ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 5, с. 656–668

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.957+517.988+517.977.56

ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ II РОДА: ТЕОРЕМЫ О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ И О СОХРАНЕНИИ РАЗРЕШИМОСТИ

© 2022 г. А. В. Чернов

Данная статья продолжает исследования автора по проблеме сохранения разрешимости управляемых операторных уравнений. В качестве предварительного результата (представляющего самостоятельный интерес) для оператора B общего вида, действующего в произвольном банаховом пространстве E, получены новые теоремы о существовании и единственности неподвижной точки. При этом используется известное понятие конусной нормы $\omega : E \to \widetilde{E}_+ \subset \widetilde{E}$, где $\widetilde{E}$, вообще говоря, другое банахово пространство, полуупорядоченное по конусу $\widetilde{E}_+$. Указанные теоремы опираются на предположение о выполнении операторного аналога локального условия Липшица относительно конусной нормы ω и обобщают результат А.В. Калинина, С.Ф. Морозова ($\widetilde{E} = E$, $\omega = |\cdot|$). В роли аналога константы Липшица на заданном ограниченном множестве $\Psi \subset E$ выступает зависящий от этого множества линейный ограниченный оператор $A : \widetilde{E} \to \widetilde{E}$ со спектральным радиусом $\rho(A) < 1$. Кроме того, используются леммы М.А.Красносельского об эквивалентной норме. На базе полученных утверждений доказываются теоремы о локальном и тотальном (по множеству допустимых управлений) сохранении разрешимости управляемого операторного уравнения $x = B(u)[x]$, $x \in E$, где u – управляющий параметр из, вообще говоря, произвольного множества U. Абстрактная теория иллюстрируется примерами управляемого нелинейного операторного дифференциального уравнения в банаховом пространстве, а также сильно нелинейного псевдопараболического уравнения.

DOI: 10.31857/S0374064122050065, EDN: CBEQLZ

Введение. В работе получены теоремы о существовании и единственности неподвижной точки, при этом используется известное понятие конусной нормы [1, п. 6.3] $\omega : E \to \widetilde{E}_+ \subset \widetilde{E}$, где $\widetilde{E}$, вообще говоря, другое банахово пространство, полуупорядоченное по конусу $\widetilde{E}_+$. Указанные теоремы опираются на предположение о выполнении операторного аналога локального условия Липшица относительно конусной нормы ω и обобщают результат работы [2] ($\widetilde{E} = E$, $\omega = |\cdot|$). В роли аналога константы Липшица на заданном ограниченном множестве $\Psi \subset E$ выступает зависящий от этого множества линейный ограниченный оператор $A : \widetilde{E} \to \widetilde{E}$ со спектральным радиусом $\rho(A) < 1$. На базе полученных утверждений доказываются теоремы о локальном и тотальном (по множеству допустимых управлений) сохранении разрешимости управляемого операторного уравнения

$$x = B(u)[x], \quad x \in E, \tag{1}$$

где u – управляющий параметр из произвольного множества U. Абстрактная теория иллюстрируется примерами управляемого нелинейного операторного дифференциального уравнения в банаховом пространстве, частным случаем которого является уравнение вида [3, гл. V, § 1], а также сильно нелинейного псевдопараболического уравнения вида [4].

Неравенство $\rho(A) < 1$ косвенно может указывать на эволюционный (вольтерровый) характер операторов A и B. В этом случае имеет смысл говорить о глобальных решениях управляемого уравнения (1), и соответственно, о локальном и тотальном сохранении его глобальной разрешимости при варьировании управления u. Для локального (в смысле приращения по управлению правой части на фиксированном элементе $x = \overline{x} \in E$) сохранения глобальной разрешимости В.И. Суминым, а вслед за ним и его учениками (А.В. Чернов, И.В. Лисаченко), использовался также термин *устойчивость существования глобального решения* (УСГР).

Проблема УСГР актуальна при выводе необходимых условий оптимальности в задачах оптимального управления, в вычислении градиентов функционалов в таких задачах и обосновании соответствующих численных методов оптимизации. В случае отсутствия информации об УСГР при варьировании оптимального управления, в частности, при выводе необходимых условий оптимальности обычно переходят к рассмотрению пар "управление–состояние" (см., например, [5; 6, гл. 2]). В результате уравнение состояния приходится учитывать как дополнительное фазовое ограничение особого типа, а это приводит к определённым техническим сложностям. Укажем метод адаптированного штрафа, предложенный в книге [5, введение, п. 8.3, с. 17], в которой приведён ряд нерешённых задач, т.е. управляемых распределённых систем, для которых не удалось вывести необходимые условия оптимальности с помощью метода адаптированного штрафа. Между тем, в [7, гл. 5, § 2, п. 2] (см. также [8–11; 12, гл. 3, § 1; 13]) представлены некоторые задачи из этого ряда, необходимые условия оптимальности в которых удалось вывести с помощью использования теории УСГР. Дело в том, что при наличии информации об УСГР можно применять альтернативный подход, основанный на рассмотрении функционалов оптимизационной задачи как функций только управлений, опираясь (при исследовании различных вопросов) на соответствующие теоремы функционального анализа (см., например, [14, 15]). В частности, можно использовать технику параметризации управления для численной оптимизации управляемых распределённых систем (см. [15]). Таким образом, наличие УСГР открывает дополнительное окно возможностей при выводе необходимых условий оптимальности в задачах оптимального управления и их численном решении. Об актуальности проблемы УСГР и об истории вопроса см. подробные обзоры в работах [16–21].

Проблема *тотального сохранения глобальной разрешимости*, или, иначе говоря, *тотально глобальной разрешимости* (ТГР) (оба термина использовались автором ранее – см., например, [22, 23]), тоже достаточно актуальна при исследовании различных вопросов теории управления. Об этом, а также об истории вопроса см. детальный обзор в [22]. Говоря совсем коротко, свойство ТГР при наличии ещё и свойства единственности решения управляемой системы актуально по следующим причинам:

1) исходная бесконечномерная задача оптимизации путём конечномерной аппроксимации управления сводится к задаче минимизации функции многих переменных (параметров аппроксимации) на известном множестве простой структуры – *аппроксимирующей задаче* математического программирования, для решения которой можно использовать стандартные методы (и готовые программные комплексы), проблему существования решения в ней можно снимать с помощью классической теоремы Вейерштрасса или её следствий;

2) существенно упрощается выбор начального приближения к оптимуму;

3) можно обоснованно ставить различные игровые задачи, связанные с управляемыми распределёнными системами;

4) за счёт упомянутой выше дискретизации можно применять известные классические и топологические теоремы о разрешимости системы нелинейных уравнений относительно конечного числа неизвестных для исследования поточечной управляемости.

Отметим, что нарушение глобальной разрешимости эволюционной управляемой системы, связанной с дифференциальным или интегро-дифференциальным уравнением, весьма вероятно, когда порядок роста правой части соответствующего уравнения по фазовой переменной превышает линейный (см. на этот счёт показательные примеры в [14; 24; 25, введение, п. 2]). При наличии нелинейности в дифференциальном операторе эта ситуация усугубляется (см., например, [4, 26]).

При исследовании задач управления (помимо простого постулирования глобальной разрешимости управляемой системы для всех допустимых управлений) различными исследователями используются, как правило, некоторые общие (основанные на теоремах Минти–Браудера, Лакса–Мильграма, Шаудера и т.д., см., например, [27]) или специфические результаты о достаточных условиях однозначной глобальной разрешимости для дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений конкретного вида с неуправляемой правой частью, нелинейно зависящей от переменной состояния. Условиям глобальной разрешимости указанного типа посвящена достаточно обширная литература (см., например, [4, 26, 28–31]). Между тем, при исследовании глобальной разрешимости начально-краевых задач с нелинейной правой частью, зависящей от управления, имеет смысл использовать информацию о факте и характере этой зависимости. Зачастую наличие глобальной разрешимости или её отсутствие существенно зависит от того насколько широко варьируются управляемые параметры, входящие в нелинейную правую часть уравнения. Во многих ситуациях удаётся доказать, что если, например, система глобально разрешима для некоторого фиксированного управления, то она сохраняет это свойство для всех малых (в том или ином смысле) вариаций этого управления (при том, что для каких-то допустимых управлений глобальной разрешимости может и не быть). Это свойство в совокупности со свойством единственности решения как раз и называется УСГР (или сохранением однозначной глобальной разрешимости).

Ранее при исследовании вопросов УСГР и ТГР управляемых распределённых систем использовалась возможность сведения таких систем к вольтерровому функционально-операторному (операторному) уравнению в лебеговом (или в банаховом идеальном) пространстве измеримых функций (см. определения вольтерровых операторов и уравнений в [7, 14, 25], обзоры в [16–21]). При этом использовалось продолжение локальных решений вдоль конечной цепочки вольтерровых множеств

$$\varnothing = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_k = \Pi$$

соответствующих операторов до глобального решения, определённого на множестве Π изменения независимых переменных, на котором определено уравнение (для оператора V, действующего из одного пространства функций, определённых на $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, в другое подобное пространство, множество $H \subset \Pi$ называется вольтерровым, если при отображении V значения на H функций-образов не зависят от значений на $\Pi \setminus H$ функций-прообразов). Такой конечной цепочкой может быть, например, упорядоченная по вложению система временны́х отрезков. Отдельно укажем работу [20], где использовалось сведение к уравнению типа Гаммерштейна в $\mathbf{C}([0,T];X)$ с некоторым банаховым пространством X функций, определённых на области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, но использованная методика применима лишь к полулинейным уравнениям. В статье [32] доказан признак тотального (по всем допустимым управлениям) сохранения глобальной разрешимости эволюционного операторного уравнения первого рода общего вида с управляемой добавочной нелинейностью с решениями в пространстве $\mathbf{C}([0,T];X)$, данная методика применима в том числе и к существенно нелинейным уравнениям в частных производных эволюционного типа. Настоящая статья представляет результаты об УСГР и ТГР управляемых операторных уравнений второго рода "нецепочечного и невольтеррового характера" в том смысле, что вольтерровость оператора правой части не используется, а "цепочечная технология" в доказательствах не применяется. Но разумеется, это никак не препятствует оператору быть вольтерровым и допускать применение "цепочечной технологии".

1. Теоремы о неподвижной точке. Пусть E – банахово пространство (для определённости все пространства считаем вещественными), $\widetilde{E}$ – банахово пространство, полуупорядоченное конусом $\widetilde{E}_+$, т.е. таким множеством в $\widetilde{E}$, которое вместе с любым своим элементом $x \in \widetilde{E}_+$ содержит элемент λx для всякого числа $\lambda \geqslant 0$. Соответствующее отношение порядка обозначим символом $\leqslant$, т.е. запись $x_1 \leqslant x_2$ означает, что $x_2 - x_1 \in \widetilde{E}_+$, запись $x_1 \geqslant x_2$ означает, что $x_1 - x_2 \in \widetilde{E}_+$; $\omega : E \to \widetilde{E}_+$ – отображение, обладающее свойствами:

$\mathbf{W}_1$) $\omega(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$;

$\mathbf{W}_2$) $\omega(\lambda x) = |\lambda|\omega(x)$ для любого $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$;

$\mathbf{W}_3$) $\omega(x + y) \leqslant \omega(x) + \omega(y)$ для всех $x, y \in E$.

Далее предполагаем, что $\|x\|_E = \|\omega(x)\|_{\widetilde{E}}$ для каждого $x \in E$. Норма $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ называется *монотонной*, если $\|x_1\|_{\widetilde{E}} \leqslant \|x_2\|_{\widetilde{E}}$ для всех $x_1, x_2 \in \widetilde{E}_+$, $x_1 \leqslant x_2$. По терминологии [1, п. 6.3], функция $\omega(\cdot)$ – это, по сути дела, так называемая *конусная норма* (хотя, строго говоря, в [1] конус $\widetilde{E}_+$ предполагался нормальным). Отметим, что идея построения различных обобщений понятия нормы сама по себе далеко не является новой (см. на этот счёт обширную библиографию в [1, п. 6.3]).

Примеры. Если

$$E = L_p^\ell(\Pi) = \underbrace{L_p(\Pi) \times \cdots \times L_p(\Pi)}_{\ell \text{ раз}},$$

то можно считать, что $\widetilde{E} = L_p(\Pi)$, $\omega(x) = |x|$; для $E = \mathbb{C}^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: $\widetilde{E} = \mathbb{C}(\Omega)$, $\omega(x) = |x| + \sum_{k=1}^n |x'_{t_k}|$; для $E = \mathbb{C}([0,T];X)$: $\widetilde{E} = \mathbb{C}[0,T]$, $\omega(x)(t) = \|x(t)\|_X$; для $E = L_p([0,T];X)$: $\widetilde{E} = L_p[0,T]$, $\omega(x)(t) = \|x(t)\|_X$.

Для оператора $B : E \to E$ и произвольного множества $\Psi \subset E$ определим следующие операторные классы (допускается, что они могут быть пустыми):

1) $\mathcal{A}(B,\Psi)$ – множество всех *линейных ограниченных операторов* (ЛОО) $A : \widetilde{E} \to \widetilde{E}$ таких, что спектральный радиус $\rho(A) < 1$ и при этом выполняются неравенства

$$\|A^k\omega(x+y)\|_{\widetilde{E}} \leqslant \|A^k\omega(x)\|_{\widetilde{E}} + \|A^k\omega(y)\|_{\widetilde{E}} \quad \text{для любых} \quad x,y \in E,$$

$$\|A^k\omega(Bx - By)\|_{\widetilde{E}} \leqslant \|A^{k+1}\omega(x-y)\|_{\widetilde{E}} \quad \text{для любых} \quad x,y \in \Psi, \quad k = 0,1,\ldots; \tag{2}$$

2) $\mathcal{A}_+(B,\Psi)$ – множество всех изотонных (в смысле отношения $\leqslant$) ЛОО $A : \widetilde{E} \to \widetilde{E}$ таких, что спектральный радиус $\rho(A) < 1$ и при этом выполняется неравенство

$$\omega(Bx - By) \leqslant A[\omega(x-y)] \quad \text{при всех} \quad x,y \in \Psi. \tag{3}$$

Отметим, что для случая вещественного банахова пространства $\widetilde{E}$ спектральный радиус ЛОО $A : \widetilde{E} \to \widetilde{E}$ можно понимать как величину, определённую формулой И.М. Гельфанда

$$\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}. \tag{4}$$

При этом в случае $\rho(A) < 1$ уравнение вида $(I - A)h = \varphi$, $h \in \widetilde{E}$, имеет единственное решение для любого $\varphi \in \widetilde{E}$. Более того, это решение определяется рядом Неймана

$$h = (I - A)^{-1}\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} A^k\varphi.$$

Очевидно, что в случае изотонного оператора A, замкнутости $\widetilde{E}_+$ в $\widetilde{E}$ и функции $\varphi \geqslant 0$ получим $h \geqslant 0$.

Пусть $B : E \to E$ – произвольный оператор. Будем рассматривать операторное уравнение второго рода

$$x = B[x], \quad x \in E. \tag{5}$$

Лемма 1. *Пусть норма* $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ *монотонна. Тогда* $\mathcal{A}_+(B,\Psi) \subset \mathcal{A}(B,\Psi)$.

Доказательство. Действительно, пусть $A \in \mathcal{A}_+(B,\Psi)$. В частности, отсюда следует, что оператор A изотонный и выполняется неравенство (3). Тогда в силу изотонности оператора имеем

$$A^k\omega(Bx - By) \leqslant A^k[A\omega(x-y)] = A^{k+1}\omega(x-y) \quad \text{для всех} \quad x,y \in \Psi, \quad k = 0,1,\ldots$$

Отсюда, с учётом монотонности нормы, получаем соотношение (2), а значит, $A \in \mathcal{A}(B,\Psi)$. Лемма доказана.

Теорема 1 (о единственности неподвижной точки). *Пусть выполняется хотя бы одно из следующих двух условий:* $\mathbf{U}_1$) *для любого замкнутого шара* $\Psi \subset E$ *класс* $\mathcal{A}(B,\Psi) \neq \varnothing$; $\mathbf{U}_2$) *норма* $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ *монотонна и для любого замкнутого шара* $\Psi \subset E$ *класс* $\mathcal{A}_+(B,\Psi) \neq \varnothing$. *Тогда уравнение (5) не может иметь более одного решения в пространстве* E.

Доказательство. С учётом леммы 1 достаточно рассмотреть случай, когда выполнено условие $\mathbf{U}_1$). Предположим, что нашлись два решения $x_i = B[x_i]$, $i = 1,2$. Положим $M = \max_{i=1,2} \|x_i\|_E$, $\Psi = \{x \in E : \|x\|_E \leqslant M\}$. По условию найдётся $A \in \mathcal{A}(B,\Psi)$. В частности, отсюда следует, что $\rho = \rho(A) < 1$. Тогда найдётся число $\varepsilon > 0$ такое, что $\gamma = \rho + \varepsilon < 1$. Непосредственно из формулы (4) следует существование номера $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такого, что

$\|A^{n_\varepsilon}\upsilon\|_{\widetilde{E}} \leqslant \gamma^{n_\varepsilon}\|\upsilon\|_{\widetilde{E}}$ для всех $\upsilon \in \widetilde{E}$. Положим $\|\upsilon\|'_{\widetilde{E}} = \sum_{k=0}^{n_\varepsilon-1}\gamma^{-k}\|A^k\upsilon\|_{\widetilde{E}}$, $\upsilon \in \widetilde{E}$. Как показано в [33, гл. 2, § 5, п. 2], данная формула определяет в пространтсве $\widetilde{E}$ эквивалентную норму (поэтому полнота пространства при переходе к этой норме сохраняется) и для соответствующей операторной нормы $\|A\|' = \sup\limits_{\|\upsilon\|'_{\widetilde{E}}\leqslant 1}\|A\upsilon\|'_{\widetilde{E}}$ имеем $\|A\|' \leqslant \gamma$. Положим $\|x\|'_E = \|\omega(x)\|'_{\widetilde{E}}$, $x \in E$. Очевидно, что это будет норма в пространстве E, эквивалентная исходной норме $\|x\|_E = \|\omega(x)\|_{\widetilde{E}}$, $x \in E$. Оценим

$$\|Bx_1 - Bx_2\|'_E = \|\omega(Bx_1 - Bx_2)\|'_{\widetilde{E}} = \sum_{k=0}^{n_\varepsilon-1}\gamma^{-k}\|A^k\omega(Bx_1 - Bx_2)\|_{\widetilde{E}}.$$

С учётом $A \in \mathcal{A}(B,\Psi)$ получим

$$\|x_1 - x_2\|'_E = \|Bx_1 - Bx_2\|'_E \leqslant \sum_{k=0}^{n_\varepsilon-1}\gamma^{-k}\|A^{k+1}\omega(x_1 - x_2)\|_{\widetilde{E}} = \|A\omega(x_1 - x_2)\|'_{\widetilde{E}} \leqslant$$

$$\leqslant \|A\|'\|\omega(x_1 - x_2)\|'_{\widetilde{E}} \leqslant \gamma\|\omega(x_1 - x_2)\|'_{\widetilde{E}} = \gamma\|x_1 - x_2\|'_E.$$

Следовательно, $(1-\gamma)\|x_1 - x_2\|'_E \leqslant 0$ и, стало быть, $x_1 = x_2$. Теорема доказана.

Теорема 2 (о существовании неподвижной точки). *Пусть $\Psi \subset E$ – замкнутое множество, $\Psi \neq \varnothing$, инвариантное относительно оператора B (т.е. $B : \Psi \to \Psi$). Предположим, что выполняется хотя бы одно из следующих двух условий:* $\mathbf{E}_1$) $\mathcal{A}(B,\Psi) \neq \varnothing$; $\mathbf{E}_2$) *норма $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ монотонна и $\mathcal{A}_+(B,\Psi) \neq \varnothing$. Тогда уравнение (5) имеет решение в множестве Ψ.*

Доказательство. Согласно лемме 1 достаточно рассмотреть случай, когда выполнено условие $\mathbf{E}_1$). Выберем произвольно $A \in \mathcal{A}(B,\Psi)$ и определим нормы $\|\cdot\|'_{\widetilde{E}}$, $\|A\|'$, $\|\cdot\|'_E$. Как уже было показано при доказательстве теоремы 1, нормы $\|\cdot\|_E$ и $\|\cdot\|'_E$ эквивалентны, поэтому полнота пространства E при переходе к норме $\|\cdot\|'_E$ сохраняется. Далее, для произвольно взятых $x_i \in \Psi$, $i = 1, 2$, повторив дословно соответствующий фрагмент доказательства теоремы 1, получаем оценку

$$\|Bx_1 - Bx_2\|'_E \leqslant \gamma\|x_1 - x_2\|'_E$$

при $\gamma \in (0,1)$. Это означает, что оператор B является сжимающим на множестве Ψ относительно нормы $\|\cdot\|'_E$. Следовательно, согласно принципу Каччопполи–Банаха [34, гл. XVI, с. 609], существует единственная неподвижная точка $x = \overline{x} \in \Psi$, т.е. $\overline{x} = B[\overline{x}]$. Теорема доказана.

Замечание 1. Для частного случая $E = \widetilde{E}$, $\omega(x) = |x|$, норма $\|\cdot\|_E$ монотонна, аналоги теорем 1 и 2 при условиях $\mathbf{U}_2$), $\mathbf{E}_2$) были получены в работе [2, леммы 1, 2], поэтому рассмотренное там нестационарное нелинейное кинетическое уравнение переноса нейтрино тоже можно привести как пример применения теорем 1 и 2 для доказательства однозначной глобальной разрешимости.

Замечание 2. Утверждение теоремы 2 можно разделить на две части: первую, относящуюся к условию $\mathbf{E}_1$), и вторую – к условию $\mathbf{E}_2$). Следует отметить, что вторая часть близка к обобщённому принципу сжатых отображений из [1, п. 6.4, теорема 6.2]. Сформулируем его в наших обозначениях, чтобы пояснить характер этой близости.

Пусть $\widetilde{E}$ – банахово пространство, $\widetilde{E}_+$ – нормальный конус (в смысле [1]) в этом пространстве. Множество E называется в [1] *обобщённым метрическим пространством*, если каждой паре элементов $x, y \in E$ поставлен в соответствие элемент $\rho(x,y) \in \widetilde{E}_+$ так, что выполняются три естественные аксиомы (формально записываемые так же, как обычные аксиомы метрики). Аналогично на основе понятия конусной нормы (но опять же для случая нормального конуса $\widetilde{E}_+$ в смысле [1]) определяется *обобщённое нормированное пространство.* Переформулируем [1, п. 6.4, теорема 6.2].

Предложение 1. *Пусть* E *– обобщённое метрическое пространство с обобщённой метрикой* $\rho(\,\cdot\,,\cdot)$, *действующей в нормальный конус* $\widetilde{E}_+ \subset \widetilde{E}$, *причём* E *– полное метрическое пространство относительно метрики* $\rho_*(\,\cdot\,,\cdot) = \|\rho(\,\cdot\,,\cdot)\|_{\widetilde{E}}$. *Предположим, что* $B : E \to E$ *удовлетворяет условию* $\rho(Bx, By) \leqslant A\rho(x, y)$ *для всех* $x, y \in E$, *где* $A : \widetilde{E} \to \widetilde{E}$ *– изотонный ЛОО со спектральным радиусом, меньшим единицы. Тогда уравнение (5) имеет единственное решение в* E, *и это решение можно найти методом последовательных приближений, начав с произвольной точки* $x_0 \in E$.

Любое замкнутое непустое множество полного метрического пространства само является полным метрическим пространством с той же метрикой. Поэтому из первого предложения вытекает

Предложение 2. *Пусть* E *– обобщённое нормированное пространство с конусной нормой* $\omega(\cdot)$, *действующей в нормальный конус* $\widetilde{E}_+ \subset \widetilde{E}$, *причём* E *является полным метрическим пространством относительно метрики* $\rho_*(x, y) = \|\omega(x-y)\|_{\widetilde{E}} = \|x-y\|_E$; $\Psi \subset E$ *– непусто и замкнуто. Предположим, что* $B : \Psi \to \Psi$ *удовлетворяет условию (3), где* $A : \widetilde{E} \to \to \widetilde{E}$ *– изотонный ЛОО,* $\rho(A) < 1$. *Тогда уравнение (5) имеет единственное решение в* Ψ, *и это решение можно найти методом последовательных приближений, начав с произвольной точки* $x_0 \in \Psi$.

Замечание 3. Отличие условий второго предложения и второй части теоремы 2 в следующем: в предложении $\widetilde{E}_+$ – нормальный конус в смысле [1] в банаховом пространстве $\widetilde{E}$. Конус по [1] – множество, состоящее из лучей, исходящих из нуля в $\widetilde{E}$ таких, что если $x \in \in \widetilde{E}_+$, $(-x) \in \widetilde{E}_+$, то $x = 0$. Его нормальность [1, п. 3.3, с. 49] равносильна существованию константы $M > 0$ такой, что

$$\|x_1\|_{\widetilde{E}} \leqslant M\|x_2\|_{\widetilde{E}} \quad \text{для любых элементов} \quad x_1, x_2 \in \widetilde{E}_+, \quad x_1 \leqslant x_2. \tag{6}$$

Во второй части теоремы 2 $\widetilde{E}_+$ – множество, состоящее из лучей, выходящих из нуля в $\widetilde{E}$, а норма $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ монотонна, т.е. имеет место оценка (6) при $M = 1$. Между тем из работы [1, п. 6.4] не понятно, как может быть выполнено неравенство треугольника для метрики $\rho_*(\,\cdot\,,\cdot)$ (см. предложения 1, 2) в случае, когда (6) выполняется лишь при $M > 1$. Видимо, использование слова "метрика" по отношению к $\rho_*(\,\cdot\,,\cdot)$ подразумевает, что $M \leqslant 1$. Вообще говоря, нам не известно содержательных примеров нормального конуса с $M > 1$.

2. Об УСГР управляемого операторного уравнения второго рода. Пусть U – произвольное множество управляющих параметров. Рассмотрим управляемый аналог уравнения (5):

$$x = B(u)[x], \quad x \in E; \quad u \in U. \tag{7}$$

Далее будем считать, что норма $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ монотонна, а конус $\widetilde{E}_+$ замкнут в пространстве $\widetilde{E}$.

Теорема 3. *Пусть выполняются следующие условия:*

$\mathbf{S}_1$) *множество* $\{x \in E : \omega(x) \leqslant h\}$ *замкнуто в* E *для всех* $h \in \widetilde{E}_+$;

$\mathbf{S}_2$) *для* $u = \overline{u} \in U$ *уравнение (7) имеет решение* $x = \overline{x} \in E$;

$\mathbf{S}_3$) *существует число* $\sigma > 0$ *такое, что для множества* $\Psi_\sigma = \{x \in E : \|x\|_E \leqslant \|\overline{x}\|_E + \sigma\}$ *имеем* $\Phi_\sigma = \bigcap_{u \in U} \mathcal{A}_+(B(u), \Psi_\sigma) \neq \varnothing$.

Тогда найдутся числа $\varepsilon > 0$, $C > 0$ *такие, что для каждого* $u \in U$, *удовлетворяющего неравенству* $\|d_u\|_{\widetilde{E}} = \|B(u)\overline{x} - B(\overline{u})\overline{x}\|_E \leqslant \varepsilon$, *где* $d_u = \omega[B(u)\overline{x} - B(\overline{u})\overline{x}]$, *уравнение (7) имеет решение* $x = x_u \in E$. *Более того, найдётся элемент* $h_u \in \widetilde{E}_+$, *обеспечивающий оценки* $\|h_u\|_{\widetilde{E}} \leqslant C\|d_u\|_{\widetilde{E}}$, $\omega(x - \overline{x}) \leqslant h_u$, *и, следовательно,* $\|x - \overline{x}\|_E = \|\omega(x - \overline{x})\|_{\widetilde{E}} \leqslant C\|d_u\|_{\widetilde{E}}$.

Доказательство. Выберем произвольно $A \in \Phi_\sigma$. Так как $\rho(A) < 1$, то для любого $u \in U$ уравнение

$$(I - A)h = d_u, \quad h \in \widetilde{E},$$

имеет единственное решение $h = h_u = (I - A)^{-1}d_u$. Поскольку $d_u \geqslant 0$, а оператор A изотонный, то выполняется неравенство $h_u \geqslant 0$. Определим число $\varepsilon > 0$ из условия $\|(I-A)^{-1}\|\varepsilon \leqslant \sigma$.

Обозначим через $\mathcal{D}_\varepsilon(\overline{u})$ множество всех $u \in U$ таких, что $\|d_u\|_{\widetilde{E}} \leqslant \varepsilon$. Таким образом, для любых $u \in \mathcal{D}_\varepsilon(\overline{u})$ имеем

$$\|h_u\|_{\widetilde{E}} \leqslant C\|d_u\|_{\widetilde{E}} \leqslant C\varepsilon \leqslant \sigma, \quad C = \|(I-A)^{-1}\|.$$

Выберем произвольно $u \in \mathcal{D}_\varepsilon(\overline{u})$ и определим множество $\Psi = \{x \in E : \omega(x-\overline{x}) \leqslant h_u\}$. Согласно условию $\mathbf{S}_1)$ это множество замкнуто и, очевидно, не пусто, так как $\overline{x} \in \Psi$. Кроме того, в силу монотонности нормы $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ для всякого $x \in \Psi$ справедлива оценка

$$\|x-\overline{x}\|_E = \|\omega(x-\overline{x})\|_{\widetilde{E}} \leqslant \|h_u\|_{\widetilde{E}} \leqslant \sigma \Rightarrow \|x\|_E \leqslant \|\overline{x}\|_E + \|x-\overline{x}\|_E \leqslant \|\overline{x}\|_E + \sigma.$$

Стало быть, $\Psi \subset \Psi_\sigma$. И по построению $A \in \mathcal{A}_+(B(u),\Psi_\sigma)$. Следовательно, $A \in \mathcal{A}_+(B(u),\Psi)$. Покажем, что $B = B(u) : \Psi \to \Psi$. Выберем произвольно $x \in \Psi$ и в силу неравенства (3) из определения класса $\mathcal{A}_+(B(u),\Psi)$, а также очевидного вложения $\overline{x} \in \Psi$, оценим

$$\omega(Bx-\overline{x}) = \omega[B(u)x - B(\overline{u})\overline{x}] \leqslant \omega[B(u)x - B(u)\overline{x}] + d_u \leqslant A[\omega(x-\overline{x})] + d_u \leqslant A[h_u] + d_u = h_u.$$

Таким образом, $Bx \in \Psi$. Остаётся воспользоваться теоремой 2. Теорема доказана.

3. О ТГР управляемого операторного уравнения второго рода. Рассмотрим вновь уравнение (7). Так же, как и в предыдущем пункте, считаем, что норма $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ монотонна. Будем предполагать, что существует изотонный оператор $F : \widetilde{E}_+ \to \widetilde{E}_+$, мажорирующий семейство операторов $B(u)$, $u \in U$, в следующем смысле: $\omega(B(u)x) \leqslant F[\omega(x)]$ для всех $x \in E$, $u \in U$.

Теорема 4. *Пусть выполняются следующие условия:*

$\mathbf{T}_1)$ *существует элемент* $h \in \widetilde{E}_+$, *удовлетворяющий мажорантному неравенству*

$$F[h] \leqslant h;$$

$\mathbf{T}_2)$ *множество* $\Psi_h = \{x \in E : \omega(x) \leqslant h\}$ *замкнуто в пространстве* E;

$\mathbf{T}_3)$ $\mathcal{A}_+(B(u),\Psi_h) \neq \varnothing$ *для всех* $u \in U$.

Тогда уравнение (7) имеет решение $x = x_u \in \Psi_h$ *для любых* $u \in U$. *Более того,* $\|x_u\|_E \leqslant \|h\|_{\widetilde{E}}$ *для всех* $u \in U$.

Доказательство. Выберем произвольно управление $u \in U$ и обозначим $B = B(u)$. В соответствии с теоремой 2 достаточно установить, что $B : \Psi_h \to \Psi_h$. Выберем произвольно $x \in \Psi_h$ и оценим: $\omega(Bx) \leqslant F[\omega(x)] \leqslant F[h] \leqslant h$, т.е. $Bx \in \Psi_h$. Остаётся воспользоваться теоремой 2. Оценка нормы $\|x_u\|_E \leqslant \|h\|_{\widetilde{E}}$ получается очевидным образом из оценки $\omega(x_u) \leqslant h$ и монотонности нормы $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$. Теорема доказана.

4. Пример: управляемое нелинейное операторное дифференциальное уравнение в банаховом пространстве. Пусть X – банахово пространство, $a \in X$ – заданный элемент, $u \in U$ – управление. По аналогии с [3, гл. V, § 1] рассмотрим следующую задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения в банаховом пространстве:

$$\frac{d\varphi}{dt} = f[u](t,\varphi(t)), \quad t \in (0,T], \quad \varphi(0) = a, \quad \varphi \in \mathbb{C}^1([0,T];X). \tag{8}$$

Примем $E = \mathbb{C}([0,T];X)$. В случае, когда правая часть уравнения принадлежит классу E для всех $\varphi \in E$, задача (8) равносильна интегральному уравнению (с интегралом Бохнера)

$$\varphi(t) = a + \int\limits_0^t f[u](s,\varphi(s))\,ds, \quad t \in [0,T], \quad \varphi \in E. \tag{9}$$

Для уравнения (9) будем рассматривать правые части, удовлетворяющие более слабому требованию, и введём понятие п.в.-решения исходной задачи. Назовём функцию $\varphi(t)$ со значениями в X абсолютно непрерывной, если для неё существуют $b \in X$ и $z \in L_1([0,T];X)$ такие, что выполняется равенство $\varphi(t) = b + \int_0^t z(s)\,ds$ для любого $t \in [0,T]$. Как известно (см. работу [3, гл. IV, § 1, теорема 1.7]), в этом случае для п.в. $t \in [0,T]$ существует производная $\varphi'(t) = z(t)$. Соответствующий класс функций обозначим $\mathbb{AC}([0,T];X)$. Из [3, гл. IV, § 1, теорема 1.6], а также из абсолютной непрерывности интеграла Лебега, нетрудно установить справедливость следующего утверждения.

Лемма 2. $\mathbb{AC}([0,T];X) \subset \mathbb{C}([0,T];X)$. *Более того, пространство* $\mathbb{AC}([0,T];X)$ *является банаховым относительно нормы* $\|\varphi\|_{\mathbb{AC}([0,T];X)} = \|\varphi\|_{\mathbb{C}([0,T];X)} + \|\varphi'\|_{L_1([0,T];X)}$.

Далее будем предполагать, что правая часть уравнения f удовлетворяет следующим условиям:

$\mathbf{F}_1$) для всех $u \in U$, $\varphi \in E$ отображение $t \in [0,T] \to f[u](t,\varphi(t))$ принадлежит классу $L_1([0,T];X)$;

$\mathbf{F}_2$) существует функция $\mathcal{N} = \mathcal{N}(t,M) : [0,T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, суммируемая по $t \in [0,T]$ и неубывающая по $M \in \mathbb{R}_+$ такая, что для всех $u \in U$, $\varphi, \psi \in E$, $\|\varphi\|_E$, $\|\psi\|_E \leqslant M$, п.в. $t \in [0,T]$ имеем $\|f[u](t,\varphi(t)) - f[u](t,\psi(t))\|_X \leqslant \mathcal{N}(t,M)\|\varphi(t) - \psi(t)\|_X$.

Решение уравнения (9) будем искать в классе E. В силу сделанных предположений и леммы 2 всякое решение класса E на самом деле будет принадлежать классу $\mathbb{AC}([0,T];X)$. Это и есть п.в.-решение исходной задачи (8). Положим $\widetilde{E} = \mathbb{C}[0,T]$, $\omega(\varphi) = \omega(\varphi)(t) = \|\varphi(t)\|_X$. Очевидно, что норма $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$ монотонна. Теперь уравнение (9) можно записать в виде

$$\varphi = B(u)[\varphi], \quad \varphi \in E, \quad u \in U; \quad B(u)[\varphi](t) \equiv a + \int_0^t f[u](s,\varphi(s))\,ds, \quad t \in [0,T].$$

Теорема 5 (о локальной разрешимости). *Для любого управления* $u \in U$ *и числа* $M > \|a\|_X$ *найдётся число* $T = T(M,u) > 0$ *такое, что на отрезке* $[0,T]$ *уравнение (9) имеет решение* $\varphi \in E$.

Доказательство. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега найдётся число $T = T(M,u) > 0$ такое, что

$$\|a\|_X + M\gamma + \int_0^T \|f[u](t,0)\|_X\,dt < M, \quad \gamma = \int_0^T \mathcal{N}(t,M)\,dt < 1.$$

Обозначим $\Psi = \{\varphi \in E : \|\varphi\|_E \leqslant M\}$, $f = f[u]$, $B = B(u)$. Выберем произвольно функцию $\varphi \in \Psi$ и оценим

$$\|B[\varphi](t)\|_X \leqslant \|a\|_X + \int_0^T \|f(t,\varphi(t)) - f(t,0)\|_X\,dt + \int_0^T \|f(t,0)\|_X\,dt \leqslant \|a\|_X + M\gamma + \int_0^T \|f[u](t,0)\|_X\,dt,$$

откуда следует $\|B[\varphi](t)\|_X < M$, и таким образом, $B\varphi \in \Psi$. Теперь для произвольных φ, $\psi \in \Psi$ оценим

$$\|(B\varphi)(t) - (B\psi)(t)\|_X \leqslant \int_0^T \|f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t))\|_X\,dt \leqslant \gamma\|\varphi - \psi\|_E.$$

Следовательно, $\|B\varphi - B\psi\|_E \leqslant \gamma\|\varphi - \psi\|_E$, что означает, что оператор B является сжимающим на множестве Ψ, стало быть, имеет на нём единственную неподвижную точку. Теорема доказана.

Понятно, что на самом деле горизонт T существования решения может быть существенно больше той оценки, которая устанавливается при доказательстве теоремы 5. Более того, очевидно, что при увеличении M указанная оценка T будет уменьшаться. Кроме того, он будет зависеть от управления. Поэтому актуальным является вопрос об УСГР.

Для произвольно фиксированного числа $M > 0$ рассмотрим оператор $A : \widetilde{E} \to \widetilde{E}$, определяемый формулой

$$A[v](t) = \int\limits_0^t \mathcal{N}(s, M)v(s)\,ds, \quad \text{п.в.} \ \ t \in [0, T], \quad v \in \widetilde{E}.$$

Лемма 3. *Спектральный радиус* $\rho(A) = 0$.

Доказательство. Если бы $\mathcal{N}(s, M) = \mathcal{N}(M)$, то этот факт можно было бы тривиально получить из формулы (4). При наличии зависимости от s её применение затрудняется. Вместе с тем нетрудно заметить, что для любых $k \in \mathbb{N}$, $v \in \widetilde{E}$, $\|v\|_{\widetilde{E}} \leqslant 1$, имеем $\|A^k v\|_{\widetilde{E}} = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,T]} |(A^k v)(t)| = \|A^k v\|_{L_\infty[0,T]}$. С другой стороны, учитывая непрерывное вложение $\widetilde{E} \subset L_\infty[0, T]$, получаем

$$\sup\{\|A^k v\|_{\widetilde{E}} : v \in \widetilde{E}, \ \ \|v\|_{\widetilde{E}} \leqslant 1\} = \sup\{\|A^k_\infty v\|_{L_\infty} : v \in \widetilde{E}, \ \ \|v\|_{L_\infty} \leqslant 1\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup\{\|A^k_\infty v\|_{L_\infty} : v \in L_\infty[0, T], \ \ \|v\|_{L_\infty} \leqslant 1\},$$

т.е. $\|A^k\| \leqslant \|A^k_\infty\|$, и стало быть, $\rho(A) \leqslant \rho(A_\infty)$. Здесь A_∞ – естественное расширение оператора A до оператора $L_\infty[0, T] \to L_\infty[0, T]$. Таким образом, достаточно доказать, что $\rho(A_\infty) = 0$. Поскольку $L_\infty[0, T]$ – банахово идеальное пространство, здесь можно использовать критерий [35, теорема 2], в соответствии с которым достаточно, чтобы оператор A_∞ обладал для любого $\delta > 0$ вольтерровой δ-цепочкой. Напомним, что измеримое множество $H \subset [0, T]$ называется вольтерровым для оператора A_∞, если $P_H A_\infty P_H = P_H A_\infty$ (здесь P_H – это оператор умножения на характеристическую функцию χ_H множества H). Для любого $k \in \mathbb{N}$ всякий кортеж $\{H_0, \ldots, H_k\}$ вольтерровых множеств называется вольтерровой δ-цепочкой оператора A, если выполняются условия:

$$\varnothing = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_k = [0, T]; \quad \|P_h A_\infty P_h\| \leqslant \delta \quad \text{для каждого} \quad h = H_i \setminus H_{i-1}, \quad i = \overline{1, k}.$$

В нашем случае можно взять $H_i = [0; t_i]$, $i = \overline{1, k}$, где $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = T$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега для $h = (t_{i-1}; t_i]$ имеем $A_\infty[\chi_h](t) \leqslant \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathcal{N}(t, M)\,dt \leqslant \delta$, если мелкость разбиения $\max\limits_{i=\overline{1,k}} |t_i - t_{i-1}|$ достаточно мала. Таким образом, оператор A_∞ обладает вольтерровой δ-цепочкой для любого $\delta > 0$. Следовательно, $\rho(A_\infty) = 0$. Лемма доказана.

Продолжив считать число $M > 0$ фиксированным, обозначим $\Psi = \{\varphi \in E : \|\varphi\|_E \leqslant M\}$.

Лемма 4. *Для любых функций* φ, $\psi \in \Psi$, $u \in U$, $B = B(u)$ *справедлива оценка*

$$\omega(B\varphi - B\psi) \leqslant A[\omega(\varphi - \psi)].$$

Доказательство. Для $f = f[u]$ и п.в. $t \in [0, T]$ имеем

$$\|(B\varphi)(t) - (B\psi)(t)\|_X \leqslant \int\limits_0^t \|f(s, \varphi) - f(s, \psi)\|\,ds \leqslant \int\limits_0^t \mathcal{N}(s, M)\|\varphi(s) - \psi(s)\|_X\,ds = A[\omega(\varphi - \psi)](t).$$

Лемма доказана.

Из лемм 3 и 4 получаем, что для любого замкнутого ограниченного шара Ψ и любых $u \in U$ класс $\mathcal{A}_+(B(u), \Psi) \neq \varnothing$. Поэтому, согласно теореме 1, уравнение (9) не может иметь более одного решения в E. Более того, очевидно также, что для любого замкнутого ограниченного шара Ψ пересечение $\bigcap_{u\in U} \mathcal{A}_+(B(u), \Psi) \neq \varnothing$, так как содержит оператор A указанного вида. Кроме того, для всякого $h \in \widetilde{E} = \mathbb{C}[0, T]$, $h \geqslant 0$, множество $\{\varphi \in E : \omega(\varphi) \leqslant h\}$, очевидно, замкнуто в $E = \mathbb{C}([0,T];X)$, так как функция $\omega(\varphi)(t) = \|\varphi(t)\|_X$ непрерывна, а всякое нестрогое поточечное неравенство для последовательности непрерывных функций сохраняется и для предельной функции. Поэтому непосредственно из теоремы 3 вытекает

Теорема 6 (об УСГР). *Пусть выполнены условия* $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$). *Предположим, что для управления* $u = \overline{u} \in U$ *уравнение (9) имеет решение* $\varphi = \overline{\varphi} \in E$. *Тогда найдутся числа* $\varepsilon > 0$, $C > 0$ *такие, что для всякого* $u \in U$, *удовлетворяющего неравенству* $\|d_u\|_{\widetilde{E}} = \|B(u)\overline{\varphi} - B(\overline{u})\overline{\varphi}\|_E \leqslant \varepsilon$, *где* $d_u = \omega[B(u)\overline{\varphi} - B(\overline{u})\overline{\varphi}]$, *уравнение (9) имеет, и притом единственное, решение* $\varphi = \varphi_u \in E$. *Более того, найдётся функция* $h_u \in \widetilde{E}_+$ *такая, что* $\|h_u\|_{\widetilde{E}} \leqslant C\|d_u\|_{\widetilde{E}}$, $\omega(\varphi - \overline{\varphi}) \leqslant h_u$ *и, следовательно,* $\|\varphi - \overline{\varphi}\|_E = \|\omega(\varphi - \overline{\varphi})\|_{\widetilde{E}} \leqslant C\|d_u\|_{\widetilde{E}}$.

Чтобы сформулировать теорему о ТГР, сделаем дополнительно следующие предположения:

$\mathbf{F}_3$) существует функция $\mathcal{N}_1(t,M) : [0,T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, измеримая по $t \in [0,T]$, неубывающая по $M \in \mathbb{R}_+$ и такая, что $\|f[u](\,\cdot\,,\varphi)\|_X \leqslant \mathcal{N}_1(\,\cdot\,,h(\cdot)) \in L_1[0,T]$ для любых $u \in U$, $h \in \widetilde{E}_+$, $\varphi \in E$, $\|\varphi(\cdot)\|_X \leqslant h$;

$\mathbf{F}_4$) существует $g \in \mathbb{AC}[0,T]$ – решение уравнения

$$\|a\|_X + \int\limits_0^t \mathcal{N}_1(s, g(s))\, ds = g(t), \quad t \in [0,T]. \tag{10}$$

Непосредственно из теоремы 4 вытекает

Теорема 7 (о ТГР). *Пусть выполнены условия* $\mathbf{F}_1$)–$\mathbf{F}_4$). *Тогда для всех* $u \in U$ *уравнение (9) имеет единственное решение* $\varphi = \varphi_u \in E$ *и, более того, справедлива оценка*

$$\|\varphi_u(\cdot)\|_X \leqslant g.$$

5. Пример: сильно нелинейное уравнение псевдопараболического типа. К уравнению (9) могут быть сведены многие эволюционные системы, связанные с сильно нелинейными дифференциальными уравнениями псевдопараболического типа. Следуя [4] рассмотрим начально-краевую задачу, связанную с (сначала неуправляемым) уравнением вида

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\varphi - |\varphi|^{q_1}\varphi) + \Delta\varphi + |\varphi|^{q_2}\varphi = 0, \quad \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \varphi\,\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{11}$$

где $q_i > 0$, $i = 1,2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей класса $\mathbb{C}^{(2,\delta)}$, $\delta \in (0,1]$, $n \geqslant 1$. Для получения необходимых оценок в статье [4] предполагается дополнительно, что $q_i \leqslant 4/(n-2)$ при $n \geqslant 3$, $q_1 \geqslant 1$. Как показано в статье [4] задача (11) возникает при исследовании квазистационарных процессов в проводящих средах без дисперсии (в частности, в полупроводниках). Обозначим $X = \mathbb{H}_0^1(\Omega)$, $X^* = \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ – сопряжённое пространство, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скобка двойственности между пространствами X и X^*, $E = \mathbb{C}([0,T];X)$, $\widetilde{E} = \mathbb{C}[0,T]$, $E^* = \mathbb{C}([0,T];X^*)$. Для $\varphi_0 \in X$ решение задачи (11) понимается в сильном обобщённом смысле и ищется в пространстве $\mathbb{C}^1([0,T];X)$. Следуя работе [4], положим

$$J(\varphi) = Q + (q_1+1)|\varphi|^{q_1} I : X \to X^*, \quad F\varphi = |\varphi|^{q_2}\varphi, \quad F : X \to X^*, \quad G\varphi = [J(\varphi)]^{-1}[-Q\varphi + F\varphi],$$

где $Q\varphi = -\Delta\varphi$, $Q : X \to X^*$ – оператор Лапласа (с точностью до знака), понимаемый в сильном обобщённом смысле:

$$\langle Q\varphi, \psi\rangle = (\nabla\varphi, \nabla\psi)_{L_2} = \int\limits_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\psi\, dx, \quad \varphi, \psi \in X.$$

Воспользовавшись неравенством Гёльдера, отсюда легко получаем оценку

$$\|Q\varphi_1 - Q\varphi_2\|_{X^*} \leqslant \|\varphi_1 - \varphi_2\|_X$$

для всех $\varphi_i \in X$, $i = 1,2$. Как показано в [4], справедливы следующие факты:

1) $G: X \to X,\ \ G: E \to E$;

2) задача (11) сводится к уравнению $\varphi = \widetilde{B}\varphi,\ \ \varphi \in E,$ где $(\widetilde{B}\varphi)(t) = \varphi_0 + \int_0^t (G\varphi)(s)\,ds,$ $t \in [0,T]$;

3) $\|J(\varphi)^{-1}z_1 - J(\varphi)^{-1}z_2\|_X \leqslant \|z_1 - z_2\|_{X^*}$ для всех $\varphi \in X,\ \ z_1, z_2 \in X^*$;

4) $\|J(\varphi_1)^{-1} - J(\varphi_2)^{-1}\| \leqslant \mu_1(M)\|\varphi_1 - \varphi_2\|_X$ для каждых $\varphi_i \in X,\ \ \|\varphi_i\|_X \leqslant M,\ \ i = 1,2$;

5) $\|F\varphi_1 - F\varphi_2\|_{X^*} \leqslant \mu_2(M)\|\varphi_1 - \varphi_2\|_X$ для любых $\varphi_i \in X,\ \ \|\varphi_i\|_X \leqslant M,\ \ i = 1,2$.

Стало быть, для $\widetilde{\mathcal{N}}(M) = \mu_1(M)M[1 + \mu_2(M)] + 1 + \mu_2(M)$ имеем

$$\|(G\varphi_1)(t) - (G\varphi_2)(t)\|_X \leqslant \widetilde{\mathcal{N}}(M)\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_X \quad \text{при всех} \quad \varphi_i \in E, \quad \|\varphi_i\|_E \leqslant M, \quad i = 1,2.$$

В [4] для задачи (11) доказаны единственность решения и локальная разрешимость, а при условии $q_1 \geqslant q_2$ – глобальная разрешимость; при условии $q_1 < q_2$ установлено существование максимального по времени решения и получена оценка сверху для времени разрушения решения. Глобальная разрешимость доказана также при условии достаточной малости нормы $\|\varphi_0\|_X$.

Пусть теперь для каждого управления $u \in U$ определён оператор

$$g[u](t,\varphi): [0,T] \times X \to X^*, \quad g[u](\,\cdot\,,\cdot): E \to E^*,$$

удовлетворяющий оценке

$$\|g[u](t,\varphi_1) - g[u](t,\varphi_2)\|_{X^*} \leqslant \widehat{\mathcal{N}}(M)\|\varphi_1 - \varphi_2\|_X$$

для каждого $t \in [0,T]$, где $\varphi_i \in X$, $\|\varphi_i\|_X \leqslant M$, $i = 1,2$, при некоторой неубывающей функции $\widehat{\mathcal{N}}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.

Рассмотрим управляемый аналог задачи (11):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\varphi - |\varphi|^{q_1}\varphi) + \Delta\varphi + |\varphi|^{q_2}\varphi = g[u](t,\varphi), \quad \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \varphi\,\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{12}$$

в физическом смысле предполагающий наличие дополнительных управляемых источников тока свободных электронов. Аналогично (11) задача (12) может быть записана в виде уравнения

$$\varphi = B(u)[\varphi], \quad \varphi \in E; \quad (B(u)\varphi)(t) = \varphi_0 + \int\limits_0^t f[u](s,\varphi(s))\,ds, \quad t \in [0,T], \tag{13}$$

где $f[u](s,\varphi) = J(\varphi)^{-1}[-Q\varphi + F\varphi - g[u](s,\varphi)]$. Из наших построений следует, что условия $\mathbf{F}_1$), $\mathbf{F}_2$) п. 4 выполнены. Поэтому справедлива соответствующая конкретизация теорем 5 и 6. Прежде чем сформулировать условия ТГР, заметим, что в работе [4] показано

$$\|(G\varphi)(t)\|_X \leqslant \|\varphi(t)\|_X + \|(F\varphi)(t)\|_{X^*} \leqslant C\|\varphi(t)\|_X^{q_2+1} + \|\varphi(t)\|_X \quad \text{для любых } t \in [0,T], \quad \varphi \in E.$$

Предположим дополнительно, что существует функция $\mathcal{N}_0(t,M): [0,T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, измеримая по $t \in [0,T]$, неубывающая по $M \in \mathbb{R}_+$ и такая, что для любых $u \in U$, $h \in \widetilde{E}_+$, $\varphi \in E$, $\|\varphi(\cdot)\|_X \leqslant h$ выполняется

$$\|g[u](\,\cdot\,,\varphi)\|_{X^*} \leqslant \mathcal{N}_0(\,\cdot\,,h(\cdot)) \in L_1[0,T].$$

Положим

$$\mathcal{N}_1(t,M) = CM^{q_2+1} + M + \mathcal{N}_0(t,M).$$

Тогда при $u \in U$, $h \in \widetilde{E}_+$, $\varphi \in E$, $\|\varphi(\cdot)\|_X \leqslant h$ будем иметь оценку

$$\|f[u](\,\cdot\,,\varphi)\|_{X^*} \leqslant \mathcal{N}_1(\,\cdot\,,h(\cdot)).$$

При сделанных предположениях теорема 7 конкретизируется следующим образом.

Теорема 8 (о ТГР). *Пусть существует $g \in \mathbb{AC}[0,T]$ – решение уравнения (10) при $a = \varphi_0$ и принятых нами X и $\mathcal{N}_1(\,\cdot\,,\cdot)$. Тогда для всех $u \in U$ уравнение (13) имеет единственное решение $\varphi = \varphi_u \in E$ и, более того, $\|\varphi_u(\cdot)\|_X \leqslant g$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М., 1969.
2. *Калинин А.В., Морозов С.Ф.* Задача Коши для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения переноса // Мат. заметки. 1997. Т. 61. Вып. 5. С. 677–686.
3. *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М., 1978.
4. *Корпусов М.О.* Условия глобальной разрешимости начально-краевой задачи для нелинейного уравнения псевдопараболического типа // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 5. С. 678–685.
5. *Лионс Ж.-Л.* Управление сингулярными распределёнными системами. М., 1987.
6. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределёнными системами. Теория и приложения. Новосибирск, 1999.
7. *Сумин В.И.* Функциональные вольтерровы уравнения в математической теории оптимального управления распределёнными системами: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Нижний Новгород, 1998.
8. *Сумин В.И.* К проблеме сингулярности распределённых управляемых систем. I // Вестн. Нижегородского гос. ун-та. Мат. моделирование и оптимальное управление. 1999. Вып. 2 (21). С. 145–155.
9. *Сумин В.И.* К проблеме сингулярности распределённых управляемых систем. II // Вестн. Нижегородского гос. ун-та. Мат. моделирование и оптимальное управление. 2001. Вып. 1 (23). С. 198–204.
10. *Сумин В.И.* К проблеме сингулярности распределённых управляемых систем. III // Вестн. Нижегородского гос. ун-та. Мат. моделирование и оптимальное управление. 2002. Вып. 1 (25). С. 164–174.
11. *Сумин В.И.* Условия устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач для нелинейных параболических уравнений // Вестн. Тамбовского гос. ун-та. Сер. Естеств. и техн. науки. 2000. Т. 5. Вып. 4. С. 493–495.
12. *Чернов А.В.* Вольтерровы операторные уравнения и их применение в теории оптимизации гиперболических систем: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Нижний Новгород, 2000.
13. *Чернов А.В.* О преодолении сингулярности распределённых систем управления // Тр. Третьей Всерос. науч. конф. "Мат. моделирование и краевые задачи". Самара, 2006. Ч. 2. С. 171–174.
14. *Сумин В.И.* Об обосновании градиентных методов для распределённых задач оптимального управления // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1990. Т. 30. № 1. С. 3–21.
15. *Чернов А.В.* О гладких конечномерных аппроксимациях распределённых оптимизационных задач с помощью дискретизации управления // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2013. Т. 53. № 12. С. 2029–2043.
16. *Сумин В.И.* Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения // Вестн. Нижегородского гос. ун-та. Математика. 2003. Вып. 1. С. 91–107.
17. *Сумин В.И., Чернов А.В.* Вольтерровы функционально-операторные уравнения в теории оптимизации распределённых систем // Тр. Междунар. конф. "Динамика систем и процессы управления", посвящ. 90-летию со дня рожд. акад. Н.Н. Красовского (Екатеринбург, Россия, 15–20 сентября 2014 г.). Екатеринбург, 2015. С. 293–300.
18. *Чернов А.В.* О тотально глобальной разрешимости управляемого уравнения типа Гаммерштейна с варьируемым линейным оператором // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2015. Т. 25. Вып. 2. С. 230–243.
19. *Sumin V.I.* Volterra functional-operator equations in the theory of optimal control of distributed systems // IFAC PapersOnLine. 2018. V. 51. № 32. P. 759–764.
20. *Chernov A.V.* Preservation of the solvability of a semilinear global electric circuit equation // Comput. Math. and Math. Phys. 2018. V. 58. № 12. P. 2018–2030.
21. *Сумин В.И.* Управляемые вольтерровы функциональные уравнения и принцип сжимающих отображений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 262–278.
22. *Чернов А.В.* О тотальном сохранении разрешимости управляемого уравнения типа Гаммерштейна с неизотонным и немажорируемым оператором // Изв. вузов. Математика. 2017. № 6. С. 83–94.
23. *Чернов А.В.* О тотально глобальной разрешимости управляемого операторного уравнения второго рода // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2020. Т. 30. Вып. 1. С. 92–111.
24. *Калантаров В.К., Ладыженская О.А.* О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1977. Т. 69. С. 77–102.
25. *Сумин В.И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределёнными системами. Ч. I. Нижний Новгород, 1992.

26. *Корпусов М.О., Свешников А.Г.* Разрушение решений сильно нелинейных уравнений псевдопараболического типа // Совр. математика и её приложения. 2006. Т. 40. С. 3–138.
27. *Tröltzsch F.* Optimal control of partial differential equations: theory, methods and applications // Graduate Studies in Mathematics. V. 112. Providence, 2010.
28. *Kobayashi T., Pecher H., Shibata Y.* On a global in time existence theorem of smooth solutions to a nonlinear wave equation with viscosity // Math. Ann. 1993. V. 296. № 2. P. 215–234.
29. *Lu G.* Global existence and blow-up for a class of semilinear parabolic systems: a Cauchy problem // Nonlin. Anal., Theory Methods Appl. 1995. V. 24. № 8. P. 1193–1206.
30. *Tersenov A.* The Dirichlet problem for second order semilinear elliptic and parabolic equations // Differ. Equat. Appl. 2009. V. 1. № 3. P. 393–411.
31. *Saito H.* Global solvability of the Navier–Stokes equations with a free surface in the maximal regularity $L_p - L_q$ class // J. Differ. Equat. 2018. V. 264. № 3. P. 1475–1520.
32. *Чернов А.В.* О тотальном сохранении однозначной глобальной разрешимости операторного уравнения первого рода с управляемой добавочной нелинейностью // Изв. вузов. Математика. 2018. № 11. С. 60–74.
33. *Красносельский М.А.* Положительные решения операторных уравнений. Главы нелинейного анализа. М., 1962.
34. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М., 1984.
35. *Сумин В.И., Чернов А.В.* Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1402–1411.

Нижегородский государственный университет
имени Н.И. Лобачевского,
Нижегородский государственный технический
университет имени Р.Е. Алексеева

Поступила в редакцию 23.03.2020 г.
После доработки 17.05.2021 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.