal{E}_R^\varepsilon w^{\mathsf{M}}, \nabla \mathbf{w}_4)_\Pi$ и подобных ему замена $\mathcal{E}_R^\varepsilon(z) \mapsto 1$ также порождает допустимую погрешность $O(\varepsilon)$. Кроме того, последний переход в выкладке (72) использует определение (63), а равенство (64) при $v_4 = \mathbf{w}_4$ показывает, что выражение под знаком Re равно $(\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}\nabla \mathbf{w}_4, \nabla \mathbf{w}_4)_\Pi$. Наконец, подстановка выражений (72) и (71) в неравенство (65) с пробной вектор-функцией (66), (68) приводит при учёте равенств (46) и (64) к соотношению

$$\mathbf{I}_R^0(w) < C\varepsilon,$$

где $C > 0$ – некоторая постоянная и

$$\mathbf{I}_R^0(w) = (\mathcal{A}\mathcal{M}(\nabla)w, \mathcal{M}(\nabla)w)_{\Pi(R)} - \lambda_\theta^\dagger \|w^{\mathsf{M}}; L^2(\Pi(R))\|^2 + (\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}\nabla \mathbf{w}_4, \nabla \mathbf{w}_4)_\Pi. \qquad (73)$$

Теперь рассуждения, сопроводившие проверку теоремы 5, дают следующее утверждение.

**Теорема 6.** *Если при* $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, $|\theta_j| \in (0, \pi]$, *отрицательно выражение (73), вычисленное для пьезоэлектрической волны (37), которая удовлетворяет задаче (2)–(4) с пороговым параметром* $\lambda = \lambda_\theta^\dagger > 0$ *и подчинена соотношению (39), то дискретный спектр* $\sigma_\theta^d$ *задачи (2)–(4) с матрицами (59) не пуст.*

По сравнению с величиной (48), найденной для задачи теории упругости (п. 6, 2°), величина (73) содержит дополнительное положительное слагаемое

$$(\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}\nabla \mathbf{w}_4, \nabla \mathbf{w}_4)_\Pi, \qquad (74)$$

появившееся в результате компенсирования неоднородности (63) в краевом условии (3) при формировании оператора $\mathcal{J}w^{\mathsf{M}}$. Это наблюдение согласуется с физической сущностью пьезоэлектрической задачи: помимо упругой энергии $(\mathcal{A}^{\mathsf{MM}}\mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)w^{\mathsf{M}}, \mathcal{M}^{\mathsf{M}}(\nabla)w^{\mathsf{M}})_{\Pi(R)}$ тело $\Pi(R)$ запасает электромагнитную энергию $(\mathcal{A}^{\mathsf{EE}}\nabla w, \nabla w_4)_{\Pi(R)}$. На первый взгляд кажется, что неравенство $\mathbf{I}_R^0(w) < 0$ – более трудно достижимая цель, чем неравенство $I_R^0(w) < 0$ в "чисто упругой" ситуации, в частности, манипуляции с множествами (56) бесполезны именно из-за слагаемого (74). Вместе с тем сравнить величины $\mathbf{I}_R^0(w)$ и $I_R^0(w)$ не удаётся хотя бы потому, что точки отсечки непрерывного спектра в пьезоэлектрической и упругой задачах никак не связаны. Наконец, опять-таки из-за нелокального оператора $\mathcal{J}$ не удалось применить трюк работы [33] и получить аналог п. 2) теоремы 5 для задачи (2)–(4) с матрицами (59).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nečas J.* Les méthodes in théorie des équations elliptiques. Paris-Prague, 1967.
2. *Лионс Ж.-Л., Madженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.
3. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М., 1973.
4. *Миттра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. М., 1974.

5. *Wilcox C.H.* Scattering theory for diffraction gratings // Appl. Math. Sci. Ser. V. 46. Singapore, 1997.
6. *Rayleigh J.W.S.* On waves propagated along the plane surface of an elastic solid // Proc. London Math. Soc. 1885. V. 17. № 253. P. 4–11.
7. *Lamb H.* On waves in an elastic plate // Proc. Roy. Soc. 1917. V. A93. P. 114–128.
8. *Stoneley R.* Elastic waves at the surface of separation of two solids // Proc. R. Soc. Lond. A. 1924. V. 106. P. 416–428.
9. *Викторов И.А.* Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М., 1981.
10. *Kaplunov J.D., Kossovich L.Y., Nolde E.V.* Dynamics of thin Walled Elastic Bodies. SanDiego, 1997.
11. *Михасев Г.И., Товстик П.Е.* Локализованные колебания и волны в тонких оболочках. Асимптотические методы. М., 2009.
12. *Коненков Ю.К.* Об изгибной волне "рэлеевского" типа // Акустический журн. 1960. Т. 6. С. 124–126.
13. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Особенности распределения энергии в тонкой прямоугольной пластине при краевом резонансе // Докл. АН УССР. Сер. А. 1976. № 7. С. 612–616.
14. *Kim J.-Y., Rokhlin S.I.* Surface acoustic wave measurements of small fatigue cracks initiated from a surface cavity // Int. J. of Solids and Structures. 2002. V. 39. P. 1487–1504.
15. *Zakharov D.D., Becker W.* Rayleigh type bending waves in anisotropic media // J. of Sound and Vibration. 2003. V. 261. P. 805–818.
16. *Камоцкий И.В.* О поверхностной волне, бегущей вдоль ребра упругого клина // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20. № 1. С. 86–92.
17. *Камоцкий И.В., Киселев А.П.* Энергетический подход к доказательству существования волн Релея в анизотропном упругом полупространстве // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73. № 4. С. 645–654.
18. *Заворохин Г.Л., Назаров А.И.* Об упругих волнах в клине // Зап. науч. семинаров Петербург. отд. Мат. ин-та РАН. 2010. Т. 380. С. 45–52.
19. *Krushynska A.A.* Flexural edge waves in semi-infinite elastic plates // J. of Sound and Vibration. 2011. V. 330. P. 1964–1976.
20. *Nazarov A., Nazarov S., Zavorokhin G.* On symmetric wedge mode of an elastic solid // Europ. J. of Appl. Math. 2021. V. 33. № 2. P. 201–223.
21. *Lawrie J., Kaplunov J.* Edge waves and resonance on elastic structures: an overview // Math. Mech. of Solids. 2012. V. 17. № 1. P. 4–16.
22. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin; New York, 1994.
23. *Назаров С.А.* Полиномиальное свойство самосопряжённых эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54. № 5. С. 77–142.
24. *Назаров С.А.* Самосопряжённые эллиптические краевые задачи. Полиномиальное свойство и формально положительные операторы // Проблемы мат. анализа. СПб., 1997. Вып. 16. С. 167–192.
25. *Назаров С.А.* Несамосопряжённые эллиптические задачи с полиномиальным свойством в областях, имеющих цилиндрические выходы на бесконечность // Зап. науч. семинаров Петербург. отд. Мат. ин-та РАН. 1997. Т. 249. С. 212–230.
26. *Агранович М.С., Вишик М.И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19. № 3. С. 53–160.
27. *Кондратьев В.А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Московск. мат. о-ва. 1963. Т. 16. С. 219–292.
28. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic differential equations satisfying general boundary conditions. 2 // Comm. Pure Appl. Math. 1964. V. 17. P. 35–92.
29. *Солонников В.А.* Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Дуглиса – Л. Ниренберга. 2 // Тр. МИАН СССР. 1966. Т. 92. С. 233–297.
30. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию несамосопряженных операторов. М., 1965.
31. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л., 1980.
32. *Назаров С.А.* Пороговые резонансы и виртуальные уровни в спектре цилиндрических и периодических волноводов // Изв. РАН. Сер. мат. 2020. Т. 84. № 6. С. 73–130.
33. *Камоцкий И.В., Назаров С.А.* Экспоненциально затухающие решения задачи о дифракции на жёсткой периодической решетке // Мат. заметки. 2003. Т. 73. № 1. С. 138–140.
34. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М., 1977.
35. *Bertram A.* Elasticity and Plasticity of Large Deformations. Berlin; Heidelberg, 2005.
36. *Назаров С.А.* Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск, 2002.

37. *Лангер С., Назаров С.А., Шпековиус-Нойгебауер М.* Аффинные преобразования трёхмерных анизотропных сред и явные формулы для фундаментальных матриц // Прикл. механика и техн. физика. 2006. Т. 47. № 2. С. 95–102.
38. *Камоцкий И.В., Назаров С.А.* Упругие волны, локализованные около периодических семейств дефектов // Докл. РАН. 1999. Т. 368. № 6. С. 771–773.
39. *Шойхет Б.А.* Об асимптотически точных уравнениях тонких плит сложной структуры // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37. № 5. С. 914–924.
40. *Ciarlet P.G.* Mathematical Elasticity, II: Theory of Plates. Studies in Mathematics and its Applications. V. 27. Amsterdam, 1997.
41. *Dauge M., Djurdjevic I., Faou E., Rössle A.* Eigenmode asymptotics in thin elastic plates // J. de Mathématiques Pures et Appliqués. 1999. V. 78. № 9. P. 925–964.
42. *Назаров С.А.* Об асимптотике спектра задачи теории упругости для тонкой пластины // Сибирск. мат. журн. 2000. Т. 41. № 4. С. 895–912.
43. *Dauge M., Yosibash Z.* Eigen-frequencies in thin elastic 3-D domains and Reissner–Mindlin plate models // Math. Meth. Appl. Sci. 2002. V. 25. № 1. P. 21–48.
44. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М., 1970.
45. *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводящих сред. М., 1988.
46. *Tiersten H.F.* Linear Piezoelectric Plate Vibrations. New York, 1964.
47. *Suo Z., Kuo C.-M., Barnett D.M., Willis J.R.* Fracture mechanics for piezoelectric ceramics // J. Mech. Phys. Solids. 1992. V. 40. № 4. P. 739–765.
48. *Назаров С.А.* Равномерные оценки остатков в асимптотических разложениях решений задачи о собственных колебаниях пьезоэлектрической пластины // Проблемы мат. анализа. Новосибирск, 2003. Вып. 25. С. 99–188.
49. *Nazarov S.A., Ruotsalainen K.R., Silvola M.* Trapped modes in piezoelectric and elastic waveguides // J. of Elasticity. 2016. V. 124. № 2. P. 193–223.

Институт проблем машиноведения РАН,
г. Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 26.10.2021 г.
После доработки 21.01.2022 г.
Принята к публикации 21.04.2022 г.