ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 5, с. 686–695

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.4

# ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЁРТКИ С ВЫПУКЛОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2022 г. Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян

Исследован класс многомерных интегральных уравнений типа свёртки с монотонной и выпуклой нелинейностью. Данный класс уравнений имеет применения в теории $p$-адических открыто-замкнутых струн и в математической теории пространственно-временного распространения пандемии. Доказана теорема существования неотрицательного, нетривиального, ограниченного и непрерывного решения. Установлена интегральная асимптотика построенного решения. В специальном классе неотрицательных и ограниченных функций доказана теорема единственности. Приведены прикладные примеры указанных уравнений.

DOI: 10.31857/S0374064122050089, EDN: CBIGTS

**Введение.** Настоящая работа посвящена вопросам существования и единственности, а также исследованию интегральной асимптотики решения для следующего $n$-мерного интегрального уравнения с монотонной и выпуклой нелинейностью:

$$Q(f(x_1,\ldots,x_n)) = \lambda(x_1,\ldots,x_n)\int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)f(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n,$$

$$(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}_{n},\quad \mathbb{R}:=(-\infty,+\infty),\quad n\geqslant 1, \tag{1}$$

относительно искомой функции $f(x_1,\ldots,x_n)$.

В уравнении (1) функция $\lambda$ определена на множестве $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) $1-\lambda\in C(\mathbb{R}^n)\bigcap L_1(\mathbb{R}^n)$, $\lambda(x_1,\ldots,x_n)\not\equiv 1$, $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$;

2) существуют непрерывные и монотонно возрастающие на множестве $\mathbb{R}^+ := [0,+\infty)$ функции $\{\lambda_j(u)\}_{j=1}^n$ со свойствами

$$0<\varepsilon_j\leqslant\lambda_j(u)\leqslant 1,\quad u\in\mathbb{R}^+,\quad \lim_{u\to+\infty}\lambda_j(u)=1,\quad 1-\lambda_j\in L_1(\mathbb{R}^+),\quad j=\overline{1,n},$$

причём такие, что имеет место двойное неравенство

$$\max\{\lambda_1(|x_1|),\ldots,\lambda_n(|x_n|)\}\leqslant\lambda(x_1,\ldots,x_n)\leqslant 1,\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Относительно ядра $K$ предполагается выполнение ограничений:

*I)* $K\in C_M(\mathbb{R}^n)\bigcap L_1(\mathbb{R}^n)$, $K(z_1,\ldots,z_n)\geqslant 0$, $(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{R}^n$,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} K(z_1,\ldots,z_n)\,dz_1\ldots dz_n = 1,$$

где $C_M(\mathbb{R}^n)$ – пространство непрерывных и ограниченных функций на множестве $\mathbb{R}^n$;

*II)* $K(z_1,\ldots,z_n)$ – чётная функция по каждому аргументу:

$$K(z_1,\ldots,z_n)=K(|z_1|,\ldots,|z_n|);$$

$III$) при каждом фиксированном $(z_1,\ldots,z_{j-1},z_{j+1},\ldots,z_n)\in\mathbb{R}^{n-1}$ функция $K(z_1,\ldots,z_n)$ монотонно убывает по $z_j$ на множестве $\mathbb{R}^+$, $j=\overline{1,n}$;

$IV$) сходятся следующие интегралы:

$$\int\limits_0^\infty uW_j(u)\,du<+\infty,\quad j=\overline{1,n},$$

где

$$W_j(u):=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots\widehat{dx_j}\ldots dx_n\,|_{x_j=u},\quad u\in\mathbb{R},\quad j=\overline{1,n},\tag{3}$$

а шапка над $dx_j$ выражения $dx_1\ldots\widehat{dx_j}\ldots dx_n$ означает, что интегрирование ведётся по всем переменным, кроме $x_j$.

Нелинейность $Q(u)$ – это непрерывная нечётная функция на множестве $\mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами (рис. 1):

$a$) существует число $\eta>0$ такое, что $Q(\eta)=\eta$ и $Q(u)$ монотонно возрастает на отрезке $[-\eta,\eta]$;

$b$) $Q(u)$ строго выпукла вниз на отрезке $[0,\eta]$;

$c$) уравнение $Q(u)=\varepsilon^2u$ имеет положительный корень $\xi$, где $\varepsilon:=\min\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}\in(0,1)$.

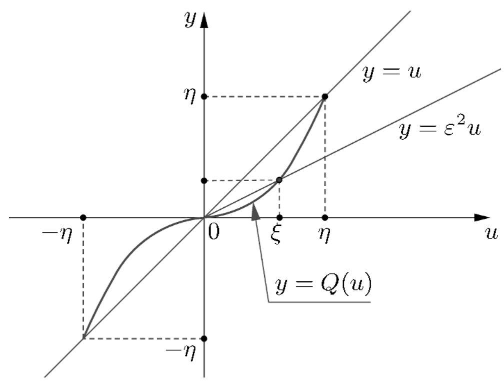


**Рис. 1.** График функции $y=Q(u)$.

Уравнение (1) встречается в различных областях современного естествознания. В частности, такие уравнения возникают в теории $p$-адических открыто-замкнутых струн для скалярного поля тахионов, в математической теории пространственно-временного распространения эпидемии (в рамках известной модели Дикмана–Капера) (см. работы [1–5]). Следует отметить, что соответствующий одномерный аналог уравнения (1) имеет приложения в теории переноса излучения в спектральных линиях и в кинетической теории газов (см. [6–8]). В одномерном случае $(n=1)$ уравнение (1) достаточно подробно исследовалось в работах [1, 2, 9–12], где в основном обсуждались вопросы существования, асимптотического поведения и единственности ограниченного решения. Соответствующее двумерное $(n=2)$ уравнение (1) изучалось в статье авторов [13] в случае, когда ядро $K$, помимо условий $I$)–$IV$), удовлетворяет следующему дополнительному ограничению:

$$K(A)+K(C)\geqslant K(B)+K(D),$$

где $A=(x-x',y-y')$, $B=(x+x',y-y')$, $C=(x+x',y+y')$, $D=(x-x',y+y')$, $x,x',y,y'\in\mathbb{R}^+$.

В данной работе доказана конструктивная теорема существования нетривиального знакопеременного ограниченного решения.

Ниже докажем существование нетривиального неотрицательного ограниченного и непрерывного решения $f$, более того, установим интегральную асимптотику $\eta-f\in L_1(\mathbb{R}^n)$ и с помощью этого результата докажем теорему единственности решения в специальном классе ограниченных на $\mathbb{R}^n$ функций, приведём прикладные примеры функций $\lambda$, $K$ и $Q$, удовлетворяющих всем условиям сформулированных и доказанных теорем.

**1. Существование неотрицательного нетривиального и ограниченного решения.**

**1.1. О вспомогательных одномерных нелинейных интегральных уравнениях на всей прямой.** Наряду с уравнением (1) рассмотрим следующие одномерные нелинейные интегральные уравнения на всей прямой:

$$Q(\varphi_i(x))=\lambda_i(|x|)\int\limits_{-\infty}^{\infty}W_i(x-t)\varphi_i(t)\,dt,\quad x\in\mathbb{R},\quad i=\overline{1,n},\tag{4}$$

относительно искомых измеримых и вещественнозначных функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$, где ядра $W_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, задаются посредством формулы (3), а функции $\lambda_i$, $i=\overline{1,n}$, определяются в условии 2). Из результатов работы [10] следует, что уравнения (4) имеют нечётные монотонно возрастающие непрерывные и ограниченные на $\mathbb{R}$ решения $\varphi_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, причём

$$\lim_{x\to\pm\infty}\varphi_i(x)=\pm\eta,\quad \eta\pm\varphi_i\in L_1(\mathbb{R}^{\mp}),\quad i=\overline{1,n},$$

$$\xi(1-e^{-p_ix})\leqslant\varphi_i(x)\leqslant\eta,\quad x\in\mathbb{R}^+,\quad i=\overline{1,n}, \tag{5}$$

где $\xi$ – единственный положительный корень уравнения $Q(u)=\varepsilon^2u$ (см. условие $c$)), а числа $\{p_i\}_{i=1}^n$ – единственные положительные решения следующих характеристических уравнений (рис. 2):

$$\int_0^\infty W_i(x)e^{-px}\,dx=\frac{\varepsilon}{2},\quad i=\overline{1,n}.$$

С использованием теоремы 3 из работы [14] несложно проверить также, что если для некоторого натурального $m>1$ выполняется условие

$$\int_0^\infty x^mW_i(x)\,dx<+\infty,\quad i=\overline{1,n},$$

то $x^{m-1}(\eta\pm\varphi_i)\in L_1(\mathbb{R}^{\mp})$, $i=\overline{1,n}$.

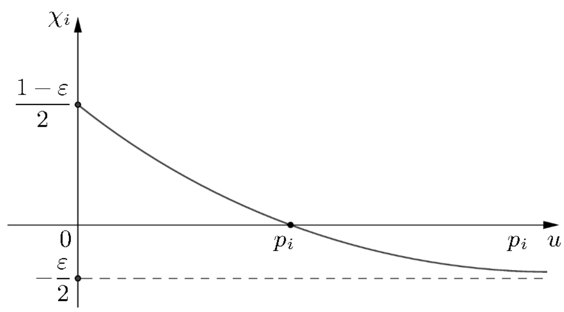


**Рис. 2.** График функции $\chi_i(u):=\int_0^\infty W_i(x)\times$ $\times\, e^{-ux}\,dx-\varepsilon/2$, $u\geqslant 0$, $i=\overline{1,n}$.

**1.2. Последовательные приближения для уравнения (1).** Введём следующие последовательные приближения для уравнения (1):

$$Q(f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))=\lambda(x_1,\ldots,x_n)\int_{\mathbb{R}^n}K(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)f_m(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n,$$

$$f_0(x_1,\ldots,x_n)\equiv\eta,\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\quad m=0,1,2,\ldots \tag{6}$$

Учитывая условия 1), 2), $I$) и $a$), индукцией по $m$ несложно доказать, что имеют место следующие свойства:

$A$) $f_m\in C(\mathbb{R}^n)$, $m=0,1,2,\ldots$

$B$) $f_m(x_1,\ldots,x_n)$ монотонно не возрастают по $m, (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$.

В силу выпуклости вниз функции $Q(u)$, неравенства (2), соотношений (3), (4) и неравенства Йенсена (см. [15, с. 254]), индукцией также можно получить оценку снизу для функций $f_m(x_1,\ldots,x_n)$:

$C$) $f_m(x_1,\ldots,x_n)\geqslant n^{-1}\sum_{j=1}^n|\varphi_j(x_j)|$, $m=0,1,2,\ldots$, $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$.

Следовательно, из $A$), $B$) и $C$) заключаем, что последовательность непрерывных функций $\{f_m(x_1,\ldots,x_n)\}_{m=0}^{\infty}$ имеет поточечный предел, когда $m\to\infty$ : $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_n)$. Воспользовавшись предельной теоремой Б. Леви (см. [16, с. 303]), можно убедиться, что $f(x_1,\ldots,x_n)$ является решением уравнения (1). Из свойств $B$) и $C$) получаем также следующую двустороннюю оценку для функции $f$:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|\varphi_j(x_j)| \leqslant f(x_1,\ldots,x_n) \leqslant \eta\lambda(x_1,\ldots,x_n), \quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n. \tag{7}$$

Учитывая нечётность функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n}$ на множестве $\mathbb{R}$, оценок (5) и (7), приходим к следующему неравенству снизу для функции $f(x_1,\ldots,x_n)$:

$$f(x_1,\ldots,x_n) \geqslant \xi\left(1-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}e^{-p_j|x_j|}\right), \quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n. \tag{8}$$

Так как свёртка ограниченных и суммируемых функций представляет непрерывную функцию (см. [17]), то в силу условия 1) из уравнения (1) заключаем, что $f\in C(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, сходимость последовательности непрерывных функций $\{f_m(x_1,\ldots,x_n)\}_{m=0}^{\infty}$ к предельной функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ равномерна на каждом компакте из $\mathbb{R}^n$.

На основе изложенного выше приходим к следующему результату:

**Теорема 1.** *При условиях 1), 2), I)–IV) и a)–c) уравнение (1) обладает неотрицательным, нетривиальным, ограниченным и непрерывным на множестве $\mathbb{R}^n$ решением $f(x_1,\ldots,x_n)$. Более того, для решения $f$ имеют место оценки (7) и (8).*

**2. Интегральная асимптотика решения.** Справедлива следующая

**Теорема 2.** *При условиях теоремы 1 решение уравнения (1), являющееся поточечным пределом последовательных приближений (6), обладает следующей интегральной асимптотикой: $\eta - f\in L_1(\mathbb{R}^n)$.*

**Доказательство.** Введём следующие подмножества множества $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{B}_j := \{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : |x_j|\leqslant 1\}, \quad j=1,2,\ldots,n. \tag{9}$$

С учётом оценки (5), свойств $A$), $B$) и $C$) для последовательности $\{f_m(x_1,\ldots,x_n)\}_{m=0}^{\infty}$ в силу обозначений (9) будем иметь

$$0<\delta_i := \frac{\xi}{n}(1-e^{-p_i}) \leqslant f_m(x_1,\ldots,x_n), \tag{10}$$

где $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\backslash\mathcal{B}_i$, $m=0,1,2,\ldots$, $i=\overline{1,n}$. С другой стороны, из выпуклости вниз функции $Q$ на отрезке $[0,\eta]$ немедленно приходим к оценкам (рис. 3)

$$0\leqslant Q(u)\leqslant u, \quad u\in[0,\eta], \tag{11}$$

$$\eta - Q(u) \geqslant \frac{\eta - Q(\delta_i)}{\eta-\delta_i}(\eta-u), \quad u\in[\delta_i,\eta], \quad i=\overline{1,n}, \tag{12}$$

где числа $\{\delta_i\}_{i=1}^{n}$ определяются по формуле (10), причём справедливы неравенства

$$0<\delta_i<\xi<\eta, \quad i=\overline{1,n}.$$

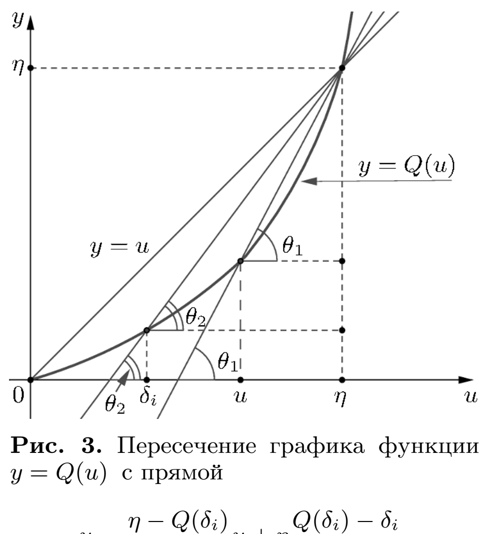

**Рис. 3.** Пересечение графика функции $y=Q(u)$ с прямой

$$y=\frac{\eta-Q(\delta_i)}{\eta-\delta_i}u+\eta\frac{Q(\delta_i)-\delta_i}{\eta-\delta_i}.$$

Сначала индукцией докажем, что

$$\eta - f_m\in L_1(\mathbb{R}^n), \quad m=0,1,2,\ldots$$

Действительно, при $m=0$ данное включение очевидно. Предположив, что $\eta - f_m \in L_1(\mathbb{R}^n)$ при некотором $m \in \mathbb{N}$, записав итерации (6) в виде

$$\eta - Q(f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n)) = \eta(1-\lambda(x_1,\ldots,x_n)) +$$

$$+\lambda(x_1,\ldots,x_n)\int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)(\eta - f_m(t_1,\ldots,t_n))\,dt_1\ldots dt_n,$$

$$f_0(x_1,\ldots,x_n)\equiv\eta,\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\quad m=0,1,2,\ldots, \tag{13}$$

и при этом учитывая условия 1), 2), $I)$ и $a)$, из (13) получаем, что

$$0\leqslant \eta - Q(f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\in L_1(\mathbb{R}^n). \tag{14}$$

В силу неравенства (11) и свойств $B)$, $C)$ приходим к неравенству

$$0\leqslant \eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n)\leqslant \eta - Q(f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n)),\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n. \tag{15}$$

Из (14) и (15) заключаем, что $\eta - f_{m+1}\in L_1(\mathbb{R}^n)$.

Проинтегрируем обе части (13) по $(x_1,\ldots,x_n)$ на $\mathbb{R}^n$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\eta - Q(f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n)))\,dx_1\ldots dx_n = \eta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(1-\lambda(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n +$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\lambda(x_1,\ldots,x_n)\int\limits_{\mathbb{R}^n}K(x_1-t_1,\ldots,x_n-t_n)(\eta - f_m(t_1,\ldots,t_n))\,dt_1\ldots dt_n\,dx_1\ldots dx_n. \tag{16}$$

Использовав теорему Фубини (см. [16, с. 317]), свойство $B)$ и неравенство (2), из равенства (16) получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\eta - Q(f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n)))\,dx_1\ldots dx_n\leqslant$$

$$\leqslant \eta\|1-\lambda\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} + \int\limits_{\mathbb{R}^n}(\eta - f_{m+1}(t_1,\ldots,t_n))\,dt_1\ldots dt_n. \tag{17}$$

С учётом (11) и (12) из неравенства (17) приходим к следующей оценке:

$$\frac{\eta - Q(\delta_i)}{\eta-\delta_i}\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\mathcal{B}_i}(\eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n + \int\limits_{\mathcal{B}_i}(\eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n\leqslant$$

$$\leqslant \eta\|1-\lambda\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} + \int\limits_{\mathbb{R}^n}(\eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n,\quad i=\overline{1,n},$$

или

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus\mathcal{B}_i}(\eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n\leqslant \frac{\eta(\eta-\delta_i)\|1-\lambda\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}}{\delta_i - Q(\delta_i)},\quad i=\overline{1,n}. \tag{18}$$

Оценим интегралы $\int_{\mathcal{B}_i}(\eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n$. В силу обозначения (9) и оценки (18) будем иметь

$$\int\limits_{\mathcal{B}_i}(\eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n =$$

$$
=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\underset{\uparrow i}{\int\limits_{-1}^{1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\eta-f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n=
$$

$$
=\underset{\uparrow 1}{\int\limits_{-1}^{1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\underset{\uparrow i}{\int\limits_{-1}^{1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\eta-f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n+
$$

$$
+\int\limits_{\mathbb{R}\backslash[-1,1]}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\underset{\uparrow i}{\int\limits_{-1}^{1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\eta-f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n\leqslant
$$

$$
\leqslant\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\eta-f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n+
$$

$$
+\int\limits_{\mathbb{R}^n\backslash\mathcal{B}_1}(\eta-f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n=
$$

$$
=\underset{\uparrow 1}{\int\limits_{-1}^{1}}\underset{\uparrow 2}{\int\limits_{-1}^{1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\underset{\uparrow i}{\int\limits_{-1}^{1}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\eta-f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n+
$$

$$
+\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{\mathbb{R}\backslash[-1,1]}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\eta-f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n+
$$

$$
+\int\limits_{\mathbb{R}^n\backslash\mathcal{B}_1}(\eta-f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n\leqslant
$$

$$
\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^n\backslash\mathcal{B}_1}(\eta-f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n+\int\limits_{\mathbb{R}^n\backslash\mathcal{B}_2}(\eta-f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n+
$$

$$
+\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\eta-f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n\leqslant\ldots\leqslant
$$

$$
\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\mathbb{R}^n\backslash\mathcal{B}_1}(\eta-f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n+\int\limits_{-1}^{1}\cdots\int\limits_{-1}^{1}(\eta-f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n\leqslant
$$

$$
\leqslant\eta\biggl(\|1-\lambda\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\sum_{i=1}^{n}\frac{\eta-\delta_i}{\delta_i-Q(\delta_i)}+2^n\biggr).
$$

Итак, для $\int_{\mathcal{B}_i}(\eta-f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n$ получаем следующую оценку сверху:

$$
\int\limits_{\mathcal{B}_i}(\eta-f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n\leqslant\eta\biggl(\|1-\lambda\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\sum_{i=1}^{n}\frac{\eta-\delta_i}{\delta_i-Q(\delta_i)}+2^n\biggr),\quad i=\overline{1,n}. \tag{19}
$$

Из оценок (18) и (19) сразу следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\eta - f_{m+1}(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant \eta\bigg(\frac{(\eta-\delta_i)\|1-\lambda\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}}{\delta_i - Q(\delta_i)} + \|1-\lambda\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \sum_{j=1}^n \frac{\eta-\delta_j}{\delta_j - Q(\delta_j)} + 2^n\bigg), \quad i=\overline{1,n}.$$

Следовательно, согласно теореме Б. Леви (см. [16, с. 303]) $\eta - f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ и для предельной функции $f$ имеет место неравенство сверху

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\eta - f(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant \eta\bigg(\frac{(\eta-\delta_i)\|1-\lambda\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}}{\delta_i - Q(\delta_i)} + \|1-\lambda\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \sum_{j=1}^n \frac{\eta-\delta_j}{\delta_j - Q(\delta_j)} + 2^n\bigg), \quad i=\overline{1,n}. \tag{20}$$

Теорема доказана.

**Замечание.** Из полученной оценки (20), в частности, следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\eta - f(x_1,\ldots,x_n))\,dx_1\ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant \eta\bigg(\frac{(\eta-\delta^*)\|1-\lambda\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}}{\delta^* - Q(\delta^*)} + n\|1-\lambda\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \frac{\eta-\tilde\delta}{\tilde\delta - Q(\tilde\delta)} + 2^n\bigg), \tag{21}$$

где $\delta^* := \max\{\delta_1,\ldots,\delta_n\}$, $\tilde\delta := \min\{\delta_1,\ldots,\delta_n\}$.

Действительно, если мы докажем, что функция

$$\chi(u) := \frac{\eta - u}{u - Q(u)}$$

монотонно невозрастающая на интервале $(0,\eta)$, то из (20) сразу получим оценку (21). Пусть $u_1, u_2 \in (0,\eta)$, $u_1 > u_2$, – произвольные элементы. Тогда, в силу монотонности и выпуклости функции $Q$, будем иметь

$$\chi(u_1) - \chi(u_2) =$$

$$= \frac{\eta(u_2-u_1) + (\eta-u_2)Q(u_1) - (\eta-u_1)Q(u_2)}{(u_1 - Q(u_1))(u_2 - Q(u_2))} \leqslant 0,$$

так как (рис. 4)

$$\frac{Q(u_1)}{Q(u_2)} = \frac{u_1 - c_0}{u_2 - c_0} < \frac{\eta - u_1}{\eta - u_2}.$$

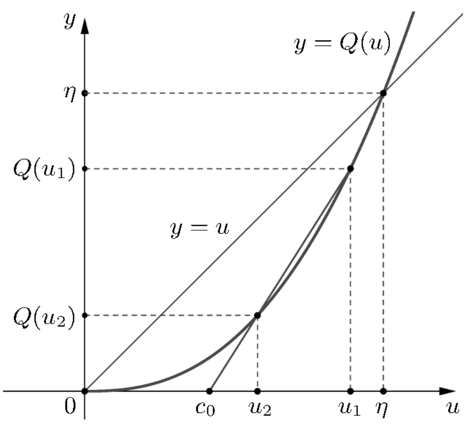


**Рис. 4.** Пересечение графика функции $y = Q(u)$ с прямой

$$y = \frac{Q(u_1)-Q(u_2)}{u_1-u_2}u + \frac{Q(u_2)u_1 - Q(u_1)u_2}{u_1-u_2}.$$

**3. О единственности решения уравнения (1).** Имеет место следующая

**Теорема 3.** *При условиях теоремы 1 уравнение (1) в классе ограниченных на $\mathbb{R}^n$ и положительных на $\mathbb{R}^n \setminus (0,\ldots,0)$ функций*

$$\mathfrak{M} := \{f \in M(\mathbb{R}^n) : f(x_1,\ldots,x_n) > 0, \quad (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus (0,\ldots,0), \quad \eta - f \in L_1(\mathbb{R}^n)\}$$

*не может иметь более одного решения. Здесь $M(\mathbb{R}^n)$ – пространство ограниченных функций на множестве $\mathbb{R}^n$.*

**Доказательство.** Предположим противное. Пусть уравнение (1) имеет два разных решения $f$ и $\tilde{f}$ из класса $\mathfrak{M}$. Так как $f, \tilde{f} \in M(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in C(\mathbb{R}^n)$, $K \in L_1(\mathbb{R}^n)$ и свёртка ограниченных и суммируемых функций является непрерывной функцией, то из (1) получаем, что $f, \tilde{f} \in C(\mathbb{R}^n)$.

Поскольку $f(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv \tilde{f}(x_1, \ldots, x_n)$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, то существует точка $\mathrm{x}_0 :=$ $:= (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ такая, что $f(\mathrm{x}_0) \neq \tilde{f}(\mathrm{x}_0)$. В силу непрерывности функций $f$ и $\tilde{f}$ на $\mathbb{R}^n$ существует окрестность $U_{\mathrm{x}_0}(\delta)$ точки $\mathrm{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ такая, что $f(\mathrm{x}) \neq \tilde{f}(\mathrm{x})$, $\mathrm{x} \in U_{\mathrm{x}_0}(\delta)$. Не умаляя общности, можно считать, что $(0, \ldots, 0) \notin U_{\mathrm{x}_0}(\delta)$.

Введём в рассмотрение измеримое множество $E := \{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathrm{x}) \neq \tilde{f}(\mathrm{x}), \ f, \tilde{f} \in \mathfrak{M}\}$. Очевидно, что $U_{\mathrm{x}_0}(\delta) \subset E$ и, следовательно, $\operatorname{mes} E \geqslant \operatorname{mes}(U_{\mathrm{x}_0}(\delta)) > 0$.

Оценим теперь следующую разность:

$$|Q(f(x_1, \ldots, x_n)) - Q(\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n))| \leqslant \lambda(x_1, \ldots, x_n) \times$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^n} K(x_1 - t_1, \ldots, x_n - t_n)|f(t_1, \ldots, t_n) - \tilde{f}(t_1, \ldots, t_n)|\, dt_1 \ldots dt_n, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{22}$$

Так как $f, \tilde{f} \in \mathfrak{M}$, то очевидно, что $f - \tilde{f} \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, в силу условий $I)$ и 2) правая часть неравенства (22) принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}^n)$. Умножим обе части (22) на ограниченную функцию $f(x_1, \ldots, x_n)/\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ и проинтегрируем полученное неравенство по $(x_1, \ldots, x_n)$ на $\mathbb{R}^n$. Тогда, учитывая условие $II)$ и неравенство (2), согласно теореме Фубини (см. [16, с. 317]) приходим к неравенству

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Q(f(x_1, \ldots, x_n)) - Q(\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n))| f(x_1, \ldots, x_n)/\lambda(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n) \int_{\mathbb{R}^n} K(x_1 - t_1, \ldots, x_n - t_n)|f(t_1, \ldots, t_n) - \tilde{f}(t_1, \ldots, t_n)|\, dt_1 \ldots dt_n\, dx_1 \ldots dx_n =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(t_1, \ldots, t_n) - \tilde{f}(t_1, \ldots, t_n)| \int_{\mathbb{R}^n} K(t_1 - x_1, \ldots, t_n - x_n) f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n\, dt_1 \ldots dt_n =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} |f(t_1, \ldots, t_n) - \tilde{f}(t_1, \ldots, t_n)| Q(t_1, \ldots, t_n)/\lambda(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n$$

или к аналогичному неравенству

$$\mathcal{J} := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\lambda(x_1, \ldots, x_n)} (|Q(f(x_1, \ldots, x_n)) - Q(\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n))| f(x_1, \ldots, x_n) -$$
$$- |f(x_1, \ldots, x_n) - \tilde{f}(x_1, \ldots, x_n)| Q(f(x_1, \ldots, x_n)))\, dx_1 \ldots dx_n \leqslant 0.$$

Из свойств $a)$, $b)$ функции $Q$ немедленно следует, что

$$\mathcal{J} = \int_{E} \frac{1}{\lambda(x_1, \ldots, x_n)} f(x_1, \ldots, x_n)|f(x_1, \ldots, x_n) - \tilde{f}(x_1, \ldots, x_n)| \times$$
$$\times \left( \frac{|Q(f(x_1, \ldots, x_n)) - Q(\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n))|}{|f(x_1, \ldots, x_n) - \tilde{f}(x_1, \ldots, x_n)|} - \frac{Q(f(x_1, \ldots, x_n))}{f(x_1, \ldots, x_n)} \right) dx_1 \ldots dx_n \leqslant 0.$$

Далее, используя легко проверяемое неравенство

$$\frac{|Q(f(x_1, \ldots, x_n)) - Q(\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n))|}{|f(x_1, \ldots, x_n) - \tilde{f}(x_1, \ldots, x_n)|} > \frac{Q(f(x_1, \ldots, x_n))}{f(x_1, \ldots, x_n)}, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in E$$

(вытекающее из выпуклости вниз функции $Q$), приходим к противоречию. Следовательно, $f(x_1,\ldots,x_n)=\tilde f(x_1,\ldots,x_n)$, $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. Теорема доказана.

**4. Примеры функций $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{Q}$.** Приведём несколько примеров функций $\lambda$, $K$ и $Q$, имеющих и прикладной, и теоретический интерес.

**Примеры функции $\boldsymbol{\lambda}$.** Приведём примеры функций $\{\lambda_j(u)\}_{j=1}^n$. Прямой проверкой можно убедиться, что функции $\lambda_j(u)=1-(1-\varepsilon_j)e^{-u}$, $u\in\mathbb{R}^+$, $j=\overline{1,n}$, удовлетворяют всем свойствам, перечисленным в условии 2). Тогда примером для $\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ может служить функция

$$\lambda(x_1,\ldots,x_n)=1-re^{-(|x_1|+\ldots+|x_n|)},\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n,$$

где $r:=\min\{1-\varepsilon_1,\ldots,1-\varepsilon_n\}$.

Действительно, во-первых, очевидно, что

$$1-\lambda\in C(\mathbb{R}^n)\bigcap L_1(\mathbb{R}^n),\quad \lambda(x_1,\ldots,x_n)\not\equiv 1,\quad \lambda(x_1,\ldots,x_n)\leqslant 1,\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Проверим левую часть неравенства (2). Имеем

$$\lambda(x_1,\ldots,x_n)\geqslant 1-(1-\varepsilon_j)e^{-(|x_1|+\ldots+|x_n|)}\geqslant 1-(1-\varepsilon_j)e^{-|x_j|},\quad j=\overline{1,n}.$$

Следовательно,

$$\lambda(x_1,\ldots,x_n)\geqslant\max\{1-(1-\varepsilon_1)e^{-|x_1|},\ldots,1-(1-\varepsilon_n)e^{-|x_n|}\},\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Отметим, что если в качестве функций $\{\lambda_j(u)\}_{j=1}^n$ выбрать частные примеры $\lambda_j(u)=1-$ $-(1-\varepsilon_j)e^{-u^2}$, $j=\overline{1,n}$, то функция $\lambda(x_1,\ldots,x_n)$ может иметь следующую структуру:

$$\lambda(x_1,\ldots,x_n)=1-re^{-(x_1^2+\ldots+x_n^2)},\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

**Примеры ядра $\boldsymbol{K}$.** В приложениях часто встречаются следующие частные примеры ядра $K$ (см. работы [1–5]):

$k_1)$ $K(x_1,\ldots,x_n)=\pi^{-n/2}e^{-(x_1^2+\ldots+x_n^2)}$, $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$;

$k_2)$ $K(x_1,\ldots,x_n)=2^{-n}e^{-(|x_1|+\ldots+|x_n|)}$, $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$;

$k_3)$ $K(x_1,\ldots,x_n)=\int_a^b e^{-(|x_1|+\ldots+|x_n|)s}G(s)\,ds$, $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, где $G(s)$ – положительная непрерывная функция на интервале $[a,b)$, $0<a<b\leqslant+\infty$, причём

$$\int\limits_a^b\frac{G(s)}{s^n}\,ds=\frac{1}{2^n}.$$

Несложно проверить, что для примеров $k_1)$–$k_3)$ автоматически выполняются все условия $I)$–$IV)$.

**Примеры нелинейности $\boldsymbol{Q}$.** Примерами нелинейности $Q$ могут служить функции:

$q_1)$ $Q(u)=u^p$, $u\in\mathbb{R}$, где $p>2$ – нечётное число;

$q_2)$ $Q(u)=au^p+(1-a)u$, $u\in\mathbb{R}$, где $a\in(0,1]$ – числовой (физический) параметр, $p>2$ – нечётное число;

$q_3)$ $Q(u)=\begin{cases}\ln\dfrac{\gamma}{\gamma-u}, & \text{если } u\geqslant 0,\\ \ln\dfrac{\gamma+u}{\gamma}, & \text{если } u<0,\end{cases}$ где $\gamma>1$ – числовой параметр.

Отметим, что уравнения с нелинейностями $q_1)$, $q_2)$ и с ядром вида $k_1)$ встречаются в динамической теории $p$-адических открыто-замкнутых струн (см. [1–3]), а с нелинейностями вида $q_3)$, $q_1)$ (с ядрами $k_2)$, $k_3)$) – в математической биологии и в кинетической теории газов (см. [4, 5, 7, 8]).

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке Республики Армения (проект 21T-1A047).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Владимиров В.С., Волович Я.И.* О нелинейном уравнении динамики в теории $p$-адической струны // Журн. теор. и мат. физики. 2004. Т. 138. № 3. С. 355–368.
2. *Хачатрян Х.А.* О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории $p$-адической струны // Изв. РАН. Сер. мат. 2018. Т. 82. № 2. С. 172–193.
3. *Brekke L., Freund P.G.O., Olson M., Witten E.* Non-archimedean string dynamics // Nucl. Phys. B. V. 302. № 3. P. 365–402.
4. *Diekmann O.* Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection // J. Math. Biol. 1978. V. 6. № 2. P. 109–130.
5. *Diekmann O., Kaper H.G.* On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation // Nonlin. Anal. 1978. V. 2. № 6. P. 721–737.
6. *Енгибарян Н.Б.* Об одной задаче нелинейного переноса излучения // Астрофизика. 1966. Т. 2. № 1. С. 31–36.
7. *Cercignani C.* The Boltzmann Equation and its Applications. New York, 1988.
8. *Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А.* О разрешимости нелинейного модельного уравнения Больцмана в задаче плоской ударной волны // Журн. теор. и мат. физики. 2016. Т. 189. № 2. С. 239–255.
9. *Diekmann O.* Run for your life. A note on the asymptotic speed of propagation of an epidemic // J. of Differ. Equat. 1979. V. 33. № 1. P. 58–73.
10. *Хачатрян Х.А.* О разрешимости одной граничной задачи в $p$-адической теории струн // Тр. Моск. мат. о-ва. 2018. Т. 79. № 1. С. 117–132.
11. *Khachatryan Kh.A., Petrosyan H.S.* Integral equations on the whole line with monotone nonlinearity and difference kernel // J. of Math. Sci. 2021. V. 255. № 6. P. 790–804.
12. *Владимиров В.С.* О решениях $p$-адических струнных уравнений // Журн. теор. и мат. физики. 2011. Т. 167. № 2. С. 163–170.
13. *Хачатрян Х.А., Петросян А.С.* О знакопеременных и ограниченных решениях одного класса нелинейных двумерных интегральных уравнений типа свертки // Тр. Моск. мат. о-ва. 2021. Т. 82. № 2. С. 313–327.
14. *Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А., Петросян А.С.* Асимптотическое поведение решения для одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в задаче распределения дохода // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27. № 1. С. 188–206.
15. *Зорич В.А.* Математический анализ. Т. 1. М., 1981.
16. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1976.
17. *Рудин У.* Функциональный анализ. М., 1975.


Ереванский государственный университет,
Армения,
Национальный аграрный университет Армении,
г. Ереван

Поступила в редакцию 13.01.2022 г.
После доработки 21.04.2022 г.
Принята к публикации 21.04.2022 г.