ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 5, с. 669–685

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.72+517.984.5

О СВОЙСТВАХ ОДНОЙ ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДАЕМОЙ ВОЛЬТЕРРОВЫМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ, ВОЗНИКАЮЩИМ В ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

© 2022 г. Ю. А. Тихонов

Малые поперечные колебания вязкоупругого трубопровода единичной длины при неотрицательных значениях времени в безразмерных переменных без учёта внешнего трения описываются интегро-дифференциальным уравнением с условиями шарнирного закрепления на концах и начальными условиями. Решение этого уравнения может быть записано посредством полугруппы операторов. В данной работе установлено, что указанное уравнение порождает аналитическую в некотором угле правой полуплоскости полугруппу.

DOI: 10.31857/S0374064122050077, EDN: CBHGSS

Введение. Малые поперечные колебания вязкоупругого трубопровода единичной длины $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ при $t \geqslant 0$ в безразмерных переменных без учёта внешнего трения описываются уравнением, рассмотренным в работе [1]:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial^5 u(t,x)}{\partial t\partial x^4} + \frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x}\left(g(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right) + \int\limits_0^t \frac{dK(t-s)}{dt}\frac{\partial^4 u(s,x)}{\partial x^4}\,ds = 0, \qquad (1)$$

где $t > 0,\ \ 0 < x < 1$. Параметр α положителен и пропорционален внутреннему трению Кельвина–Фойгта (см. монографию [2, гл. 2]), $g(x)$ – гладкая ограниченная вещественная функция, пропорциональная неоднородной силе натяжения. Функция $K(t)$ задаётся интегралом Лебега–Стилтьеса

$$K(t) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau}\,d\mu(\tau) \qquad (2)$$

с неубывающей, непрерывной справа функцией μ такой, что $\operatorname{supp} d\mu \subset [d_0, +\infty]$, $d_0 > 0$. При этом справедливо условие

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < 1. \qquad (3)$$

Краевые условия для уравнения (1) задаются в предположении шарнирного закрепления концов трубы:

$$u(t,0) = u(t,1) = \frac{\partial^2 u(t,0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(t,1)}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0. \qquad (4)$$

При $t = 0$ заданы начальные условия

$$u(0,x) = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = \varphi_1(x), \quad 0 < x < 1. \qquad (5)$$

Уравнение (1) с краевыми (4) и начальными (5) условиями запишем в операторном виде, рассмотрев сепарабельное гильбертово пространство $H = L_2[0,1]$ и операторы A и C, действующие как

$$Ay(x) = \frac{d^4 y(x)}{dx^4}, \quad Cy(x) = \frac{d}{dx}\left(g(x)\frac{dy}{dx}(x)\right),$$

на функциях $y(x) \in \mathrm{Dom}\,(A) = \{y : y \in W_2^4[0,1],\ \ y(0) = y(1) = y''(0) = y''(1) = 0\}$. Неизвестную функцию $u(t,x)$ рассматриваем как вектор-функцию $u(t)$ со значениями в пространстве H, а начальные условия φ_0 и φ_1 – как некоторые векторы в H. Исходная задача в введённых обозначениях принимает следующий вид:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \alpha A\frac{du(t)}{dt} + (A+C)u(t) + \int\limits_0^t \frac{dK(t-s)}{dt}Au(s)\,ds = 0, \tag{6}$$

$$u(0) = \varphi_0, \quad \frac{du(0)}{dt} = \varphi_1. \tag{7}$$

Задача Коши (6), (7) возникает, например, в задачах вязкоупругости и теплопроводности. Если положим $\alpha = 0$ и $C = 0$, то получим уравнение Гуртина–Пипкина (см. [3]), описывающее процесс распространения тепла в средах с памятью. Изучению уравнения Гуртина–Пипкина посвящено большое количество работ, в том числе зарубежных. Прежде всего отметим здесь работы В.В. Власова с соавторами. В статьях [4, 5] для частного случая ядра свёртки (2), являющегося рядом из убывающих экспонент, установлена корректная разрешимость уравнения Гуртина–Пипкина в весовых пространствах Соболева, проведён спектральный анализ оператор-функции, которая является символом уравнения (6), получена асимптотика невещественных точек спектра и локализация вещественных кластеров, на основе чего получено представление решения в виде ряда из экспонент. Развитие указанных результатов на случай интегральных ядер проведено в работе [6]. Перечисленные результаты изложены в монографии [7, гл. 3]. Наиболее общий случай, включающий ненулевой оператор C, а также ещё одно дополнительное слагаемое типа вольтерровой свёртки с ядром аналогичным (2), изучен авторами в [8, 9]. В [10] исследована задача (6), (7) с наиболее общими ядрами свёртки – ядрами Работнова. Наконец, в работе Н.А. Раутиан [11] задача (6), (7) исследована с помощью полугруппового подхода, наиболее близкого к тому, который будет использован в настоящей работе. Кроме того, для случая $\alpha > 0$ получены результаты о корректной разрешимости задачи (6), (7) (см. [4, 5]).

Операторные модели типа Гуртина–Пипкина с нулевым параметром α с некоммутирующими операторными слагаемыми изучались также в работах других авторов.

В работах [12] и [13] рассматривались задачи управления решениями уравнения Гуртина–Пипкина посредством граничных воздействий. В [14] устанавливается зависимость скорости убывания энергии от скорости убывания ядра в модели теплопроводности Гуртина–Пипкина.

В монографии [15] и в [16, 17] разработан подход к решению задачи (6), (7) с позиции теории полугрупп, где для случая, когда $\alpha = 0$ и $C = 0$, но для более общего вида ядер $K(t)$, установлен вид генератора полугруппы и доказано, что полугруппа является сжимающей и экспоненциально устойчивой.

Модели типа (6), (7) с компактным носителем интегральных ядер могут быть получены из операторных моделей вязкоупругих жидкостей, рассматриваемых в работах Д.А. Закоры [18–20], в которых построена экспоненциально устойчивая сжимающая полугруппа, на основе чего получены результаты о классической разрешимости уравнений, а также об асимптотическом поведении этих решений. Отметим, что в настоящей работе использованы методы, близкие к тем, что применялись в указанных работах Д.А. Закоры.

Абстрактное интегро-дифференциальное уравнение типа (6) с дополнительными операторными слагаемыми возникает при изучении флаттера. Исследование указанного уравнения представлено в статьях [21, 22].

Спектральный анализ оператор-функции, в которой $\alpha > 0$, $C = 0$, приведён в работах [23, 24], где установлена локализация спектра соответствующей оператор-функции, а также изучен вопрос о конечности числа вещественных точек в спектре.

Оператор-функция, являющаяся символом уравнения вида (6) с нулевым интегральным ядром, исследовалась в статьях [25] и [26]. В них получена классификация точек спектра положительного, отрицательного и нейтрального типов для оператора, являющегося "линеаризацией" этой оператор-функции, исследован вопрос базисности Рисса его собственных функций.

Наконец, аналогичная оператор-функция, включающая в себя интегральное слагаемое, изучалась в работе [27]. В ней установлено, что спектр оператор-функции в правой полуплоскости состоит из конечного числа характеристических точек, равному с учётом кратности количеству отрицательных собственных значений оператора

$$(1-K(0))A+C.$$

Целью настоящей работы является исследование свойств полугруппы операторов, порождаемой задачей (6), (7), а также доказательство аналитичности этой полугруппы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим для абстрактного интегро-дифференциального уравнения задачу (6), (7) в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Ядро вольтерровой свёртки имеет вид (2) и удовлетворяет условию (3) в нуле.

Предположим, что операторы A и C удовлетворяют следующим условиям:

(A) оператор A – самосопряжённый и положительно определённый: $A=A^*$, $A\geqslant aI$, где $a>0$; обратный к нему оператор A^{-1} является компактным;

(B) оператор C – симметричный, A – компактный в смысле Като [28, с. 247];

(C) $\|A^{-1/2}CA^{-1/2}\|<1-K(0)$.

По условию (C) сделаем замечание: оператор CA^{-1} ограничен в пространстве H, а следовательно, и $A^{-1}C$ ограничен в $H_1:=\{h\in \mathrm{Dom}\,(A), \|h\|_1:=\|Ah\|\}$ и имеет ограниченное замыкание в H, из чего следует, что оператор $A^{-1/2}CA^{-1/2}$ по теореме об интерполяции (см. [29, гл. I, теорема 5.1]) имеет ограниченное замыкание в H. Таким образом, условие (C) корректно.

Задачу Коши для уравнения второго порядка (6), (7) запишем в виде задачи Коши для системы уравнений первого порядка. Прежде всего заметим, что из условий (B) и (C) следует, что оператор $(1-K(0))I+\overline{A^{-1/2}CA^{-1/2}}$ ограниченный, самосопряжённый и положительно определённый*). Пусть

$$\tilde{B}:=(\overline{(1-K(0))I+A^{-1/2}CA^{-1/2}})^{1/2}. \tag{8}$$

Введём новую неизвестную функцию $\rho(t)$ и рассмотрим систему

$$\frac{du(t)}{dt}+\alpha Au(t)+A^{1/2}\tilde{B}\rho(t)+\int\limits_0^t K(t-s)Au(s)\,ds=0,$$

$$\frac{d\rho(t)}{dt}=\tilde{B}A^{1/2}u(t). \tag{9}$$

Далее введём функцию

$$v(t,\tau):=\int\limits_0^t \frac{e^{-\tau(t-s)}}{\sqrt{\tau}}A^{1/2}u(s)\,ds.$$

Добавим уравнение

$$\frac{dv(t,\tau)}{dt}=\frac{1}{\sqrt{\tau}}A^{1/2}u(t)-\tau v(t,\tau)$$

к системе (9) и подставим $v(t,\tau)$ в первое уравнение этой системы. Обозначив

$$\rho_0:=\tilde{B}^{-1}A^{-1/2}(\alpha Au_0+u_1),$$

получим задачу

$$\frac{du}{dt}(t)+A^{1/2}\biggl(\alpha A^{1/2}u(t)+\tilde{B}\rho(t)+\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\tau}}v(t,\tau)\,d\mu(\tau)\biggr)=0,$$

*) Здесь и далее через $\overline{T}$ обозначается замыкание оператора T.

$$\frac{d\rho}{dt}(t) = \tilde{B}A^{1/2}u(t),$$

$$\frac{dv}{dt}(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}}A^{1/2}u(t) - \tau v(t,\tau) \tag{10}$$

с начальными условиями

$$u(0) = u_0, \quad \rho(0) = \rho_0, \quad v(0,\tau) \equiv 0. \tag{11}$$

Если формально продифференцируем по t первое уравнение в (10) и исключим переменные $\rho(t)$ и $v(t,\tau)$, то получим уравнение (6).

В данной работе мы покажем, что решение задачи (10), (11) может быть представлено посредством полугруппы операторов. Более того, будет установлено, что эта полугруппа является аналитической.

Отметим, что вопросы разрешимости задач (6), (7) и (10), (11) и эквивалентность этих вопросов требуют отдельного обоснования, находящегося за рамками настоящей работы.

2. Определение генератора полугруппы. На множестве $\mathbb{R}_+$ можно ввести неотрицательную меру

$$\nu(A) := \int\limits_A d\mu(\tau), \tag{12}$$

где $A \subset \mathbb{R}_+$ – борелевское множество. Интеграл (12) понимается в смысле Лебега–Стилтьеса. Рассмотрим теперь семейство гильбертовых пространств $H(\tau) := H$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, которое образует ν-измеримое поле (см. [29, п. 2.3]). Пространство

$$L_2(H,\mu) := \int\limits_0^{+\infty} H(\tau)\, d\mu(\tau)$$

является пространством ν-почти всюду определённых измеримых (в сильном смысле) функций $f : \mathbb{R}_+ \to H$ таких, что выполняется условие

$$\|f\|^2_{L_2(H,\mu)} = \int\limits_0^{+\infty} \|f(\tau)\|^2_H\, d\mu(\tau) < +\infty.$$

Пространство $L_2(H,\mu)$ является сепарабельным гильбертовым (см. [30, с. 148]). Далее норма и скалярное произведение в пространстве H будут обозначаться $\|\cdot\|$ и $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ соответственно, а в пространстве $L_2(H,\mu)$ как $\|\cdot\|_2$ и $(\,\cdot\,,\cdot\,)_2$.

Рассмотрим операторы S, S^* и Γ, действующие в пространствах

$$S : H \to L_2(H,\mu),$$

$$S^* : L_2(H,\mu) \to H,$$

$$\Gamma : \mathrm{Dom}\,(\Gamma) \subset L_2(H,\mu) \to L_2(H,\mu)$$

по следующим правилам:

$$Sh(\tau) := \frac{1}{\sqrt{\tau}}h, \quad h \in H,$$

$$S^*f := \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} f(\tau)\, d\mu(\tau), \quad f \in L_2(H,\mu),$$

$$\Gamma f(\tau) := \tau f(\tau), \quad f \in L_2(H,\mu).$$

Отметим при этом, что операторы S и S^* являются ограниченными, что следует из неравенств

$$\|Sh\|_2^2 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\|h\|^2}{\tau}\, d\mu(\tau) < \|h\|^2,$$

$$\|S^*f\|^2 = \left\| \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\sqrt{\tau}}\, d\mu(\tau) \right\|^2 \leqslant \int\limits_0^{+\infty} \|f\|^2\, d\mu(\tau) \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < \|f\|_2^2,$$

а также являются взаимно сопряжёнными:

$$(Sh, f)_2 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} (h, f(\tau))\, d\mu(\tau) = \left(h, \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(\tau)}{\sqrt{\tau}}\, d\mu(\tau) \right) = (h, S^*f).$$

Оператор Γ – самосопряжённый, как оператор умножения на независимую переменную в гильбертовом пространстве [31, п. 54], при этом является положительно определённым в пространстве $L_2(H, \mu)$ ввиду того, что носитель меры ν отделён от 0.

Определим пространство $\mathbb{H} := H \bigoplus H \bigoplus L_2(H, \mu)$ со скалярным произведением

$$(\,\cdot\,,\cdot\,)_{\mathbb{H}} := (\,\cdot\,,\cdot\,) + (\,\cdot\,,\cdot\,) + (\,\cdot\,,\cdot\,)_2,$$

индуцирующим евклидову норму, относительно которой $\mathbb{H}$ полно. Таким образом, $\mathbb{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство.

Рассмотрим действующий в пространстве $\mathbb{H}$ оператор

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha I & -\tilde{B} & -S^* \\ \tilde{B} & 0 & 0 \\ S & 0 & -\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \tag{13}$$

с областью определения

$$\mathrm{Dom}\,(\mathcal{A}) = \{(u, \rho, v)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{H} : v \in \mathrm{Dom}\,(\Gamma), \quad (-\alpha A^{1/2}u - \tilde{B}\rho - S^*v) \in \mathrm{Dom}\,(A^{1/2})\}.$$

Лемма 2.1. *Множество* $\mathrm{Dom}\,(\mathcal{A})$ *всюду плотно в* $\mathbb{H}$. *При этом оператор* $\mathcal{A}$ *является замкнутым и диссипативным.*

Доказательство. Рассмотрим множество V векторов вида $(u, \rho, \tilde{v})^{\mathrm{т}}$, где $u \in \mathrm{Dom}\,(A)$, $\rho \in \mathrm{Dom}\,(A^{1/2})$, $\tilde{v}(\tau)$ – кусочно-постоянная функция, принимающая значения в $\mathrm{Dom}\,(A^{1/2})$, и $\tilde{v}(\tau) \equiv 0$ вне некоторого компакта $\mathbb{R}_+$, где нуль – элемент H. Заметим, что $V \subset \mathrm{Dom}\,(\mathcal{A})$. Действительно, $\tilde{B}^2 = (1 - K(0))I + A^{-1/2}CA^{-1/2}$ на $\mathrm{Dom}\,(A^{1/2})$ и $\tilde{B}\rho \in \mathrm{Dom}\,(A^{1/2})$ при $\rho \in \mathrm{Dom}\,(A^{1/2})$ в силу обратимости $\tilde{B}$. Далее, выполняется условие

$$\int\limits_0^{+\infty} \|\tau\tilde{v}(\tau)\|^2\, d\mu(\tau) = \int\limits_K \|\tau\tilde{v}(\tau)\|^2\, d\mu(\tau) < +\infty,$$

где K – компакт в $\mathbb{R}_+$. Кроме того, справедливы неравенства

$$\left\| A^{1/2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\tilde{v}(\tau)}{\sqrt{\tau}}\, d\mu(\tau) \right\| \leqslant \left(\int\limits_0^{+\infty} \|A^{1/2}\tilde{v}(\tau)\|^2\, d\mu(\tau) \right)^{1/2} \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} \right)^{1/2} <$$

$$< \left(\sum_{k=1}^{n} \|A^{1/2}v_i\|^2 \right)^{1/2} < +\infty,$$

где v_i – различные ненулевые значения функции $\tilde{v}(\tau)$ в $\mathrm{Dom}\,(A^{1/2})$. Множество V всюду плотно в пространстве $\mathbb{H}$. Действительно, $\mathrm{Dom}\,(A)$ и $\mathrm{Dom}\,(A^{1/2})$ плотны в H в силу самосопряжённости оператора A. Кусочно-постоянные функции с компактным носителем плотны в $L_2(H,\mu)$. Ввиду плотности $\mathrm{Dom}\,(A^{1/2})$ в H эти функции могут быть приближены к функциями вида $\tilde{v}(\tau)$ со значениями в $\mathrm{Dom}\,(A^{1/2})$. Следовательно, $\mathrm{Dom}\,(\mathcal{A})$ плотно в $\mathbb{H}$. Первое утверждение леммы доказано.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathrm{Dom}\,(\mathcal{A})$ такую, что $x_n \to x \in \mathbb{H}$ и $\mathcal{A}x_n \to y \in \mathbb{H}$ при $n \to +\infty$. По определению замкнутости линейного оператора нужно показать, что $x \in \mathrm{Dom}\,(\mathcal{A})$ и $y = \mathcal{A}x$.

Поскольку $x_n \in \mathrm{Dom}\,(\mathcal{A})$, то $x_n = (u_n, \rho_n, v_n)^{\mathrm{т}}$, где $v_n \in \mathrm{Dom}\,(\Gamma)$ и $(-\alpha A^{1/2}u_n - \tilde{B}\rho_n - S^*v_n) \in \mathrm{Dom}\,(A^{1/2})$, откуда следует, что $u_n \in \mathrm{Dom}\,(A^{1/2})$. Пусть $x = (u,\rho,v)^{\mathrm{т}}$, причём очевидно, что $u_n \to u$, $\rho_n \to \rho$ в H и $v_n \to v$ в $L_2(H,\mu)$ при $n \to +\infty$. Подействуем оператором $\mathcal{A}$ на вектор x_n:

$$\mathcal{A}x_n = \mathcal{A}\begin{pmatrix} u_n \\ \rho_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{1/2}(-\alpha A^{1/2}u_n - \tilde{B}\rho_n - S^*v_n) \\ \tilde{B}A^{1/2}u_n \\ SA^{1/2}u_n - \Gamma v_n \end{pmatrix} \to y := \begin{pmatrix} y_u \\ y_\rho \\ y_v \end{pmatrix}.$$

Отсюда имеем $\tilde{B}A^{1/2}u_n \to y_\rho$, следовательно, $A^{1/2}u_n \to \tilde{B}^{-1}y_\rho$ при $n \to +\infty$. Ввиду замкнутости $A^{1/2}$ $u \in \mathrm{Dom}\,(A^{1/2})$ и $A^{1/2}u = \tilde{B}^{-1}y_\rho$, следовательно, $y_\rho = \tilde{B}A^{1/2}u$.

Далее, ввиду ограниченности S $SA^{1/2}u_n \to SA^{1/2}u$, следовательно, $\Gamma v_n \to (y_v - SA^{1/2}u) \in L_2(H,\mu)$ при $n \to +\infty$. Оператор Γ самосопряжён в $L_2(H,\mu)$, следовательно, замкнут, отсюда следует, что $\Gamma v = SA^{1/2}u - y_v$, т.е. $y_v = SA^{1/2}u - \Gamma v$.

Наконец, $A^{1/2}(-\alpha A^{1/2}u_n - \tilde{B}\rho_n - S^*v_n) \to y_u$, при этом $(-\alpha A^{1/2}u_n - \tilde{B}\rho_n - S^*v_n) \to (-\alpha A^{1/2}u - \tilde{B}\rho - S^*v)$ при $n \to +\infty$. Ввиду замкнутости $A^{1/2}$ имеем $(-\alpha A^{1/2}u - \tilde{B}\rho - S^*v) \in \mathrm{Dom}\,(A^{1/2})$ и $y_u = A^{1/2}(-\alpha A^{1/2}u - \tilde{B}\rho - S^*v)$. Замкнутость оператора $\mathcal{A}$ доказана.

Как и в работе [32, лемма 2], проверяется непосредственно, что $\mathcal{A}$ является диссипативным оператором, т.е. выполняется $\mathrm{Re}\,(\mathcal{A}h,h)_{\mathbb{H}} \leqslant 0$ для любого $h \in \mathrm{Dom}\,(\mathcal{A})$. Тем самым лемма полностью доказана.

3. Основной результат. Основной результат данной работы есть обобщение результатов работы [32, теоремы 1 и 2] на случай, когда ядро вольтерровой свёртки $K(t)$ является интегралом Стилтьеса.

Теорема 3.1. *Пусть выполнено условие (3) и условия (A)–(C), тогда оператор $\mathcal{A}$ является генератором сжимающей сильно непрерывной полугруппы. Более того, эта полугруппа является аналитической.*

Доказательство теоремы 3.1 сводится к проверке условий двух классических теорем теории полугрупп (см. [33, с. 83]), формулировки которых приводим в следующем пункте для полноты изложения.

4. Теоремы о генераторе полугруппы.

Теорема 4.1 (Люмьера–Филлипса). *Пусть $\mathcal{A}$ – диссипативный оператор (т.е. для любого элемента $h \in \mathrm{Dom}\,(\mathcal{A})$ имеет место неравенство $\mathrm{Re}\,(\mathcal{A}h,h)_{\mathbb{H}} \leqslant 0$) с плотной областью определения, тогда замыкание $\tilde{\mathcal{A}}$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы тогда и только тогда, когда область значений $\mathrm{Ran}\,(\mathcal{A} - \lambda I)$ оператора $\mathcal{A} - \lambda I$ всюду плотна для некоторого $\lambda > 0$.*

Для доказательства аналитичности полугруппы, генератором которой является оператор $\mathcal{A}$, мы воспользуемся известным критерием аналитичности (см. [33, теорема 4.6]). Обозначим множество

$$\Lambda_\delta := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg\lambda| < \pi/2 + \delta\}. \tag{14}$$

Теорема 4.2 (критерий аналитичности полугруппы). *Линейный оператор $\mathcal{A}$ является генератором аналитической полугруппы тогда и только тогда, когда существует число $\delta \in (0,\pi/2)$ такое, что*

$$\rho(\mathcal{A}) \supset \Lambda_\delta \backslash \{0\},$$

и для любого $\varepsilon > 0$ *найдётся значение* $M_\varepsilon \geqslant 1$ *такое, что выполняется неравенство*

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})\| < \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|}$$

для всех $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \overline{\Lambda_{\delta-\varepsilon}}$.

Символом $\rho(\mathcal{A})$ здесь и далее обозначено резольвентное множество оператора $\mathcal{A}$.

Далее мы установим, что $\Lambda_\delta \subset \rho(\mathcal{A})$. Кроме того, мы получим оценку нормы резольвенты $R(\lambda, \mathcal{A}) := (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}$ во множестве Λ_δ.

5. Доказательство основных результатов. Ход рассуждений при доказательстве приведённых результатов во многом аналогичен доказательству результатов работы [32], поскольку общий вид оператора $\mathcal{A}$ (см. (13)) и свойства операторных коэффициентов аналогичны, однако в данном случае следует уточнить ряд моментов, в которых используется явный вид функции $K(t)$.

5.1. Переход от оператора $\mathcal{A}$ к голоморфной в $\mathbb{C}\backslash(-\infty, d_0]$ оператор-функции. Пусть оператор-функция $L(\lambda)$ определена равенством

$$L(\lambda) := \lambda^2 + \alpha\lambda A + A + C - \hat{K}(\lambda)A,$$

где $\hat{K}(\lambda)$ – преобразование Лапласа функции $-K'(t)$, аналитически продолженное в левую полуплоскость, за исключением полуоси $(-\infty, -d_0)$, определяемое по формуле

$$\hat{K}(\lambda) = \int\limits_{d_0}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau + \lambda}.$$

Рассмотрим также оператор-функцию $\tilde{L}(\lambda)$, определённую равенством

$$\tilde{L}(\lambda) := \lambda^2 A^{-1} + \tilde{B}^2 + (\alpha\lambda + K(0) - \hat{K}(\lambda))I.$$

Заметим, что в области $\operatorname{Dom}(A^{1/2})$ справедливо равенство

$$\tilde{L}(\lambda) = A^{-1/2} L(\lambda) A^{-1/2}$$

в силу (8).

Далее введём операторные матрицы

$$\mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$\mathcal{B}_1(\lambda) := \begin{pmatrix} I & \frac{1}{\lambda}\tilde{B} & S^*(\Gamma + \lambda I)^{-1} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$\mathcal{B}_2(\lambda) := \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\lambda}\tilde{B} & I & 0 \\ -(\Gamma + \lambda I)^{-1} S & 0 & I \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$$\tilde{\mathcal{A}}(\lambda) := \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda}\tilde{L}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda I & 0 \\ 0 & 0 & -(\Gamma + \lambda I) \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$\mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} I & 0 & S^*\Gamma^{-1} \\ -\tilde{B}T^{-1} & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \tag{19}$$

$$\mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} I & T^{-1}\tilde{B} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ -\Gamma^{-1}S & 0 & I \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -T & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{B}T^{-1}\tilde{B} & 0 \\ 0 & 0 & -\Gamma \end{pmatrix}, \tag{21}$$

где $T = \alpha I + S^*\Gamma^{-1}S$.

Следующее утверждение доказано в работе [32, лемма 3].

Лемма 5.1. *Пусть* $\lambda \notin (-\infty, -d_0)$, $\lambda \neq 0$. *Тогда справедливо разложение*

$$\mathcal{A} - \lambda I = \mathcal{A}_0\mathcal{B}_1(\lambda)\tilde{\mathcal{A}}(\lambda)\mathcal{B}_2(\lambda)\mathcal{A}_0, \tag{22}$$

где операторные матрицы $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{B}_1$, $\tilde{\mathcal{A}}(\lambda)$, $\mathcal{B}_2$ *определены равенствами (15)–(18). Кроме того, справедливо разложение*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0\mathcal{B}_1\tilde{\mathcal{A}}\mathcal{B}_2\mathcal{A}_0, \tag{23}$$

где операторные матрицы $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\tilde{\mathcal{A}}$ *определены равенствами (19)–(21).*

Из разложения (22) следует

Теорема 5.1. *Пусть* $\lambda \notin (-\infty, d_0)\bigcup\{0\}$, *тогда оператор* $\mathcal{A} - \lambda I$ *и оператор-функция* $\tilde{L}(\lambda)$ *непрерывно обратимы одновременно.*

Доказательство. Заметим, что при λ из условия теоремы операторы $\mathcal{B}_1(\lambda)$ и $\mathcal{B}_2(\lambda)$ принадлежат $\mathcal{L}(\mathbb{H})$. При этом легко проверить, что обратные матрицы имеют вид

$$\mathcal{B}_1^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} I & -\dfrac{1}{\lambda}\tilde{B} & -S^*(\Gamma + \lambda I)^{-1} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_2^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{\lambda}\tilde{B} & I & 0 \\ (\Gamma + \lambda I)^{-1}S & 0 & I \end{pmatrix}.$$

Оператор $\mathcal{A}_0$ обратим ввиду обратимости $A^{-1/2}$. Таким образом, оператор $\mathcal{A} - \lambda I$ обратим тогда и только тогда, когда обратим $\tilde{\mathcal{A}}(\lambda)$ при λ из условия теоремы. Обратимость же последнего эквивалентна обратимости $\tilde{L}(\lambda)$. Теорема доказана.

Отметим ещё одно важное свойство $\mathcal{A}$, следующее из разложения (23).

Теорема 5.2. *Оператор* $\mathcal{A}$ *непрерывно обратим.*

Доказательство. Для этого достаточно заметить, что $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ ограничены и

$$\mathcal{B}_1^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 & -S^*\Gamma^{-1} \\ \tilde{B}T^{-1} & I & -\tilde{B}T^{-1}S^*\Gamma^{-1} \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_2^{-1} = \begin{pmatrix} I & -T^{-1}\tilde{B} & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \Gamma^{-1}S & -\Gamma^{-1}ST^{-1}\tilde{B} & I \end{pmatrix}.$$

Из разложения (23) следует, что $\mathcal{A}$ обратим тогда и только тогда, когда обратим оператор $\tilde{\mathcal{A}}$, для обратимости которого, в свою очередь, требуется обратимость $T = \alpha I + S^*\Gamma^{-1}S$ и

$\tilde{B}T^{-1}\tilde{B}$. Оператор T – ограниченный, самосопряжённый, положительно определённый. Далее отметим, что

$$\|\tilde{B}h\| = \|((1-K(0))h + \overline{A^{-1/2}CA^{-1/2}}h)^{1/2}\| \geqslant (1-K(0)-\|\overline{A^{-1/2}CA^{-1/2}}\|)^{1/2}\|h\|$$

для всех $h \in H$, откуда следует, что $\tilde{B}T^{-1}\tilde{B}$ – ограниченный, самосопряжённый, положительно определённый оператор. Тем самым $\tilde{\mathcal{A}}$, а значит и $\mathcal{A}$, непрерывно обратим. Теорема доказана.

Теорема 5.1 позволяет свести изучение спектра оператора $\mathcal{A}$ к изучению спектра оператор-функции $\tilde{L}(\lambda)$.

В следующем пункте представлены основные результаты, касающиеся локализации спектра оператор-функции $L(\lambda)$, а также оценки нормы её резольвенты $L^{-1}(\lambda)$. Показано, что спектр $L(\lambda)$ содержится вне некоторого угла в левой полуплоскости, из чего следует аналогичный факт для оператор-функции $\tilde{L}(\lambda)$, а следовательно, и для оператора $\mathcal{A}$.

5.2. Локализация спектра оператор-функции $L(\lambda)$. Покажем, что спектр оператор-функции $L(\lambda)$ содержится в области $\mathbb{C}\backslash\overline{\Lambda_\delta}$, где Λ_δ определена в (14). Полученные здесь результаты являются обобщениями результатов работы [24], в которой ядро вольтерровой свёртки было представимо в виде ряда из экспонент.

Для полноты изложения приведём определение понятия спектра оператор-функции.

Определение. *Резольвентным множеством* $\rho(L)$ оператор-функции $L(\lambda)$ называется множество точек в $\lambda \in \mathbb{C}$ такое, что оператор $L^{-1}(\lambda)$ определён и ограничен.

Спектром оператор-функции $L(\lambda)$ называется множество $\sigma(L) = \mathbb{C}\backslash\rho(L)$.

Для исследования спектра оператор-функции $L(\lambda)$ нам потребуется следующая

Лемма 5.2. *Спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *в области* $\{|\mathrm{Im}\,\lambda| > 0\}\bigcup\{\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0\}$ *состоит из собственных чисел конечной кратности.*

Доказательство. Имеем

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + \alpha\lambda A + A + C - \hat{K}(\lambda)A = (\lambda^2 A^{-1} + CA^{-1} + (1+\alpha\lambda - \hat{K}(\lambda))I)A.$$

Рассмотрим оператор

$$\tilde{L}(\lambda) = \lambda^2 A^{-1} + CA^{-1} + (1+\alpha\lambda - \hat{K}(\lambda))I.$$

Оператор $L(\lambda)$ обратим тогда и только тогда, когда обратим $\tilde{L}(\lambda)$ ввиду обратимости оператора A. Заметим, что если λ не является корнем уравнения

$$1 + \alpha\lambda = \hat{K}(\lambda), \tag{24}$$

то оператор $\tilde{L}(\lambda)$ фредгольмова типа, а значит, если $\tilde{L}(\lambda)$ необратим, то λ – собственное число конечной кратности.

Далее, все корни уравнения (24) вещественны. Действительно, если $|\mathrm{Im}\,\lambda| > 0$, то выражения в левой и правой частях равенства (24) принимают значения в разных полуплоскостях, т.е. выполняется неравенство

$$\mathrm{Im}\,(1+\alpha\lambda)\,\mathrm{Im}\,\hat{K}(\lambda) < 0.$$

Пусть $\lambda \geqslant 0$, тогда

$$1 - \hat{K}(\lambda) + \alpha\lambda \geqslant 1 - K(0) + \alpha\lambda > 0.$$

Таким образом, уравнение (24) не имеет неотрицательных корней. Это простое замечание завершает доказательство леммы.

Получим, что если $\lambda \notin (-\infty, 0)$ – точка спектра оператор-функции $L(\lambda)$, то существует вектор $h \in \mathrm{Dom}\,(L(\lambda)) = \mathrm{Dom}\,(A)$ такой, что $L(\lambda)h = 0$, тем самым λ является корнем уравнения вида

$$l(\lambda) := \lambda^2 + \alpha a\lambda + K(0)a + b - a\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau+\lambda} = 0,$$

где $b := (((1-K(0))A + C)h, h) > 0$.

Лемма 5.3. *Функция $l(\lambda)$ не имеет корней в замкнутой правой полуплоскости.*

Доказательство. Если $\lambda \geqslant 0$, то
$$l(\lambda) > 0$$
в силу неравенства (3). Если $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, то
$$\operatorname{Im} l(\lambda) = 2\operatorname{Re}\lambda \operatorname{Im}\lambda + \alpha a \operatorname{Im}\lambda + a\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Im}\lambda\, d\mu(\tau)}{|\tau+\lambda|^2} = 0$$
только в случае, когда
$$\operatorname{Re}\lambda < -\frac{\alpha a}{2} - \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{|\tau+\lambda|^2} < 0.$$
Тем самым лемма доказана.

Из лемм 5.2 и 5.3 следует

Теорема 5.3. *Оператор-функция $L(\lambda)$ не имеет точек спектра в замкнутой правой полуплоскости.*

Далее мы покажем, что невещественная часть спектра оператор-функции $L(\lambda)$ локализуется в левой полуплоскости внутри некоторого угла $\mathbb{C}\backslash\overline{\Lambda_\delta}$, $\delta \in (0, \pi/2)$. Для этого рассмотрим оператор-функцию
$$L_0(\lambda) = \lambda^2 I + \alpha\lambda A + (1 - \hat{K}(\lambda))A.$$
Оператор A – самосопряжённый с компактным обратным, следовательно, векторы $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ такие, что
$$Ae_n = a_n e_n, \quad 0 < a_n \leqslant a_{n+1} \to +\infty,$$
образуют ортонормированный базис пространства H.

Обозначим через
$$l_n(\lambda) := (L(\lambda)e_n.e_n) = \lambda^2 + \alpha\lambda a_n + (1 - \hat{K}(\lambda))a_n \tag{25}$$
проекции оператор-функции $L_0(\lambda)$ на собственные подпространства, причём (см. [7, гл. 3])
$$\sigma(L_0) = \overline{\bigcup_n \{\lambda \in \mathbb{C} : l_n(\lambda) = 0\}}. \tag{26}$$
Укажем область локализации нулей функций $l_n(\lambda)$. Результаты, которые приводятся ниже, есть обобщение теоремы 1 работы [24] на случай ядер вольтерровой свёртки, представимых в виде интегралов Лебега–Стилтьеса. Обозначим область
$$D_\delta := \overline{\Lambda_\delta} \bigcup \left\{\operatorname{Re}\lambda \geqslant -\frac{\alpha a_1}{2}, \;\; \operatorname{Im}\lambda \neq 0\right\}.$$

Лемма 5.4. *Функция $l_n(\lambda)$, определённая равенством (25), для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет не более двух невещественных корней, причём эти корни комплексно сопряженные. Если выполнено условие (3), то существует число $\delta \in (0, \pi/2)$ такое, что $l_n(\lambda)$ не имеет корней в области D_δ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Очевидно, что все невещественные корни образуют пары комплексно-сопряжённых корней в силу равенства $l_n(\overline{\lambda}) = \overline{l_n(\lambda)}$. Тот факт, что таких пар не более одной, установлен в работе [23]. Его доказательство опирается на модификацию известной теоремы Шварца–Пика [34, гл. 4, п. 70, теорема 3] для верхней полуплоскости, применённой к функции $\varphi_n(\lambda)$ такой, что
$$\varphi_n(\lambda) = \varphi(-\alpha a_n\lambda - a_n + K(\lambda)a_n),$$

где $\varphi^2(\lambda) = \lambda$. При этом в качестве φ выбирается ветвь, переводящая $\{0 < \arg\lambda < 2\pi\}$ в верхнюю полуплоскость.

Пусть выполнено условие (3). Заметим, что все вещественные корни функции $l_n(\lambda)$ лежат в левой полуплоскости. Действительно, $l_n(x)$ монотонно возрастает на $(-d_0, +\infty)$, причём $l_n(0) > 0$ для любого n, следовательно, в замкнутой правой полуплоскости нет вещественных корней у функции $l_n(\lambda)$.

Пусть теперь $\lambda = x + iy$, $y > 0$ и $l_n(\lambda) = 0$, тогда

$$\operatorname{Im} l_n(\lambda) = 2xy + \alpha a_n y + a_n \int\limits_0^{+\infty} \frac{y\,d\mu(\tau)}{|\tau+\lambda|^2} = 0,$$

откуда найдём

$$x = -\frac{\alpha a_n}{2} - a_n \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{|\tau+\lambda|^2}.$$

Тем самым получаем оценку вещественных частей комплексно-сопряжённых корней функции $l_n(\lambda)$:

$$x < -\frac{\alpha a_n}{2} < -\frac{\alpha a_1}{2}.$$

Далее запишем

$$l_n(\lambda) = f_n(\lambda) - a_n \hat{K}(\lambda),$$

где $f_n(\lambda) = \lambda^2 + \alpha a_n \lambda + a_n$.

Нам потребуется оценка $f_n(\lambda)$ при $\lambda \in \overline{\Lambda_\delta} \bigcap \{\operatorname{Re}\lambda \leqslant -\alpha a_1/2\}$:

$$\left|\frac{f_n(x+iy)}{a_n}\right| > \frac{\alpha^2 a_1}{2}\operatorname{ctg}\delta + \sin(2\delta),$$

которая устанавливается следующим образом:

$$\left|\frac{f_n(x+iy)}{a_n}\right| = \left|\frac{(x+iy)^2}{a_n} + \alpha(x+iy) + 1\right| \geqslant |x+iy|^2 \left|\frac{1}{a_n} + \alpha\frac{1}{x+iy} + \frac{1}{(x+iy)^2}\right| \geqslant$$

$$\geqslant (x^2+y^2)\left|\operatorname{Im}\left(\frac{1}{a_n} + \alpha\frac{x-iy}{x^2+y^2} + \frac{x^2-y^2-2ixy}{(x^2+y^2)^2}\right)\right| = \alpha|y| + \frac{2|xy|}{x^2+y^2} \geqslant$$

$$\geqslant \alpha|\lambda|\sin\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right) + \sin(2(\pi/2-\delta)) = \alpha|\lambda|\cos\delta + \sin(2\delta) > \frac{\alpha^2 a_1}{2}\operatorname{ctg}\delta + \sin(2\delta).$$

Оценим функцию $\hat{K}(\lambda)$ в области $\overline{\Lambda_\delta} \bigcap \{\operatorname{Re}\lambda < -\alpha a_1/2\}$:

$$|\hat{K}(x+iy)| = \left|\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau+x+iy}\right| \leqslant \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{|\tau+x+iy|} = \int\limits_0^{2|x|} \frac{d\mu(\tau)}{|\tau+x+iy|} + \int\limits_{2|x|}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{|\tau+x+iy|}.$$

Для первого слагаемого в правой части последнего равенства справедлива оценка

$$\int\limits_0^{2|x|} \frac{d\mu(\tau)}{|\tau+x+iy|} < \frac{1}{|y|}\int\limits_0^{2|x|} d\mu(\tau) < \frac{1}{|y|}\int\limits_0^{2|x|} 2|x|\frac{d\mu(\tau)}{\tau} < \frac{2|x|}{|y|}.$$

Если $\lambda = x + iy \in \overline{\Lambda_\delta} \bigcap \{\operatorname{Re}\lambda \leqslant -\alpha a_1/2\}$, то

$$\frac{2|x|}{|y|} = \left|\frac{2\cos(\arg\lambda)}{\sin(\arg\lambda)}\right| \leqslant 2\frac{\cos(\pi/2-\delta)}{\sin(\pi/2-\delta)} = 2\operatorname{tg}\delta.$$

Для второго слагаемого в силу неравенств $|\tau+x+iy|>\tau-|x|>\tau/2$ при $\tau>2|x|$ имеем оценку

$$\int\limits_{2|x|}^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{|\tau+x+iy|}<2\int\limits_{2|x|}^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{\tau}<2.$$

Последнее неравенство вытекает из условия (3).

Заметим, что если справедливо неравенство

$$\frac{\alpha^2a_1}{2}\operatorname{ctg}\delta+\sin(2\delta)>2\operatorname{tg}\delta+2, \tag{27}$$

то $|f_n(x+iy)/a_n|>|\hat{K}(x+iy)|$ на границе области $\Lambda_\delta\bigcap\{\operatorname{Re}\lambda<-\alpha a_1/2\}$. Следовательно, по теореме Руше функция $l_n(\lambda)$ имеет столько же нулей, сколько и функция $f_n(\lambda)$ в этой области. Функция

$$g(\delta)=\frac{\alpha^2a_1}{2}\operatorname{ctg}\delta+\sin(2\delta)-2\operatorname{tg}\delta-2$$

монотонно убывает и имеет единственный корень δ_0 на интервале $(0,\pi/2)$. Таким образом, при $\delta\in(0,\delta_0)$ неравенство (27) верно, и для любого $n\in\mathbb{N}$ функция $l_n(\lambda)$ не имеет корней в $\overline{\Lambda_\delta}$. Лемма доказана.

По результатам леммы 5.4 вместе с соотношением (26) формулируется следующая

Теорема 5.4. *Пусть выполнено условие (3), тогда существует* $\delta\in(0,\pi/2)$ *такое, что* $D_\delta\subset\rho(L_0)$.

Далее нам потребуются некоторые оценки резольвенты оператор-функции $L_0(\lambda)$ в D_δ. Обозначим

$$D_{R,\delta}:=D_\delta\bigcap\{|\lambda|\geqslant R\}.$$

Лемма 5.5. *Пусть выполнено условие (3), тогда найдутся такие числа* $R>0$ *и* $\delta\in\in(0,\pi/2)$, *что для любого* $n\in\mathbb{N}$ *и* $\lambda\in D_{R,\delta}$ *будет справедлива следующая оценка:*

$$|l_n(\lambda)|>Ma_n|\lambda|, \tag{28}$$

где M *– положительная постоянная, зависящая только от выбора* R *и* δ.

Доказательство. Зафиксируем значение $\delta\in(0,\pi/2)$, при котором выполнены условия леммы 5.4. Справедливо выражение

$$|l_n(\lambda)|=\left|\lambda^2+\alpha a_n\lambda+a_n(1-K(0))+a_n\lambda\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{\tau(\lambda+\tau)}\right|\geqslant$$

$$\geqslant|\lambda|\left|\alpha a_n+\lambda+\frac{1-K(0)}{|\lambda|}a_n\right|-a_n|\lambda|\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{\tau|\lambda+\tau|}.$$

Поскольку для $\lambda\in\overline{\Lambda}_\delta\backslash 0$ выполняется неравенство $|\tau+\lambda|\geqslant|\lambda|\cos\delta$, то

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{\tau|\lambda+\tau|}<\frac{1}{|\lambda|\cos\delta}.$$

Далее имеем

$$|\alpha a_n+\lambda|\geqslant|\lambda|\left|\operatorname{Im}\left(\frac{\alpha a_n}{\lambda}+1\right)\right|=\frac{\alpha a_n|\operatorname{Im}\lambda|}{|\lambda|}\geqslant\alpha a_n\cos\delta.$$

Таким образом, получаем оценку

$$|l_n(\lambda)| > \alpha a_n|\lambda|\left(\cos\delta - \frac{1-K(0)}{\alpha|\lambda|} - \frac{1}{|\lambda|\cos\delta}\right).$$

При достаточно большом $R>0$ оценка (28) в $D_{R,\delta}$ доказана. Лемма доказана.

Перейдём теперь к оценке $L_0^{-1}(\lambda)$ в $D_{R,\delta}$.

Теорема 5.5. *Пусть выполнено условие (3), тогда найдутся числа $R>0$ и $\delta\in(0,\pi/2)$ такие, что в области $D_{R,\delta}$ справедливы следующие оценки:*

$$\|AL_0^{-1}(\lambda)\| < \frac{M_1}{|\lambda|}, \tag{29}$$

$$\|L_0^{-1}(\lambda)\| < \frac{M_2}{|\lambda|^2}. \tag{30}$$

Постоянные M_1 и M_2 зависят только от выбора δ и R.

Доказательство. Выберем $\delta\in(0,\pi/2)$, для которого выполняются условия теоремы 5.4. Оценка (29) следует из леммы 5.5 и равенства

$$\|AL_0^{-1}(\lambda)\| = \sup_n\left|\frac{a_n}{l_n(\lambda)}\right|.$$

Докажем оценку (30). Запишем $L_0(\lambda)$ в виде

$$L_0(\lambda) = \lambda(\alpha A+\lambda I)\left(I + \left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{\tau(\tau+\lambda)}\right)(\alpha I+\lambda A^{-1})^{-1}\right).$$

Покажем, что существует $R>0$ такое, что для любого $\lambda\in D_{R,\delta}$ выполняется неравенство

$$\left\|\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{\tau(\tau+\lambda)}\right)(\alpha I+\lambda A^{-1})^{-1}\right\| < 1. \tag{31}$$

Справедливо равенство

$$\|(\alpha I+\lambda A^{-1})^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda|\,\mathrm{dist}\,(-\alpha/\lambda,\sigma(A^{-1}))}.$$

Если $\operatorname{Re}\lambda\geqslant 0$, то $\mathrm{dist}\,(-\alpha/\lambda,\sigma(A^{-1}))\geqslant\alpha/|\lambda|$. В противном случае

$$\mathrm{dist}\,(-\alpha/\lambda,\sigma(A^{-1})) \geqslant \left|\operatorname{Im}\frac{\alpha}{\lambda}\right| \geqslant \frac{\alpha|\operatorname{Im}\lambda|}{|\lambda|^2} = \frac{\alpha\cos\delta}{|\lambda|}$$

для $\lambda\in\overline{\Lambda_\delta}\backslash 0$. Отсюда следует, что

$$\|(\alpha I+\lambda A^{-1})^{-1}\| < \frac{|\lambda|}{|\lambda|\alpha} = \frac{1}{\alpha}. \tag{32}$$

При $\lambda\in\overline{\Lambda}_\delta\backslash 0$ справедливо неравенство $|\tau+\lambda|\geqslant|\lambda|\cos\delta$, из которого получаем оценку

$$\left|\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{\tau(\tau+\lambda)}\right| \leqslant \frac{1}{|\lambda\cos\delta|}K(0) < \frac{1}{|\lambda|\cos\delta}. \tag{33}$$

Из (32) и (33) следует, что существует $R > 0$ такое, что для любого $\lambda \in D_{R,\delta}$ выполнено условие (31) и оператор

$$I + \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau(\tau+\lambda)} \right) (\alpha I + \lambda A^{-1})^{-1}$$

непрерывно обратим. Для $h \in \mathrm{Dom}\,(A)$, $\|h\| = 1$ оценим снизу $\|(\alpha A + \lambda I)h\|$, т.е. покажем, что

$$\|(\alpha A + \lambda I)h\| \geqslant m|\lambda| \tag{34}$$

для $\lambda \in \overline{\Lambda}_\delta$. Здесь m – положительная постоянная, зависящая только от δ. Имеем

$$\|(\alpha A + \lambda I)h\|^2 = ((\alpha A + \lambda I)h, (\alpha A + \lambda I)h) = \|\alpha Ah\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\lambda(\alpha Ah, h) + |\lambda|^2.$$

Если $\mathrm{Re}\,\lambda \geqslant 0$, то неравенство (34), очевидно, верно. Иначе, если $|\mathrm{Im}\,\lambda| > 0$, $\lambda \in \overline{\Lambda}_\delta$, то можно записать

$$\|\alpha Ah\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\lambda(\alpha Ah, h) + |\lambda|^2 = \|\alpha Ah\|^2 + 2\mathrm{Re}\,\lambda(\alpha Ah, h) + (|\mathrm{Re}\,\lambda|^2 + |\mathrm{Im}\,\lambda|^2) =$$

$$= \|(\alpha A + \mathrm{Re}\,\lambda)h\|^2 + |\mathrm{Im}\,\lambda|^2 \geqslant |\mathrm{Im}\,\lambda|^2 = |\lambda|^2 \cos^2 \delta.$$

Из (34) с учётом обратимости оператора

$$I + \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau(\tau+\lambda)} \right) (\alpha I + \lambda A^{-1})^{-1}$$

получим оценку (30) для любого $\lambda \in D_{R,\delta}$.

Из теорем 5.4 и 5.5 вытекает следующий результат о спектре оператор-функции $L(\lambda)$.

Теорема 5.6. *Пусть выполнено условие (3), тогда найдутся* $\delta \in (0, \pi/2)$, $R > 0$ *такие, что* $D_{R,\delta} \subset \rho(L)$. *Более того,* $\sigma(L) \bigcap \{|\mathrm{Im}\,\lambda| \neq 0\} \subset \{\mathrm{Re}\,\lambda < -\alpha a_1/2\}$, *и при этом в области* $D_{R,\delta}$ *справедливы оценки*

$$\|AL^{-1}(\lambda)\| < \frac{M_1}{|\lambda|},$$

$$\|L^{-1}(\lambda)\| < \frac{M_2}{|\lambda|^2}. \tag{35}$$

Постоянные M_1 *и* M_2 *зависят только от выбора* δ *и* R.

Доказательство. Зафиксируем $\delta \in (0, \pi/2)$, при котором выполнены условия теоремы 5.4. Заметим, что

$$L(\lambda) = L_0(\lambda) + C = (I + CL_0^{-1}(\lambda))L_0(\lambda).$$

Далее, в силу ограниченности оператора CA^{-1} выполняется неравенство

$$\|CL_0^{-1}(\lambda)\| < M\|AL_0^{-1}(\lambda)\|.$$

С учётом оценки (29) найдётся число $R > 0$ такое, что для любого $\lambda \in D_{R,\delta}$ справедливо условие

$$\|CL_0^{-1}(\lambda)\| < 1.$$

Значит, для таких λ непрерывная обратимость $L(\lambda)$ эквивалентна непрерывной обратимости $L_0(\lambda)$. Оценка $\|AL^{-1}(\lambda)\|$ следует теперь из непрерывной обратимости $I + CL_0^{-1}$ для $\lambda \in D_{R,\delta}$ и неравенства (29) в области $D_{R,\delta}$.

В силу леммы 5.2 если λ такое, что $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$, $\lambda \in \sigma(L)$, то λ – собственное число конечной кратности оператор-функции $L(\lambda)$, следовательно, существует $h \in \mathrm{Dom}\,(L(\lambda)) = \mathrm{Dom}\,(A)$, для которого выполняется равенство

$$(L(\lambda)h, h) = \lambda^2 + \alpha\lambda(Ah, h) + (Ch, h) + (Ah, h) - \hat{K}(\lambda)(Ah, h) = 0.$$

Заметим, что при $|\operatorname{Im}\lambda| \neq 0$ справедливо выражение

$$2\operatorname{Re}\lambda + \alpha(Ah,h) + \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{|\tau+\lambda|^2} = 0,$$

откуда следует, что

$$\operatorname{Re}\lambda < -\frac{\alpha a_1}{2}.$$

Наконец, оценка (35) вытекает из равенства

$$L(\lambda) = (I + CL_0^{-1}(\lambda))L_0(\lambda),$$

обратимости $I + CL_0^{-1}(\lambda)$ в $D_{R,\delta}$ и оценки (30). Теорема доказана.

Из теоремы 5.6 следует, что для указанного в условии теоремы δ найдётся $\tilde{\delta} \in [\delta, \pi/2)$ такое, что $\sigma(L) \bigcap \overline{\Lambda}_{\tilde{\delta}} = \varnothing$.

5.3. Доказательство теоремы 3.1. Заметим, прежде всего, что справедливо следующее

Предложение. *Найдётся* $\tilde{\delta} \in (0, \pi/2)$ *такая, что* $\sigma(\tilde{L}) \bigcap \overline{\Lambda}_{\tilde{\delta}} = \varnothing$.

Доказательство. Действительно, из теоремы 5.6 это справедливо для $\sigma(L)$. Далее, в области $\operatorname{Dom}(A^{1/2})$ выполняется

$$\tilde{L}^{-1}(\lambda) = A^{1/2}L^{-1}(\lambda)A^{1/2},$$

значит, $\operatorname{Dom}(A^{1/2}) \subseteq \operatorname{Dom}(\tilde{L}^{-1}(\lambda))$ при $\lambda \in \overline{\Lambda}_{\tilde{\delta}}$. В силу этого и замкнутости оператора $\tilde{L}(\lambda)$ получаем $\operatorname{Dom}(\tilde{L}^{-1}(\lambda)) = H$, откуда с учётом замкнутости немедленно вытекает непрерывная обратимость.

Проверим выполнение условий теоремы 4.1 для оператора $\mathcal{A}$ (см. (13)), тем самым докажем, что этот оператор является генератором сжимающей C_0-полугруппы. Действительно, по лемме 2.1 оператор $\mathcal{A}$ является диссипативным. Далее, из теорем 5.1, 5.2 и 5.3 и предложения следует, что оператор $\mathcal{A}$ не имеет точек спектра при $\lambda > 0$, а следовательно, $\operatorname{Ran}(\mathcal{A} - \lambda I) = \operatorname{Dom}((\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}) = H$. Тем самым условия теоремы 4.1 выполнены и $\mathcal{A}$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы.

Теперь перейдём к проверке условий теоремы 4.2. Из теорем 5.1, 5.2 и 5.6 следует, что спектр $\mathcal{A}$ содержится в $\mathbb{C}\backslash\overline{\Lambda}_{\tilde{\delta}}$, $\tilde{\delta} \in (0, \pi/2)$. Осталось проверить, что выполняется оценка

$$\|R(\lambda,\mathcal{A})\| < \frac{M}{|\lambda|}. \tag{36}$$

Далее рассмотрим разложение (22) оператора $\mathcal{A} - \lambda I$. Запишем с его помощью явный вид резольвенты

$$R(\lambda,\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{\lambda}\tilde{B} & I & 0 \\ (\Gamma+\lambda I)^{-1}S & 0 & I \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -\lambda\tilde{L}^{-1}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\lambda}I & 0 \\ 0 & 0 & -(\Gamma+\lambda I)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\dfrac{1}{\lambda}\tilde{B} & -S^*(\Gamma+\lambda I)^{-1} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

и подействуем ей на произвольный $(u,\rho,v)^{\text{т}} \in \mathbb{H}$:

$$R(\lambda,\mathcal{A}) \begin{pmatrix} u \\ \rho \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{\rho} \\ \tilde{v} \end{pmatrix},$$

где
$$\tilde{u} = -(\lambda A^{-1/2}\tilde{L}^{-1}(\lambda)A^{-1/2}u - A^{-1/2}\tilde{L}^{-1}(\lambda)\tilde{B}\rho - \lambda A^{-1/2}\tilde{L}^{-1}(\lambda)S^*(\Gamma+\lambda I)^{-1}v),$$
$$\tilde{\rho} = \frac{1}{\lambda}(\tilde{B}A^{1/2}\tilde{u} - \rho), \quad \tilde{v} = (\Gamma+\lambda I)^{-1}(SA^{1/2}\tilde{u} - v).$$

Для проверки оценки (36) достаточно доказать, что выполняются неравенства
$$\|A^{-1/2}\tilde{L}^{-1}(\lambda)A^{-1/2}\| \leqslant \frac{M_1}{|\lambda|^2}, \tag{37}$$
$$\|A^{-1/2}\tilde{L}^{-1}(\lambda)\| \leqslant \frac{M_2}{|\lambda|}, \tag{38}$$
$$\|(\Gamma+\lambda I)^{-1}\| \leqslant \frac{M_3}{|\lambda|}, \tag{39}$$
где $M_1, M_2, M_3 > 0$. Неравенство (37) следует из равенства $A^{-1/2}\tilde{L}^{-1}(\lambda)A^{-1/2} = L^{-1}(\lambda)$ и теоремы 5.6, а неравенство (38) – из условий
$$\|A^{-1/2}\tilde{L}^{-1}(\lambda)\| = \|\tilde{L}^{-1}(\lambda)A^{-1/2}\| = \|A^{1/2}L^{-1}(\lambda)\| < M\|AL^{-1}(\lambda)\| < \frac{M_2}{|\lambda|}.$$
Последнее неравенство доказано в теореме 5.6.

Оценка
$$\|\Gamma+\lambda I\| \leqslant \frac{1}{\cos(\tilde{\delta}|\lambda|)}$$
выполняется при $\lambda \in \overline{\Lambda}_{\tilde{\delta}}$. Таким образом, неравенства (37)–(39) доказаны, а вместе с ними и теорема 3.1.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В.В. Власову за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также всем участникам семинара под его руководством за полезные обсуждения и ценные советы.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы МГУ “Математические методы анализа сложных систем”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пивоварчик В.Н.* Краевая задача, связанная с колебаниями стержня с внутренним и внешним трением // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1987. № 3. С. 68–71.
2. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М., 1970.
3. *Pipkin A.C., Gurtin M.E.* A general theory of heat conduction with finite wave speeds // Arch. for Rational Mech. and Anal. 1968. V. 31. P. 113–126.
4. *Власов В.В., Раутиан Н.А., Шамаев А.С.* Исследование операторных моделей, возникающих в задачах наследственной механики // Совр. математика. Фунд. направления. 2012. Т. 45. С. 43–61.
5. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Совр. математика. Фунд. направления. 2012. Т. 62. С. 53–71.
6. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* О свойствах решений интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории тепломассообмена // Тр. Моск. мат. о-ва. 2014. Т. 75. № 2. С. 219–243.
7. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М., 2016.
8. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ интегродифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Совр. математика. Фунд. направления. 2016. Т. 62. С. 53–71.
9. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Корректная разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости // Совр. математика. Фунд. направления. 2015. Т. 58. С. 22–42.

10. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ и представление решений интегро-дифференциальных уравнений с дробно-экспоненциальными ядрами // Тр. Моск. мат. о-ва. 2019. Т. 80. № 2. С. 197–220.
11. *Раутиан Н.А.* Полугруппы, порождаемые вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 9. С. 1226–1244.
12. *Pandolfi L., Ivanov S.* Heat equations with memory: lack of controllability to the rest // J. of Math. and Appl. 2009. V. 355. P. 1–11.
13. *Pandolfi L.* The controllability of the Gurtin–Pipkin equations: a cosine operator approach // Appl. Math. and Optim. 2005. V. 52. P. 143–165.
14. *Rivera J.E.M., Naso M.G.* On the decay of the energy for systems with memory and indefinite dissipation // Asympt. Anal. 2006. V. 49. P. 189–204.
15. *Amendola G., Fabrizio M., Golden J.M.* Thermodynamics of Materials with Memory. Boston, 2012.
16. *Dafermos C.M.* Asymptotic stability in viscoelasticity // Arch. for Rational Mech. and Anal. 1970. V. 37. P. 297–308.
17. *Fabrizio M., Giorgi C., Pata V.* A new approach to equations with memory // Arch. for Rational Mech. and Anal. 2010. V. 198. P. 189–232.
18. *Закора Д.А.* Экспоненциальная устойчивость одной полугруппы и приложения // Мат. заметки. 2018. Т. 103. Вып. 5. С. 702–719.
19. *Закора Д.А.* Модель сжимаемой жидкости Олдройта // Тр. Крымской осенней мат. школы-симпозиума. Совр. математика. Фунд. направления. 2016. Т. 61. С. 41–66.
20. *Закора Д.А.* Модель сжимаемой жидкости Максвелла // Тр. Крымской осенней мат. школы-симпозиума. Совр. математика. Фунд. направления. 2017. Т. 63. № 2. С. 247–265.
21. *Davydov A.V.* Asymptotics of the spectrum of an integro-differential equation, arising in the study of the flutter of a viscoelastic plate // Rus. J. of Math. Phys. 2021. V. 28. № 2. P. 188–197.
22. *Davydov A.V.* Spectral analysis of integrodifferential operators arising in the study of flutter of a viscoelastic plate // Moscow Univ. Math. Bull. 2020. V. 75. № 2. P. 65–71.
23. *Eremenko A., Ivanov S.* Spectra of the Gurtin–Pipkin type equations // SIAM J. Math. Anal. 2011. V. 43. № 5. P. 2296–2306.
24. *Давыдов А.В., Тихонов Ю.А.* Исследование операторных моделей Кельвина–Фойгта // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 12. С. 1663–1677.
25. *Lancaster P., Shkalikov A.* Damped vibrations of beams and related spectral problems // Canad. Appl. Math. Quart. 1994. V. 2. № 1. P. 45–90.
26. *Шкаликов А.А., Гринив Р.О.* О пучке операторов, возникающем в задаче о колебаниях стержня с внутренним трением // Мат. заметки. 1994. Т. 56. Вып. 2. С. 114–131.
27. *Милославский А.И.* О спектре неустойчивости операторного пучка // Мат. заметки. 1991. Т. 49. Вып. 4. С. 88–94.
28. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М., 1972.
29. *Лионс Ж.Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.
30. *Гельфанд И.М., Виленкин М.Я.* Обобщенные функции. М., 1961.
31. *Ахиезер Н.И., Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Харьков, 1977.
32. *Тихонов Ю.А.* Об аналитичности полугруппы операторов, возникающей в задачах теории вязкоупругости // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 808–822.
33. *Engel K.-J., Nagel R.* One-Parameter Semigroup for Linear Evolution Equations. New York, 1999.
34. *Каратеодори К.* Конформное отображение. М., 1934.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 05.10.2021 г.
После доработки 04.03.2022 г.
Принята к публикации 21.04.2022 г.