ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 5, с. 696–702

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.954+517.988.8

СХОДИМОСТЬ В СИЛЬНЫХ НОРМАХ ПОГРЕШНОСТИ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА СО СХЕМОЙ КРАНКА–НИКОЛСОН ПО ВРЕМЕНИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ УСЛОВИЕМ НА РЕШЕНИЕ

© 2022 г. А. С. Бондарев

В сепарабельном гильбертовом пространстве гладко разрешимое линейное вариационное параболическое уравнение с периодическим условием на решение решается приближённо проекционно-разностным методом. Дискретизация задачи по пространству проводится методом Галёркина, а по времени – с использованием схемы Кранка–Николсон. В работе установлены эффективные по времени и по пространству оценки в сильных нормах погрешности приближённых решений. Эти оценки позволяют получить скорость сходимости погрешности по времени к нулю вплоть до второго порядка. Кроме того, оценки погрешности учитывают аппроксимационные свойства проекционных подпространств, что проиллюстрировано на подпространствах типа конечных элементов.

DOI: 10.31857/S0374064122050090, EDN: CBQGWG

1. Постановка задачи и вспомогательные результаты. Пусть даны вложенные сепарабельные гильбертовы пространства $V \subset H \subset V'$, где пространство V' – двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным. Оба вложения плотны и непрерывны. Рассмотрим полуторалинейную по $u, v \in V$ форму $a(u,v)$. Пусть для $u, v \in V$ выполняются условия

$$|a(u,v)| \leqslant \mu \|u\|_V \|v\|_V, \quad \operatorname{Re} a(u,u) \geqslant \alpha \|u\|_V^2, \tag{1}$$

где α и μ – положительные числа. Форма $a(u,v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A : V \to V'$ такой, что $(Au, v) = a(u,v)$, где выражение типа (z,v) есть значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Если $z \in H$, то (z,v) – скалярное произведение в пространстве H [1, гл. 2].

Рассмотрим в V' на отрезке $[0,T]$ параболическую задачу

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad u(0) = u(T). \tag{2}$$

Здесь и далее производные функций понимаются в обобщённом смысле. В монографии [2, с. 289] показано, что для заданного $f \in L_2(0,T;V')$ существует (и притом единственное) решение $u \in L_2(0,T;V) \bigcap C([0,T],H)$, $u' \in L_2(0,T;V')$ задачи (2), называемое слабым решением.

Далее будем считать, что выполнены условия гладкой разрешимости, т.е. справедлива следующая теорема (см. работу [3]).

Теорема 1.1. *Пусть вложение $V \subset H$ компактно, а форма $a(u,v)$ удовлетворяет требованиям (1). Пусть функция $t \to f(t) \in V'$ дифференцируема, $f' \in L_2(0,T;V')$, и выполняется равенство $f(0) = f(T)$. Тогда слабое решение задачи (2) будет таким, что $u' \in L_2(0,T;V) \bigcap C([0,T],H)$, $u'' \in L_2(0,T;V')$, причём справедлива оценка*

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u'(t)\|_H^2 + \int_0^T \|u''(t)\|_{V'}^2\, dt + \int_0^T \|u'(t)\|_V^2\, dt \leqslant C\biggl(\int_0^T \|f'(t)\|_{V'}^2\, dt + \int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\, dt\biggr).$$

В настоящей работе задача (2) решается полностью дискретным проекционно-разностным методом с использованием метода Галёркина по пространству и схемы Кранка–Николсон по времени. Обратим внимание, что в похожей ситуации сходимость проекционно-разностного метода в более слабых, чем в настоящей работе, нормах изучалась в [4, 5]. В работе [4] была установлена среднеквадратичная оценка погрешности приближённых решений. В статье [5] оценка погрешности для уравнения задачи (2) получена в энергетической норме. В данной работе в предположениях гладкой разрешимости задачи (2) получены оценки в сильных нормах погрешности приближённого решения.

Заметим, что в случае когда для уравнения задачи (2) рассматривается задача Коши оценки в сильных нормах погрешности для проекционно-разностного метода со схемой Кранка–Николсон по времени были установлены в работе [6].

Перейдём к описанию приближённой задачи. Пусть V_h, где h – положительный параметр, есть конечномерное подпространство пространства V. Определим пространство V_h', задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму $\|u_h\|_{V_h'} = \sup|(u_h, v_h)|$, где точная верхняя граница берётся по всем $v_h \in V_h$, $\|v_h\|_V = 1$. Отметим, что справедливо неравенство $\|u_h\|_{V_h'} \leqslant \|u_h\|_{V'}$.

Пусть P_h – ортопроектор в пространстве H на V_h. Как замечено в работе [7], оператор P_h допускает расширение по непрерывности до $\overline{P_h} : V' \to V_h'$, причём для $u \in V'$ справедливо условие $\|\overline{P_h}u\|_{V_h'} \leqslant \|u\|_{V'}$. Отметим для $u \in V'$ и $v \in V$ важное соотношение $(\overline{P_h}u, v) = (u, P_h v)$, полученное в работе [8].

Для построения приближённых решений возьмём равномерное разбиение $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T$ отрезка $[0, T]$, где $N \in \mathbb{N}$. В подпространстве $V_h \subset V$ рассмотрим периодическую разностную задачу: для $k = \overline{1, N}$

$$(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} + \overline{P_h}A(u_k^h + u_{k-1}^h)/2 = f_k^h, \quad u_0^h = u_N^h, \tag{3}$$

где $\tau N = T$, $t_k = k\tau$, $u_k^h \in V_h$, элементы $f_k^h \in V_h$ определим позже.

Однозначная разрешимость задачи (3) установлена в работе [4].

Далее будем предполагать, что форма $a(u, v)$ является симметричной, т.е. $a(u, v) = \overline{a(v, u)}$, где черта над комплексным числом означает переход к сопряжённому числу.

Определим гильбертово пространство

$$V(A) = \{u, v \in V : (u, v)_{V(A)} = a(u, v)\}.$$

Очевидно, что нормы в пространствах V и $V(A)$ эквивалентны.

Приведём необходимую в дальнейшем оценку из работы [9] для $u \in V$:

$$\|[I - Q_h(A)]u\|_V \leqslant \alpha^{-1/2}\|[I - Q_h(A)]u\|_{V(A)} \leqslant \alpha^{-1/2}\mu^{1/2}\|(I - Q_h)u\|_V, \tag{4}$$

где $Q_h(A)$ – ортопроектор в $V(A)$ на V_h, а Q_h – ортопроектор в V на V_h.

Лемма 1.1. *Для решения $(u_0^h, u_1^h, \ldots, u_N^h)$ задачи (3) справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^{N} \|(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_H^2 \tau \leqslant \sum_{k=1}^{N} \|f_k^h\|_H^2 \tau. \tag{5}$$

Доказательство. Умножим уравнение задачи (3) скалярно в пространстве H на $(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}$:

$$\|(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_H^2 + (2\tau)^{-1}(A(u_k^h + u_{k-1}^h), u_k^h - u_{k-1}^h) = (f_k^h, (u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}). \tag{6}$$

Рассмотрим второе слагаемое в выражении (6):

$$(2\tau)^{-1}(A(u_k^h + u_{k-1}^h), u_k^h - u_{k-1}^h) = (2\tau)^{-1}(a(u_k^h, u_k^h) - a(u_{k-1}^h, u_{k-1}^h) + 2i\,\mathrm{Im}\,a(u_{k-1}^h, u_k^h)), \tag{7}$$

где i – мнимая единица.

Возьмём от равенства (6) удвоенную вещественную часть. Учитывая (7), получаем

$$2\|(u_k^h-u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_H^2+\tau^{-1}a(u_k^h,u_k^h)-\tau^{-1}a(u_{k-1}^h,u_{k-1}^h)=2\operatorname{Re}(f_k^h,(u_k^h-u_{k-1}^h)\tau^{-1}).$$

Оценим правую часть последнего равенства:

$$2\operatorname{Re}(f_k^h,(u_k^h-u_{k-1}^h)\tau^{-1})\leqslant\|f_k^h\|_H^2+\|(u_k^h-u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_H^2.$$

Тогда

$$\|(u_k^h-u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_H^2+\tau^{-1}a(u_k^h,u_k^h)-\tau^{-1}a(u_{k-1}^h,u_{k-1}^h)\leqslant\|f_k^h\|_H^2.$$

Умножим на τ и просуммируем последние неравенства по $k=\overline{1,N}$. Учитывая периодическое условие, получаем необходимую оценку (5). Лемма доказана.

Лемма 1.2. *Для решения* $(u_0^h,u_1^h,\ldots,u_N^h)$ *задачи (3) справедлива оценка*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\|\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2\leqslant C\sum_{k=1}^N\|f_k^h\|_H^2. \tag{8}$$

Доказательство. В работе [9] для произвольных $v_h^k\in V_h$, где $k=\overline{0,N}$ и $N\tau=T$, получена оценка

$$\max_{0\leqslant k\leqslant N}\|v_k^h\|_V^2\leqslant K\left[\sum_{k=1}^N\Big(\|\overline{P_h}Av_{k-1}^h\|_H^2+\|\overline{P_h}Av_k^h\|_H^2\Big)\tau+\sum_{k=1}^N\left\|\frac{v_k^h-v_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\right]. \tag{9}$$

По решению $(u_0^h,u_1^h,\ldots,u_N^h)$ задачи (3) определим элемент $u_{-1}^h=u_{N-1}^h$. Положим $v_k^h=(u_k^h+{}$ ${}+u_{k-1}^h)/2$ для $k=\overline{1,N}$ и соответственно получим $v_0^h=(u_0^h+u_{-1}^h)/2=(u_N^h+u_{N-1}^h)/2=v_N^h$. К элементам v_k^h применим оценку (9):

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\|\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2\leqslant K\left[\sum_{k=1}^N\left(\left\|\overline{P_h}A\frac{u_{k-1}^h+u_{k-2}^h}{2}\right\|_H^2+\left\|\overline{P_h}A\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_H^2\right)\tau+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^N\left\|\left(\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}-\frac{u_{k-1}^h+u_{k-2}^h}{2}\right)\tau^{-1}\right\|_H^2\tau\right]. \tag{10}$$

Так как $(u_0^h+u_{-1}^h)/2=(u_N^h+u_{N-1}^h)/2$, то справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^N\left\|\overline{P_h}A\frac{u_{k-1}^h+u_{k-2}^h}{2}\right\|_H^2\tau=\sum_{k=1}^N\left\|\overline{P_h}A\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_H^2\tau.$$

Из задачи (3) следует выполнение неравенства

$$\left\|\overline{P_h}A\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_H^2\tau\leqslant 2\|f_k^h\|_H^2\tau+2\left\|\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau.$$

Теперь рассмотрим

$$\sum_{k=1}^N\left\|\left(\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}-\frac{u_{k-1}^h+u_{k-2}^h}{2}\right)\tau^{-1}\right\|_H^2\tau\leqslant\frac12\sum_{k=1}^N\left\|\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau+\frac12\sum_{k=1}^N\left\|\frac{u_{k-1}^h-u_{k-2}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau.$$

Здесь $(u_0^h-u_{-1}^h)\tau^{-1}=(u_N^h-u_{N-1}^h)\tau^{-1}$. Отсюда следует равенство

$$\sum_{k=1}^N\left\|\frac{u_{k-1}^h-u_{k-2}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau=\sum_{k=1}^N\left\|\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau.$$

В результате из неравенства (10) получается оценка

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\|\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2\leqslant C\left\{\sum_{k=1}^N\|f_k^h\|_H^2\tau+\sum_{k=1}^N\left\|\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\right\}.$$

Оценка леммы (8) следует теперь из соотношения (5). Лемма доказана.

2. Оценки погрешности. Положим далее $f_k^h=\overline{P_h}[f(t_k)+f(t_{k-1})]/2.$

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия гладкой разрешимости задачи (2) и форма $a(u,v)$ обладает свойством симметричности. Пусть $u(t)$ – решение задачи (2), а $(u_0^h,u_1^h,\ldots,u_N^h)$ – решение задачи (3). Тогда справедлива оценка*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2+\sum_{k=1}^N\left\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\leqslant$$

$$\leqslant M\left[\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|(I-Q_h)u(t)\|_V^2+\int\limits_0^T\|(I-Q_h(A))u'(t)\|_H^2\,dt+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^N\frac{1}{\tau}\left\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}P_h\left(\frac{u'(t_k)+u'(t_{k-1})}{2}-u'(t)\right)dt\right\|_H^2\right].\tag{11}$$

Доказательство. Обозначим $z_k^h=Q_h(A)u(t_k)-u_k^h.$ Из задач (2) и (3) получим

$$\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}+\overline{P_h}A\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}=\overline{P_h}AQ_h(A)\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}+Q_h(A)\frac{u(t_k)-u(t_{k-1})}{\tau}-f_k^h.\tag{12}$$

Воспользуемся равенством (14) из работы [6]: $\overline{P_h}Au=\overline{P_h}AQ_h(A)u,$ справедливым для всех $u\in V.$

Из уравнений (2) и задания f_k^h следует, что

$$f_k^h=P_h[u'(t_k)+u'(t_{k-1})]/2+\overline{P_h}A[u(t_k)+u(t_{k-1})]/2.$$

Тогда формула (12) преобразуется к виду

$$\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}+\overline{P_h}A\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}=Q_h(A)\frac{u(t_k)-u(t_{k-1})}{\tau}-P_h\frac{u'(t_k)+u'(t_{k-1})}{2}=$$

$$=\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[I-Q_h(A)]u'(t)\,dt+\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}P_h\left(\frac{u'(t_k)+u'(t_{k-1})}{2}-u'(t)\right)dt.\tag{13}$$

Применим к соотношению (13) оценки (5) и (8). В результате получим

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\|\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2+\sum_{k=1}^N\left\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\leqslant$$

$$\leqslant M\left[\int\limits_0^T\|[I-Q_h(A)]u'(t)\|_H^2dt+\sum_{k=1}^N\frac{1}{\tau}\left\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}P_h\left(\frac{u'(t_k)+u'(t_{k-1})}{2}-u'(t)\right)dt\right\|_H^2\right].\tag{14}$$

Заметим, что

$$\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}=[I-Q_h(A)]\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}+\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2},$$

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}=\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}+\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[I-Q_h(A)]u'(t)\,dt.$$

Отсюда имеем

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2+\sum_{k=1}^N\left\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\leqslant$$

$$\leqslant 2\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\|\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2+2\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\|[I-Q_h(A)]\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}\right\|_V^2+$$

$$+2\sum_{k=1}^N\left\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau+2\sum_{k=1}^N\left\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[I-Q_h(A)]u'(t)\,dt\right\|_H^2\tau\leqslant$$

$$\leqslant 2\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\|\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2+2\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|[I-Q_h(A)]u(t)\|_V^2+2\sum_{k=1}^N\left\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau+$$

$$+\int\limits_0^T\|[I-Q_h(A)]u'(t)\|_H^2dt.$$

Из последнего неравенства с учётом соотношений (4) и (14) следует оценка (11). Теорема доказана.

Приведём оценки погрешности, следующие из неравенства (11) с порядком сходимости по времени и по пространству. Введём в рассмотрение множество $D(A)=\{u\in V: Au\in H\}$. Пусть существует гильбертово пространство E такое, что $D(A)\subset E\subset V$ и выполняется типичная для эллиптических операторов оценка

$$\|v\|_E\leqslant\delta\|Av\|_H\quad (v\in D(A)),\tag{15}$$

где $\delta\geqslant 0$. Например, если параболическое уравнение в области Ω определено равномерно эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка и краевым условием Дирихле, то рассматриваем пространства $H=L_2(\Omega)$, $V=\mathring{W}_2^1(\Omega)$, $V'=W_2^{-1}(\Omega)$, $E=W_2^2(\Omega)\bigcap\mathring{W}_2^1(\Omega)$ [2, с. 275]. Если же на границе области Ω задаётся условие Неймана, то пространства следующие: $H=L_2(\Omega)$, $V=W_2^1(\Omega)$, $E=W_2^2(\Omega)$ [2, с. 276].

Пусть подпространства V_h обладают аппроксимационным свойством

$$\|(I-Q_h)v\|_V\leqslant rh\|v\|_E\quad (v\in E),\tag{16}$$

типичным для подпространств типа конечных элементов [10, гл. 3]. Здесь $r>0$ и не зависит от v и h. В простейшем одномерном случае, когда $V=W_2^1(a,b)$ либо $V=\mathring{W}_2^1(a,b)$, а пространство $H=L_2(a,b)$, в качестве подпространств V_h могут быть взяты подпространства кусочно-линейных на $[a,b]$ функций [10, с. 100–103].

В работе [11] показано, что из условий (15) и (16) для $v\in V$ следует оценка (аналог леммы Обэна–Нитше)

$$\|[I-Q_h(A)]v\|_H\leqslant r\mu\delta^{-1}h\|(I-Q_h)v\|_V.\tag{17}$$

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1 и условие (15). Пусть решение $u(t)$ задачи (2) такое, что $u \in C([0,T],E)$. Пусть подпространства V_h обладают свойством (16).*

Тогда в случае $u'' \in L_p(0,T;H)$ для значений $1 \leqslant p \leqslant 2$ справедлива оценка

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2+$$
$$+\sum_{k=1}^N\left\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau+\sum_{k=1}^N\left\|u'(t_k)-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\leqslant$$
$$\leqslant C\left[\tau^{3-2/p}\left(\int\limits_0^T\|u''(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p}+h^2\left(\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt+\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_E^2\right)\right]. \tag{18}$$

Если же решение $u(t)$ задачи (2) таково, что $u''' \in L_p(0,T;H)$ для $1 \leqslant p \leqslant 2$, то справедлива оценка

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\left\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2+\sum_{k=1}^N\left\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\leqslant$$
$$\leqslant C\left[\tau^{5-2/p}\left(\int\limits_0^T\|u'''(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p}+h^2\left(\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt+\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_E^2\right)\right]. \tag{19}$$

Доказательство. Воспользуемся равенством (2.11) из работы [12]:

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\frac{u'(t_k)+u'(t_{k-1})}{2}-u'(t)\right)dt=\frac{1}{2}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(2t-t_{k-1}-t_k)u''(t)\,dt. \tag{20}$$

Из неравенства $|2t-t_{k-1}-t_k| \leqslant \tau$ для $t \in [t_{k-1},t_k]$ получим

$$\sum_{k=1}^N\frac{1}{\tau}\left\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}P_h\left(\frac{u'(t_k)+u'(t_{k-1})}{2}-u'(t)\right)dt\right\|_H^2\leqslant\frac{\tau^{3-2/p}}{4}\left(\int\limits_0^T\|u''(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p}. \tag{21}$$

Обоснование оценки третьего слагаемого в левой части неравенства (18) проводится как в работе [9, теорема 3]. Теперь оценка (18) следует из условия (11) с учётом неравенств (16), (17) и (21).

Из равенства

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\frac{u'(t_k)+u'(t_{k-1})}{2}-u'(t)\right)dt=\frac{1}{8}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[\tau^2-(2t-t_{k-1}-t_k)^2]u'''(t)\,dt,$$

полученного из выражения (20) путём интегрирования по частям, и оценки $|\tau^2-(2t-t_{k-1}-t_k)^2| \leqslant \tau^2$ для $t \in [t_{k-1},t_k]$ следует неравенство

$$\sum_{k=1}^N\frac{1}{\tau}\left\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}P_h\left(\frac{u'(t_k)+u'(t_{k-1})}{2}-u'(t)\right)dt\right\|_H^2\leqslant\frac{\tau^{5-2/p}}{64}\left(\int\limits_0^T\|u'''(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p},$$

что вместе с оценками (16) и (17) доказывает неравенство (19). Следствие доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Обэн Ж.-П.* Приближённое решение эллиптических краевых задач. М., 1977.
2. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.
3. *Бондарев А.С.* Разрешимость вариационного параболического уравнения с периодическим условием на решение // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2015. № 4. С. 78–88.
4. *Бондарев А.С.* Среднеквадратичные оценки погрешности проекционно-разностного метода со схемой Кранка–Николсон по времени для параболического уравнения с периодическим условием на решение // Науч. ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика. 2017. Т. 46. № 6 (255). С. 72–79.
5. *Бондарев А.С., Смагин В.В.* Решение вариационного параболического уравнения с периодическим условием на решение проекционно-разностным методом со схемой Кранка–Николсон по времени // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58. № 4. С. 761–770.
6. *Смагин В.В.* Оценки в сильных нормах погрешности проекционно-разностного метода для параболических уравнений с модифицированной схемой Кранка–Николсон // Мат. заметки. 2003. Т. 74. № 6. С. 913–923.
7. *Вайникко Г.М., Оя П.Э.* О сходимости и быстроте сходимости метода Галёркина для абстрактных эволюционных уравнений // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 7. С. 1269–1277.
8. *Смагин В.В.* Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений // Мат. сб. 1997. Т. 188. № 3. С. 143–160.
9. *Бондарев А.С.* Оценки в сильных нормах погрешности проекционно-разностного метода решения параболического уравнения с периодическим условием на решение // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2018. № 2. С. 129–139.
10. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. М., 1981.
11. *Смагин В.В.* Оценки погрешности полудискретных приближений по Галёркину для параболических уравнений с краевым условием типа Неймана // Изв. вузов. Математика. 1996. № 3. С. 50–57.
12. *Смагин В.В.* Проекционно-разностный метод со схемой Кранка–Николсон по времени приближённого решения параболического уравнения с интегральным условием на решение // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 1. С. 116–126.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 14.10.2018 г.
После доработки 14.10.2021 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.