ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63+519.651+517.956.32

ОПТИМАЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АГРЕГАТЫ В ЗАДАЧЕ ДИСКРЕТИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА И ИХ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

© 2022 г. А. Б. Утесов, А. А. Базарханова

Указан конкретный вычислительный агрегат, реализующий точный порядок погрешности, возникающей при дискретизации решения уравнения Клейна–Гордона вычислительными агрегатами, построенными по точной числовой информации о начальных условиях, принадлежащих многомерным 1-периодическим классам Никольского. Найдена предельная погрешность указанного оптимального вычислительного агрегата.

DOI: 10.31857/S0374064122050107, EDN: CBUUGO

1. Постановка задачи дискретизации решений уравнения Клейна–Гордона. Пусть символом $u(x,t;f_1,f_2)$ обозначено классическое решение уравнения Клейна–Гордона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2}-u \quad (0\leqslant t<+\infty, \quad x=(x_1,\ldots,x_s)\in\mathbb{R}^s) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(x,0)=f_1(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=f_2(x). \tag{2}$$

Решение $u(x,t;f_1,f_2)$ описывает, в частности, свободную релятивистскую (псевдо) скалярную частицу массы, равной единице (см., например, [1, с. 54]).

Задача дискретизации бесконечного объекта (в нашем случае решения $u(x,t;f_1,f_2)$, представимого кратным рядом (см. приведённую ниже лемму 1)) состоит в его приближении простым (в некотором смысле) конечным объектом и в указании точности предложенного приближения.

Впервые задача дискретизации решений была рассмотрена Н.М. Коробовым для уравнения Пуассона [2, с. 185–190]. Далее эта задача изучалась в работах [3] и [4, § 10.5, с. 217] для уравнения Лапласа и уравнения теплопроводности соответственно. Следует отметить статью С.А. Смоляка [5], в которой был предложен метод построения оптимальных вычислительных агрегатов в задачах численного интегрирования, восстановления функций и дискретизации решений уравнения в частных производных. Впоследствии метод Смоляка и его различные применения стали объектами изучения многих математиков (см., например, [6–8]). Отметим также работу [9], содержащую ряд результатов, полученных при дискретизации решений классических уравнений математической физики, в частности, решений уравнения Клейна–Гордона в рамках постановки “Компьютерный (вычислительный) поперечник” (подробную информацию об этой постановке можно найти, например, в [10]).

В данной работе дискретизация решений $u(x,t;f_1,f_2)$ производится вычислительными агрегатами, построенными по точной числовой информации о начальных условиях f_1 и f_2, и находится предельная погрешность оптимального вычислительного агрегата.

Следуя работам [11–13], сформулируем задачу дискретизации решений уравнения Клейна–Гордона вычислительными агрегатами, построенными по точной числовой информации о начальных условиях.

Пусть даны целые числа $N_1\geqslant 1$ и $N_2\geqslant 1$, классы F_1 и F_2 функций, заданных на Ω_1 и Ω_2 соответственно, нормированное пространство Y функций, заданных на Ω_Y, и пусть

$N = N_1 + N_2$. Числовая информация $l^{(N_1,N_2)} = (l_1^{(1)}(f_1), \ldots, l_1^{(N_1)}(f_1), l_2^{(1)}(f_2), \ldots, l_2^{(N_2)}(f_2))$ объёма N о начальных условиях $f_1 \in F_1$ и $f_2 \in F_2$ снимается с функционалов

$$l_1^{(1)} : F_1 \mapsto \mathbb{C}, \quad \ldots, \quad l_1^{(N_1)} : F_1 \mapsto \mathbb{C} \quad \text{и} \quad l_2^{(1)} : F_2 \mapsto \mathbb{C}, \quad \ldots, \quad l_2^{(N_2)} : F_2 \mapsto \mathbb{C}.$$

Пусть также дана функция $\varphi_N(z_1, \ldots, z_N; y) : \mathbb{C}^N \times \Omega_Y \mapsto \mathbb{C}$ – алгоритм переработки числовой информации $l^{(N_1,N_2)}$ о начальных условиях $f_1 \in F_1$ и $f_2 \in F_2$ такая, что при всяком фиксированном $(z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$ как функция от y принадлежит пространству Y. Далее, через $\{\varphi_N\}_Y$ будем обозначать множество функций φ_N, удовлетворяющих всем перечисленным выше условиям, через $(l^{(N_1,N_2)}, \varphi_N)$ – вычислительный агрегат дискретизации, действующий по правилу $\varphi_N(l_1^{(1)}(f_1), \ldots, l_1^{(N_1)}(f_1), l_2^{(1)}(f_2), \ldots, l_2^{(N_2)}(f_2); \cdot)$, а через $D_{(N_1,N_2)}$ – множество всех вычислительных агрегатов $(l^{(N_1,N_2)}, \varphi_N)$.

Для заданных F_1, F_2, Y и $D_N = \bigcup_{\substack{N_1+N_2=N\\ N_1,N_2=1,2,\ldots}} D_{(N_1,N_2)}$ положим

$$\delta_N(D_N, F_1, F_2)_Y = \min_{N_1+N_2=N} \inf_{(l^{(N_1,N_2)},\varphi_N)\in D_N} \delta_N((l^{(N_1,N_2)}, \varphi_N), F_1, F_2)_Y,$$

где

$$\delta_N((l^{(N_1,N_2)}, \varphi_N), F_1, F_2)_Y =$$
$$= \sup_{(f_1,f_2)\in F_1\times F_2} \|u(\cdot\,; f_1, f_2) - \varphi_N(l_1^{(1)}(f_1), \ldots, l_1^{(N_1)}(f_1), l_2^{(1)}(f_2), \ldots, l_2^{(N_2)}(f_2); \cdot)\|_Y.$$

Всюду ниже для любого числа A и положительного числа B запись $A \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\ll} B$ будет означать существование постоянной $C(\alpha, \beta, \ldots) > 0$ такой, что $|A| \leqslant C(\alpha, \beta, \ldots)B$, а для положительных чисел A и B одновременное выполнение соотношений $A \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\ll} B$ и $B \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\ll} A$ записывается в виде $A \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\succ\prec} B$.

В рамках приведённых обозначений и определений задача дискретизации решений уравнения Клейна–Гордона вычислительными агрегатами, построенными по точной числовой информации о начальных условиях, заключается в установлении точного порядка величины $\delta_N(D_N, F_1, F_2)_Y$ (т.е. в нахождении положительной последовательности $\{\psi_N\}_{N\geqslant1}$, удовлетворяющей соотношению $\delta_N(D_N, F_1, F_2)_Y \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\succ\prec} \psi_N$, здесь в качестве $\alpha, \beta, \ldots$ берутся параметры классов F_1, F_2 и пространства Y) и в указании такого вычислительного агрегата

$$(\bar{l}^{(N_1,N_2)}, \overline{\varphi}_N) \equiv \overline{\varphi}_N(\bar{l}_1^{(1)}(f_1), \ldots, \bar{l}_1^{(N_1)}(f_1), \bar{l}_2^{(1)}(f_2), \ldots, \bar{l}_2^{(N_2)}(f_2); \cdot),$$

для которого $\delta_N((\bar{l}^{(N_1,N_2)}, \overline{\varphi}_N), F_1, F_2)_Y \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\succ\prec} \psi_N$ (в этом случае говорят, что вычислительный агрегат $(\bar{l}^{(N_1,N_2)}, \overline{\varphi}_N)$ реализует точный порядок дискретизации).

2. Определения оптимального вычислительного агрегата и его предельной погрешности.

Определение 1. Вычислительный агрегат $(\bar{l}^{(N_1,N_2)}, \overline{\varphi}_N)$, реализующий точный порядок погрешности дискретизации, называется *оптимальным вычислительным агрегатом.*

В работе [14] было дано определение предельной погрешности оптимального вычислительного агрегата $\overline{\varphi}_N(\bar{l}^{(1)}(f), \ldots, \bar{l}^{(N)}(f); \cdot)$ в задаче дискретизации решений $u(t, x; f)$ уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} \quad (0 \leqslant t < +\infty, \quad x = (x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{R}^s)$$

с начальным условием $u(0, x; f) = f(x)$. Здесь сформулируем определение предельной погрешности оптимального вычислительного агрегата $(\bar{l}^{(N_1,N_2)}, \overline{\varphi}_N)$, строящегося по двум точным числовым информациям $(\bar{l}_1^{(1)}(f_1), \ldots, \bar{l}_1^{(N_1)}(f_1))$ и $(\bar{l}_2^{(1)}(f_2), \ldots, \bar{l}_2^{(N_2)}(f_2))$, полученным от начальных условий f_1 и f_2.

Определение 2. *Предельной погрешностью* оптимального вычислительного агрегата $(\bar{l}^{(N_1,N_2)},\overline{\varphi}_N)$ называется пара $(\overline{\varepsilon}_{N_1},\overline{\varepsilon}_{N_2})$ положительных последовательностей $\{\overline{\varepsilon}_{N_1}\}$ и $\{\overline{\varepsilon}_{N_2}\}$ таких, что, во-первых, для всех $N_1\in\mathbb{N}$, $N_2\in\mathbb{N}$ имеет место соотношение

$$\triangle_N((\overline{\varepsilon}_{N_1},\overline{\varepsilon}_{N_2}),(\bar{l}^{(N_1,N_2)},\overline{\varphi}_N),F_1,F_2)_Y\succ\prec\delta_N(D_N,F_1,F_2)_Y, \tag{3}$$

где

$$\triangle_N((\overline{\varepsilon}_{N_1},\overline{\varepsilon}_{N_2}),(\bar{l}^{(N_1,N_2)},\overline{\varphi}_N),F_1,F_2)_Y=$$

$$=\sup_{(f_1,f_2)\in F_1\times F_2}\sup_{\substack{z_1^{(1)},\ldots,z_1^{(N_1)}\\ z_2^{(1)},\ldots,z_2^{(N_2)}}}\{\|u(\cdot\,;f_1,f_2)-\overline{\varphi}_N(z_1^{(1)},\ldots,z_1^{(N_1)},z_2^{(1)},\ldots,z_2^{(N_2)};\cdot)\|_Y:$$

$$|z_1^{(1)}-\bar{l}_1^{(1)}(f_1)|<\overline{\varepsilon}_{N_1},\ldots,|z_1^{(N_1)}-\bar{l}_1^{(N_1)}|<\overline{\varepsilon}_{N_1},|z_2^{(1)}-\bar{l}_2^{(1)}(f_1)|<\overline{\varepsilon}_{N_2},\ldots,|z_2^{(N_2)}-\bar{l}_2^{(N_2)}|<\overline{\varepsilon}_{N_2}\}=$$

$$=\sup_{(f_1,f_2)\in F_1\times F_2}\sup_{\substack{|\gamma_1^{(1)}|\leqslant1,\ \ldots,\ |\gamma_1^{(N_1)}|\leqslant1\\ |\gamma_2^{(1)}|\leqslant1,\ \ldots,\ |\gamma_2^{(N_2)}|\leqslant1}}\|u(\cdot\,;f_1,f_2)-\overline{\varphi}_N(\bar{l}_1^{(1)}(f_1)+\gamma_1^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_1},\ldots$$

$$\ldots,\bar{l}_1^{(N_1)}(f_1)+\gamma_1^{(N_1)}\overline{\varepsilon}_{N_1},\bar{l}_2^{(1)}(f_2)+\gamma_2^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_2},\ldots,\bar{l}_2^{(N_2)}(f_2)+\gamma_2^{(N_2)}\overline{\varepsilon}_{N_2};\cdot)\|_Y,$$

во-вторых, справедливо равенство

$$\lim_{\substack{N_1\to\infty\\ N_2\to\infty}}\frac{\triangle_N((\eta_{N_1}\overline{\varepsilon}_{N_1},\eta_{N_2}\overline{\varepsilon}_{N_2}),(\bar{l}^{(N_1,N_2)},\overline{\varphi}_N),F_1,F_2)_Y}{\delta_N(D_N,F_1,F_2)_Y}=+\infty \tag{4}$$

для всех сколь угодно медленно возрастающих к $+\infty$ положительных последовательностей $\{\eta_{N_1}\}$ и $\{\eta_{N_2}\}$.

Соотношение (3) означает, что при вычислении значений оптимального вычислительного агрегата $\overline{\varphi}_N(\bar{l}_1^{(1)}(f_1),\ldots,\bar{l}_1^{(N_1)}(f_1),\bar{l}_2^{(1)}(f_2),\ldots,\bar{l}_2^{(N_2)}(f_2);\cdot)$ числовые информации $\bar{l}_1^{(\tau)}(f_1)$, $\tau=\overline{1,N_1}$, и $\bar{l}_2^{(\nu)}(f_2)$, $\nu=\overline{1,N_2}$, можно заменить неточными значениями $z_1^{(\tau)}$ и $z_2^{(\nu)}$ такими, что $|z_1^{(\tau)}-\bar{l}_1^{(\tau)}(f)|<\overline{\varepsilon}_{N_1}$ $(\tau=\overline{1,N_1})$ и $|z_2^{(\nu)}-\bar{l}_2^{(\nu)}(f)|<\overline{\varepsilon}_{N_2}$ $(\nu=\overline{1,N_2})$ соответственно, сохранив при этом точный порядок погрешности оптимальной дискретизации. Выполнение же равенства (4) означает неулучшаемость порядков погрешностей $\overline{\varepsilon}_{N_1}$ и $\overline{\varepsilon}_{N_2}$, так как сколь угодно медленное возрастание к бесконечности величин $\overline{\varepsilon}_{N_1}$ и $\overline{\varepsilon}_{N_2}$ нарушает точный порядок погрешности дискретизации.

3. Необходимые обозначения и определения для формулировки полученных результатов. В дальнейшем через $|E|$ будем обозначать количество элементов конечного множества E. Как обычно, $[a]$ – целая часть числа a. Для упрощения записи будем использовать обозначение

$$\rho_m(t)=\frac{\sin(t\sqrt{4\pi^2(m,m)+1})}{\sqrt{4\pi^2(m,m)+1}},$$

где $m\in\mathbb{Z}^s$, $t\geqslant0$.

Пусть $s=1,2,\ldots$ и r – положительное число. Класс Никольского $H_2^r(0,1)^s$ по определению состоит из всех суммируемых 1-периодических по каждой переменной функций $f(x)=f(x_1,\ldots,x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье $\hat{f}(m)$, $m\in\mathbb{Z}^s$, которых удовлетворяют условию

$$\sup_{j=0,1,2,\ldots}2^{2jr}\sum_{[2^{j-1}]\leqslant\|m\|<2^j}|\hat{f}(m)|^2\leqslant1,$$

где $m=(m_1,\ldots,m_s)\in\mathbb{Z}^s$ и $\|m\|=\max\limits_{j=\overline{1,s}}|m_j|$.

Ниже нам понадобится класс Соболева $W_2^r(0,1)^s$, состоящий из всех суммируемых 1-периодических по каждой переменной функций $f(x)=f(x_1,\ldots,x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье $\hat f(m)$, $m\in\mathbb{Z}^s$, которых удовлетворяют условию

$$\|f\|_{W_2^r}\equiv\sum_{m\in\mathbb{Z}^s}(\widetilde m_1^{2r}+\ldots+\widetilde m_s^{2r})\leqslant 1,$$

где $\widetilde m=\max\{1;|m_j|\}$ для каждого $j=\overline{1,s}$.

Нормированное пространство $L^{2,\infty}\equiv L^{2,\infty}((0,1)^s\times[0;+\infty])$ определяется как линейное пространство всех функций $g:\mathbb{R}^s\times[0;+\infty)\to\mathbb{C}$ таких, что для каждого $t\geqslant 0$ функция $g_t(x)=g(x,t)$ как функция аргумента $x\in\mathbb{R}^s$ является измеримой, 1-периодической по каждой из своих s переменных и удовлетворяет неравенству

$$\|g\|_{L^{2,\infty}}\equiv\sup_{t\geqslant 0}\|g(\,\cdot\,,t)\|_{L^2(0,1)^s}<+\infty.$$

Символом $\Phi_{(N_1,N_2)}$ обозначается множество всех вычислительных агрегатов $(l^{(N_1,N_2)},\varphi_N)$ с функционалами $l_1^{(1)}(f_1)=\hat f_1(m_1^{(1)})$, $\ldots$, $l_1^{(N_1)}(f_1)=\hat f_1(m_1^{(N_1)})$, $l_2^{(1)}(f_2)=\hat f_2(m_2^{(1)})$, $\ldots$, $l_2^{(N_2)}(f_2)=\hat f_2(m_2^{(N_2)})$ и функцией $\varphi_N\in\{\varphi_N\}_Y$, а символом $L_{(N_1,N_2)}$ – множество всех вычислительных агрегатов $(l^{(N_1,N_2)},\varphi_N)$ с линейными функционалами $l_1^{(1)}:F_1\to\mathbb{C}$, $\ldots$, $l_1^{(N_1)}:F_1\to\mathbb{C}$, $l_2^{(1)}:F_2\to\mathbb{C}$, $\ldots$, $l_2^{(N_2)}:F_2\to\mathbb{C}$ и функцией $\varphi_N\in\{\varphi_N\}_Y$.

Конкретизировав в $\delta_N(D_N,F_1,F_2)_Y$ множество D_N, классы F_1 и F_2, пространство Y, получим различные задачи дискретизации решений уравнения Клейна–Гордона, а также задачи нахождения предельной погрешности оптимального вычислительного агрегата.

В статьях [15, 16] при $D_N=L_N$, $F_1=H_2^{r_1}(0,1)^s$, $F_2=H_2^{r_2}(0,1)^s$ и $D_N=\Phi_N$, $F_1=W_2^{r_1}(0,1)^s$, $F_2=W_2^{r_2}(0,1)^s$, где $L_N=\bigcup_{\substack{N_1+N_2=N,\\ N_1,N_2=1,2,\ldots}}L_{(N_1,N_2)}$ и $\Phi_N=\bigcup_{\substack{N_1+N_2=N,\\ N_1,N_2=1,2,\ldots}}\Phi_{(N_1,N_2)}$ соответственно, были установлены точные порядки погрешности дискретизации, но не были указаны конкретные вычислительные агрегаты, построенные по числовым информациям объёма N и реализующие точные порядки.

В настоящей работе при конкретизации из [15] доказана оптимальность некоторого вычислительного агрегата $(\bar l^{(N_1,N_2)},\overline\varphi_N)$ и найдена его предельная погрешность.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть даны целое положительное число s, положительные числа $r_1>2+s/2$, $r_2>1+s/2$ и пусть для каждого целого $K_i\geqslant 1$, $i\in\{1,2\}:N_i\equiv N_i(K_i)=(2K_i+1)^s$. Тогда для любого $N\equiv N(K_1,K_2)=N_1+N_2$ имеют место соотношения*

$$\delta_N(L_N,H_2^{r_1},H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}}\underset{s,r_1,r_2}{\succ\prec}\delta_N((\bar l^{(\bar N_1,\bar N_2)},\overline\varphi_N),H_2^{r_1},H_2^{r_2})\underset{s,r_1,r_2}{\succ\prec}\frac{1}{N^{\min\{r_1/s,(r_2+1)/s\}}},\tag{5}$$

здесь вычислительный агрегат $(\bar l^{(\bar N_1,\bar N_2)},\overline\varphi_N)$ состоит из функционалов $\bar l_1^{(1)}(f_1)=\hat f_1(\overline m_1^{(1)})$, $\ldots$, $\bar l_1^{(\bar N_1)}(f_1)=\hat f_1(\overline m_1^{(\bar N_1)})$, $\bar l_2^{(1)}(f_2)=\hat f_2(\overline m_2^{(1)})$, $\ldots$, $\bar l_2^{(\bar N_2)}(f_2)=\hat f_2(\overline m_2^{(\bar N_2)})$ и функции

$$\overline\varphi_N(z_1^{(1)},\ldots,z_1^{(\bar N_1)},z_2^{(1)},\ldots,z_2^{(\bar N_2)};x,t)=$$

$$=\sum_{\tau=1}^{\bar N_1}z_1^{(\tau)}\rho'_{\overline m_1^{(\tau)}}(t)\exp\{2\pi i(\overline m_1^{(\tau)},x)\}+\sum_{\nu=1}^{\bar N_2}z_2^{(\nu)}\rho_{\overline m_2^{(\nu)}}(t)\exp\{2\pi i(\overline m_2^{(\nu)},x)\},$$

где целые положительные числа $\bar N_1$ и $\bar N_2$ такие, что

$$\min_{N_1+N_2=N}\left(\frac{1}{N_1^{r_1/s}}+\frac{1}{N_2^{(r_2+1)/s}}\right)=\frac{1}{\bar N_1^{r_1/s}}+\frac{1}{\bar N_2^{(r_2+1)/s}},$$

$\{\overline{m}_i^{(1)},\ldots,\overline{m}_i^{(\bar N_i)}\}$, $i\in\{1,2\}$, – *некоторое упорядочение множества* $A_i=\{m\in\mathbb{Z}^s:\|m\|\leqslant\leqslant\bar K_i\}$, $i\in\{1,2\}$.

Далее, для краткости, символы $\bar N_1$ и $\bar N_2$ заменим соответственно на N_1 и N_2.

Теорема 2. *Пусть даны целое положительное число* s, *положительные числа* $r_1>2+s/2$, $r_2>1+s/2$ *и пусть для каждого целого* $K_i\geqslant 1$, $i\in\{1,2\}$, *выполняется* $N_i\equiv N_i(K_i)=(2K_i+1)^s$.

Тогда пара $(\overline{\varepsilon}_{N_1},\overline{\varepsilon}_{N_2})$ *с компонентами* $\overline{\varepsilon}_{N_1}=(N_1^{r_1/s+1/2})^{-1}$ *и*

$$\overline{\varepsilon}_{N_2}=\begin{cases}(N_2^{r_2+1})^{-1}, & \textit{если}\quad s=1,\\ (N_2^{(r_2+1)/2}(\ln N_2)^{1/2})^{-1}, & \textit{если}\quad s=2,\\ (N_2^{r_2/s+1/2})^{-1}, & \textit{если}\quad s>2\end{cases}$$

является предельной погрешностью оптимального вычислительного агрегата $(\overline{l}^{(N_1,N_2)},\overline{\varphi}_N)$ *из теоремы 1, т.е. имеет место соотношение*

$$\triangle_N((\overline{\varepsilon}_{N_1},\overline{\varepsilon}_{N_2}),(\overline{l}^{(N_1,N_2)},\overline{\varphi}_N),H_2^{r_1},H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}}\succ\prec\delta_N(L_N,H_2^{r_1},H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}},\tag{6}$$

и для любых сколь угодно медленно возрастающих к $+\infty$ *положительных последовательностей* $\{\eta_{N_1}\}$ *и* $\{\eta_{N_2}\}$ *справедливо равенство*

$$\lim_{\substack{K_1\to\infty\\ K_2\to\infty}}\frac{\triangle_N((\eta_{N_1}\overline{\varepsilon}_{N_1},\eta_{N_2}\overline{\varepsilon}_{N_2}),(\overline{l}^{(N_1,N_2)},\overline{\varphi}_N),H_2^{r_1},H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}}}{\delta_N(L_N,H_2^{r_1},H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}}}=+\infty.\tag{7}$$

4. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1 (см. [15, § 2, лемма 1]). *Пусть даны целое положительное число* s, *положительные числа* r_1 *и* r_2 *такие, что* $r_1>2+s/2$ *и* $r_2>1+s/2$. *Тогда для каждой пары* (f_1,f_2) *функций* $f_1\in H_2^{r_1}(0,1)^s$, $f_2\in H_2^{r_2}(0,1)^s$ *ряд*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^s}(\hat f_1(m)\rho'_m(t)+\hat f_2(m)\rho_m(t))\exp\{2\pi i(m,x)\}$$

сходится абсолютно и является решением уравнения Клейна–Гордона (1) с начальными условиями (2).

Лемма 2 (см. [15, § 2, лемма 3]). *Пусть даны положительные числа* α_1, α_2, c_1 *и* c_2. *Тогда для каждого* $N=2,3,\ldots$ *верно соотношение*

$$\min_{\substack{N_1+N_2=N,\\ N_1\geqslant1,N_2\geqslant1}}(c_1N_1^{-\alpha_1}+c_2N_2^{-\alpha_2})\underset{\alpha_1,\alpha_2,c_1,c_2}{\succ\prec}N^{-\min\{\alpha_1,\alpha_2\}}.$$

Лемма 3. *Пусть* $p=2,3,\ldots$ *и* $B_p=\{m\in\mathbb{Z}^s:1\leqslant\|m\|\leqslant p\}$. *Тогда справедливо соотношение*

$$\sum_{m\in B_P}\frac{1}{m_1^2+\ldots+m_s^2}\underset{s}{\succ\prec}\begin{cases}1, & \textit{если}\quad s=1,\\ \ln p, & \textit{если}\quad s=2,\\ p^{s-2}, & \textit{если}\quad s>2.\end{cases}$$

Доказательство. Пусть $s=1$. Тогда

$$\sum_{m\in B_p}\frac{1}{m_1^2+\ldots+m_s^2}=2\sum_{m_1=1}^{p}\frac{1}{m_1^2}.$$

Поэтому, согласно неравенству

$$\sum_{m_1=1}\frac{1}{m_1^2}\geqslant\int\limits_1^{p+1}\frac{1}{x^2}\,dx,$$

имеем
$$\sum_{m\in B_p}\frac{1}{m_1^2+\ldots+m_s^2}\geqslant 2\int\limits_1^{p+1}\frac{1}{x^2}\,dx=2(1-1/(p+1))\geqslant\frac{4}{3}. \tag{8}$$

Так как
$$\int\limits_1^{p+1}\frac{1}{x^2}\,dx\geqslant\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{p^2},$$
то
$$1+\int\limits_1^{p+1}\frac{1}{x^2}\,dx\geqslant\sum_{m_1=1}^{p}\frac{1}{m_1^2},$$
откуда получим цепочку неравенств
$$\sum_{m\in B_p}\frac{1}{m_1^2+\ldots+m_s^2}\leqslant 2\biggl(1+\int\limits_1^{p+1}\frac{1}{x^2}\,dx\biggr)\leqslant 4.$$
Следовательно, в силу (8) при $s=1$ имеет место соотношение
$$\sum_{m\in B_p}\frac{1}{m_1^2+\ldots+m_s^2}\underset{s}{\succ\prec}1. \tag{9}$$

Перейдём к случаю $s\geqslant 2$. Рассмотрим множества
$$M_p=\{x\in\mathbb{R}^s: 1\leqslant x_1\leqslant p,\ \ldots,\ 1\leqslant x_s\leqslant p\},$$
$$U_p=\{x\in\mathbb{R}^s: x_1\geqslant 0,\ \ldots,\ x_s\geqslant 0,\ 1\leqslant x_1^2+\ldots+x_s^2\leqslant sp^2\},$$
$$T_p=\{x\in\mathbb{R}^s: x_1\geqslant 1,\ \ldots,\ x_s\geqslant 1,\ (x_1-1)^2+\ldots+(x_s-1)^2\leqslant(p-1)^2\}.$$

Поскольку $T_p\subset M_p\subset U_p$, то
$$\int\limits_{T_p}\frac{dx_1\cdots dx_s}{x_1^2+\ldots+x_s^2}\leqslant\int\limits_{M_p}\frac{dx_1\cdots dx_s}{x_1^2+\ldots+x_s^2}\leqslant\int\limits_{U_p}\frac{dx_1\cdots dx_s}{x_1^2+\ldots+x_s^2}. \tag{10}$$

Перейдём к сферическим (полярным в случае $s=2$) координатам в интегралах, рассматриваемых на множествах T_p и U_p, и соответственно получим
$$\int\limits_{T_p}\frac{dx_1\cdots dx_s}{x_1^2+\ldots+x_s^2}\underset{s}{\succ\prec}\begin{cases}\ln p, & \text{если}\quad s=2,\\ p^{s-2}, & \text{если}\quad s>2\end{cases}\quad\text{и}\quad\int\limits_{U_p}\frac{dx_1\cdots dx_s}{x_1^2+\ldots+x_s^2}\underset{s}{\succ\prec}\begin{cases}\ln p, & \text{если}\quad s=2,\\ p^{s-2}, & \text{если}\quad s>2,\end{cases}$$
откуда, согласно (10), вытекает соотношение
$$\int\limits_{M_p}\frac{dx_1\cdots dx_s}{x_1^2+\ldots+x_s^2}\underset{s}{\succ\prec}\begin{cases}\ln p, & \text{если}\quad s=2,\\ p^{s-2}, & \text{если}\quad s>2.\end{cases} \tag{11}$$

Так как

$$\int\limits_{M_p} \frac{dx_1\cdots dx_s}{x_1^2+\ldots+x_s^2} \underset{s}{\succ\prec} \sum_{m_1=1}^{p}\cdots\sum_{m_s=1}^{p}\frac{1}{m_1^2+\ldots+m_s^2} \quad \text{и} \tag{12}$$

$$\sum_{m\in B_p}\frac{1}{m_1^2+\ldots+m_s^2} \underset{s}{\succ\prec} \left(\sum_{\tau=1}^{s-1} C_s^\tau \sum_{\substack{1\leqslant m_{\tau+1}\\ \cdots \\ m_s\leqslant p}} \frac{1}{m_{\tau+1}^2+\ldots+m_s^2} + \sum_{m_1=1}^{p}\cdots\sum_{m_s=1}^{p}\frac{1}{m_1^2+\ldots+m_s^2}\right),$$

то в силу (9), (11) и (12) имеем

$$\sum_{m\in B_p}\frac{1}{m_1^2+\ldots+m_s^2} \underset{s}{\succ\prec} \begin{cases}\ln p, & \text{если} \quad s=2,\\ p^{s-2}, & \text{если} \quad s>2.\end{cases}$$

Лемма доказана.

5. Доказательство теоремы 1. Сначала оценим величину $\delta_N((\bar l^{(N_1,N_2)},\overline{\varphi}_N),H_2^{r_1},H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}}$ сверху. Так как

$$\overline{\varphi}_N(\bar l_1^{(1)}(f_1),\ldots,\bar l_1^{(N_1)}(f_1),\bar l_2^{(1)}(f_2),\ldots,\bar l_2^{(N_2)}(f_2);x,t) =$$

$$=\sum_{\tau=1}^{N_1}\hat f_1(\overline{m}_1^{(\tau)})\rho'_{\overline{m}_1^{(\tau)}}(t)\exp\{2\pi i(\overline{m}_1^{(\tau)},x)\} + \sum_{\nu=1}^{N_2}\hat f_2(\overline{m}_2^{(\nu)})\rho_{\overline{m}_2^{(\nu)}}(t)\exp\{2\pi i(\overline{m}_2^{(\nu)},x)\} =$$

$$=\sum_{m\in A_1}\hat f_1(m)\rho'_m(t)\exp\{2\pi i(m,x)\} + \sum_{m\in A_2}\hat f_2(m)\rho_m(t)\exp\{2\pi i(m,x)\},$$

то в силу леммы 1 запишем равенство

$$u(x,t;f_1,f_2) - \overline{\varphi}_N(\bar l_1^{(1)}(f_1),\ldots,\bar l_1^{(N_1)}(f_1),\bar l_2^{(1)}(f_2),\ldots,\bar l_2^{(N_2)}(f_2);x,t) =$$

$$=\sum_{m\in\mathbb{Z}^s\setminus A_1}\hat f_1(m)\rho'_m(t)\exp\{2\pi i(m,x)\} + \sum_{m\in\mathbb{Z}^s\setminus A_2}\hat f_2(m)\rho_m(t)\exp\{2\pi i(m,x)\}. \tag{13}$$

Обозначим через l_i, $i\in\{1,2\}$, некоторое целое число, удовлетворяющее неравенствам $2^{l_i}\leqslant K_i<2^{l_i+1}$. Тогда для всех $m\in\mathbb{Z}^s$ таких, что $\|m\|\leqslant 2^{l_i}$, при $f_i\in H_2^{r_i}(0,1)^s$ имеет место неравенство

$$\left(\sum_{\|m\|\geqslant 2^{l_i}}|\hat f_i(m)|^2\right)^{1/2} \underset{s,r_i}{\ll} \frac{1}{N_i^{r_i/s}}, \quad i\in\{1,2\}. \tag{14}$$

Действительно, учитывая очевидные соотношения $N_1^{1/s}\underset{s}{\succ\prec}K_1, N_2^{1/s}\underset{s}{\succ\prec}K_2$, для каждого $i\in\{1,2\}$ получим

$$\left(\sum_{\|m\|\geqslant 2^{l_i}}|\hat f_i(m)|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{\tau=l_i+1}^{\infty}\sum_{2^{\tau-1}\leqslant\|m\|<2^\tau}|\hat f_i(m)|^2\right)^{1/2} =$$

$$=\left(\sum_{\tau=l_i+1}^{\infty}2^{-2\tau r_i}\cdot 2^{2\tau r_i}\sum_{2^{\tau-1}\leqslant\|m\|<2^\tau}|\hat f_i(m)|^2\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant\left(\sup_{\tau=l_i+1,l_i+2,\ldots}\left\{2^{2\tau r_i}\sum_{2^{\tau-1}\leqslant\|m\|<2^\tau}|\hat f_i(m)|^2\right\}\right)^{1/2}\left(\sum_{\tau=l_i+1}^{\infty}2^{-2\tau r_i}\right)^{1/2} \underset{s,r_i}{\ll}\frac{1}{N_i^{r_i/s}}.$$

Так как

$$\Big\| \sum_{m\in\mathbb{Z}^s\setminus A_1} \hat{f}_1(m)\rho'_m(t)\exp\{2\pi i(m,\cdot\,)\}\Big\|_{L^2} = \bigg(\sum_{m\in\mathbb{Z}^s\setminus A_1} |\hat{f}_1(m)|^2|\rho'_m(t)|^2\bigg)^{1/2} =$$

$$= \bigg(\sum_{\|m\|>K_1} |\hat{f}_1(m)|^2|\rho'_m(t)|^2\bigg)^{1/2} \leqslant \bigg(\sum_{\|m\|\geqslant 2^{l_1}} |\hat{f}_1(m)|^2|\rho'_m(t)|^2\bigg)^{1/2}$$

и $|\rho'_m(t)|\leqslant 1$ для всех $m\in\mathbb{Z}^s$, то

$$\Big\| \sum_{m\in\mathbb{Z}^s\setminus A_1} \hat{f}_1(m)\rho'_m(t)\exp\{2\pi i(m,\cdot\,)\}\Big\|_{L^2} \leqslant \bigg(\sum_{\|m\|\geqslant 2^{l_1}} |\hat{f}_1(m)|^2\bigg)^{1/2},$$

откуда в силу (14) следует оценка сверху для L^2-нормы первой суммы правой части равенства (13):

$$\Big\| \sum_{m\in\mathbb{Z}^s\setminus A_1} \hat{f}_1(m)\rho'_m(t)\exp\{2\pi i(m,\cdot\,)\}\Big\|_{L^2} \underset{s,r_1}{\ll} \frac{1}{N_1^{r_1/s}}. \tag{15}$$

Теперь оценим L^2-норму второй суммы правой части (13) сверху. Из равенств Парсеваля

$$\Big\| \sum_{m\in\mathbb{Z}^s\setminus A_2} \hat{f}_2(m)\rho_m(t)\exp\{2\pi i(m,\cdot\,)\}\Big\|_{L^2} = \bigg(\sum_{\|m\|>K_2} |\hat{f}_2(m)|^2|\rho_m(t)|^2\bigg)^{1/2}$$

с учётом неравенства $2^{l_2}\leqslant K_2$ имеем

$$\Big\| \sum_{m\in\mathbb{Z}^s\setminus A_2} \hat{f}_2(m)\rho_m(t)\exp\{2\pi i(m,\cdot\,)\}\Big\|_{L^2} \leqslant \bigg(\sum_{\|m\|\geqslant 2^{l_2}} |\hat{f}_2(m)|^2|\rho_m(t)|^2\bigg)^{1/2}. \tag{16}$$

Поскольку

$$|\rho_m(t)| = \left|\frac{\sin(t\sqrt{4\pi^2(m_1^2+\ldots+m_s^2)+1})}{\sqrt{4\pi^2(m_1^2+\ldots+m_s^2)+1}}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi\sqrt{m_1^2+\ldots+m_s^2}} \leqslant \frac{1}{\|m\|} \leqslant \frac{1}{2^{l_2}}$$

для всех $\|m\|\geqslant 2^{l_2}$, то

$$\bigg(\sum_{\|m\|\geqslant 2^{l_2}} |\hat{f}_2(m)|^2|\rho_m(t)|^2\bigg)^{1/2} \leqslant \frac{1}{2^{l_2}}\bigg(\sum_{\|m\|\geqslant 2^{l_2}} |\hat{f}_2(m)|^2\bigg)^{1/2}. \tag{17}$$

Вследствие неравенств (16), (17), (14) и $2^{l_2}\underset{s}{\gg} N_2^{1/s}$ получаем

$$\Big\| \sum_{m\in\mathbb{Z}^s\setminus A_2} \hat{f}_2(m)\rho_m(t)\exp\{2\pi i(m,\cdot\,)\}\Big\|_{L^2} \underset{s,r_2}{\ll} \frac{1}{N_2^{(r_2+1)/s}}. \tag{18}$$

При любом $t\geqslant 0$ из (13), (15) и (18) следует неравенство

$$\|u(\,\cdot\,,t;f_1,f_2) - \overline{\varphi}_N(\bar{l}_1^{(1)}(f_1),\ldots,\bar{l}_1^{(N_1)}(f_1),\bar{l}_2^{(1)}(f_2),\ldots,\bar{l}_2^{(N_2)}(f_2);\cdot\,,t)\|_{L^2} \underset{s,r_1,r_2}{\ll} \frac{1}{N_1^{r_1/s}} + \frac{1}{N_2^{(r_2+1)/s}},$$

откуда, поскольку переменная t и упорядоченная пара (f_1, f_2) произвольны, в силу определения пространства $L^{2,\infty}$ и леммы 2 заключаем, что

$$\delta_N((\bar{l}^{(N_1,N_2)}, \overline{\varphi}_N), H_2^{r_1}, H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}} \underset{s,r_1,r_2}{\ll} N^{-\min\{r_1/s,(r_2+1)/s\}}. \tag{19}$$

В статье [15, теорема 4] установлено соотношение

$$\delta_N(L_N, H_2^{r_1}, H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}} \underset{s,r_1,r_2}{\gg} N^{-\min\{r_1/s,(r_2+1)/s\}}. \tag{20}$$

Наконец, сопоставив неравенства $\delta_N(L_N, H_2^{r_1}, H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}} \leqslant \delta_N((\bar{l}^{(N_1,N_2)}, \overline{\varphi}_N), H_2^{r_1}, H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}}$, (19) и (20), получим соотношения (5). Теорема 1 доказана.

6. Доказательство теоремы 2. Доказательство проведём для случая $s > 2$ (в случаях $s = 1$ и $s = 2$ доказательство теоремы 2 проводится аналогично).

Так как для произвольно заданных чисел $\gamma_1^{(1)}, \ \ldots, \ \gamma_1^{(N_1)}, \ \gamma_2^{(1)}, \ \ldots, \ \gamma_2^{(N_2)}$ таких, что

$$|\gamma_1^{(1)}| \leqslant 1, \quad \ldots, \quad |\gamma_1^{(N_1)}| \leqslant 1, \quad |\gamma_2^{(1)}| \leqslant 1, \quad \ldots, \quad |\gamma_2^{(N_2)}| \leqslant 1,$$

имеет место равенство

$$\begin{aligned}
&\overline{\varphi}_N(\bar{l}_1^{(1)}(f_1) + \gamma_1^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_1}, \ldots, \bar{l}_1^{(N_1)}(f_1) + \gamma_1^{(N_1)}\overline{\varepsilon}_{N_1}, \bar{l}_2^{(1)}(f_2) + \gamma_2^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_2}, \ldots, \bar{l}_2^{(N_2)}(f_2) + \gamma_2^{(N_2)}\overline{\varepsilon}_{N_2}; x, t) = \\
&= \sum_{m\in A_1} \hat{f}_1(m)\rho'_m(t)\exp\{2\pi i(m,x)\} + \sum_{m\in A_2} \hat{f}_2(m)\rho_m(t)\exp\{2\pi i(m,x)\} + \\
&+ \overline{\varepsilon}_{N_1}\sum_{\tau=1}^{N_1} \gamma_1^{(\tau)}\rho'_{\overline{m}_1^{(\tau)}}(t)\exp\{2\pi i(\overline{m}_1^{(\tau)}, x)\} + \overline{\varepsilon}_{N_2}\sum_{\nu=1}^{N_2} \gamma_2^{(\nu)}\rho_{\overline{m}_2^{(\nu)}}(t)\exp\{2\pi i(\overline{m}_2^{(\nu)}, x)\},
\end{aligned}$$

то в силу леммы 1 справедливо выражение

$$\begin{aligned}
&u(x,t;f_1,f_2) - \overline{\varphi}_N(\bar{l}_1^{(1)}(f_1) + \gamma_1^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_1}, \ldots, \bar{l}_1^{(N_1)}(f_1) + \gamma_1^{(N_1)}\overline{\varepsilon}_{N_1}, \bar{l}_2^{(1)}(f_2) + \\
&+ \gamma_2^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_2}, \ldots, \bar{l}_2^{(N_2)}(f_2) + \gamma_2^{(N_2)}\overline{\varepsilon}_{N_2}; x, t) = \\
&= \sum_{\mathbb{Z}^s\setminus A_1} \hat{f}_1(m)\rho'_m(t)\exp\{2\pi i(m,x)\} + \sum_{\mathbb{Z}^s\setminus A_2} \hat{f}_2(m)\rho_m(t)\exp\{2\pi i(m,x)\} + \\
&+ \overline{\varepsilon}_{N_1}\sum_{\tau=1}^{N_1}(-\gamma_1^{(\tau)})\rho'_{\overline{m}_1^{(\tau)}}(t)\exp\{2\pi i(\overline{m}_1^{(\tau)}, x)\} + \\
&+ \overline{\varepsilon}_{N_2}\sum_{\nu=1}^{N_2}(-\gamma_2^{(\nu)})\rho_{\overline{m}_2^{(\nu)}}(t)\exp\{2\pi i(\overline{m}_2^{(\nu)}, x)\}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Оценим L^2-норму третьей суммы правой части (21) сверху. Так как

$$\bigg\|\overline{\varepsilon}_{N_1}\sum_{\tau=1}^{N_1}(-\gamma_1^{(\tau)})\rho'_{\overline{m}_1^{(\tau)}}(t)\exp\{2\pi i(\overline{m}_1^{(\tau,\cdot)})\}\bigg\|_{L^2} = \overline{\varepsilon}_{N_1}\bigg(\sum_{\tau=1}^{N_1}|\gamma_1^{(\tau)}|^2|\rho'_{\overline{m}_1^{(\tau)}}(t)|^2\bigg)^{1/2},$$

то согласно равенствам $\overline{\varepsilon}_{N_1} = 1/N_1^{r_1/s+1/2}$ и $(\sum_{\tau=1}^{N_1} 1)^{1/2} = \sqrt{N_1}$ получим

$$\bigg\|\overline{\varepsilon}_{N_1}\sum_{\tau=1}^{N_1}(-\gamma_1^{(\tau)})\rho'_{\overline{m}_1^{(\tau)}}(t)\exp\{2\pi i(\overline{m}_1^{(\tau)}, \cdot\,)\}\bigg\|_{L^2} \leqslant \frac{1}{N_1^{r_1/s}}. \tag{22}$$

Оценим L^2-норму четвертой суммы правой части (21) сверху:

$$\left\|\overline{\varepsilon}_{N_2}\sum_{\nu=1}^{N_2}(-\gamma_2^{(\nu)})\rho_{\overline{m}_2^{(\nu)}}(t)\exp\{2\pi i(\overline{m}_2^{(\tau)},\cdot\,)\}\right\|_{L^2}=\overline{\varepsilon}_{N_2}\left(\sum_{\nu=1}^{N_2}|\gamma_2^{(\nu)}|^2|\rho_{\overline{m}_2^{(\nu)}}(t)|^2\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\varepsilon}_{N_2}\left(\sum_{\nu=1}^{N_2}|\rho_{\overline{m}_2^{(\nu)}}(t)|^2\right)^{1/2}. \tag{23}$$

Теперь используем лемму 3:

$$\sum_{\nu=1}^{N_2}|\rho_{\overline{m}_2^{(\nu)}}(t)|^2=\sum_{m\in A_2}|\rho_m(t)|^2=|\rho_0(t)|^2+\sum_{m\in A_2\setminus\{0\}}|\rho_m(t)|^2\leqslant 1+\sum_{m\in B_{K_2}}\frac{1}{m_1^2+\ldots+m_s^2}\underset{s}{\ll}N_2^{(s-2)/s}.$$

Следовательно, продолжив неравенство (23), будем иметь оценку сверху для L^2-нормы четвертой суммы правой части (21):

$$\left\|\overline{\varepsilon}_{N_2}\sum_{\nu=1}^{N_2}(-\gamma_2^{(\nu)})\rho_{\overline{m}_2^{(\nu)}}(t)\exp\{2\pi i(\overline{m}_2^{(\nu)},\cdot\,)\}\right\|_{L^2}\underset{s,r_2}{\ll}\frac{1}{N_2^{r_2/s+1/2}}N_2^{(s-2)/(2s)}\underset{s,r_2}{\ll}\frac{1}{N_2^{(r_2+1)/s}}. \tag{24}$$

При фиксированном $t\geqslant 0$ из (15), (18), (21), (22) и (24) следует неравенство

$$\|u(\,\cdot\,,t;f_1,f_2)-\overline{\varphi}_N(\overline{l}_1^{(1)}(f_1)+\gamma_1^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_1},\ldots,\overline{l}_1^{(N_1)}(f_1)+\gamma_1^{(N_1)}\overline{\varepsilon}_{N_1},\overline{l}_2^{(1)}(f_2)+\gamma_2^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_2},\ldots$$

$$\ldots,\overline{l}_2^{(N_2)}(f_2)+\gamma_2^{(N_2)}\overline{\varepsilon}_{N_2};\,\cdot\,,t)\|_{L^2}\underset{s,r_1,r_2}{\ll}\frac{1}{N_1^{r_1/s}}+\frac{1}{N_2^{(r_2+1)/s}},$$

откуда в силу определения пространства $L^{2,\infty}$ и леммы 2 имеем

$$\triangle_N((\overline{\varepsilon}_{N_1},\overline{\varepsilon}_{N_2}),(\overline{l}^{(N_1,N_2)},\overline{\varphi}_N),H_2^{r_1},H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}}\underset{s,r_1,r_2}{\ll}N^{-\min\{r_1/s,(r_2+1)/s\}}. \tag{25}$$

Поскольку $\delta_N(L_N,H_2^{r_1},H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}}\leqslant\delta_N((\overline{l}^{(N_1,N_2)},\overline{\varphi}_N),H_2^{r_1},H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}}\leqslant$

$$\leqslant\triangle_N((\overline{\varepsilon}_{N_1},\overline{\varepsilon}_{N_2}),(\overline{l}^{(N_1,N_2)},\overline{\varphi}_N),H_2^{r_1},H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}},$$

то вследствие неравенств (20) и (25) получим соотношение (6).

Далее убедимся в справедливости (7). Для каждого $K_j\in\mathbb{N}$, $j\in\{1,2\}$, определим множество

$$G_{K_j}=\{m\in\mathbb{Z}^s:[N_j^{1/s}\beta_{K_j}^{-1/r_j}]\leqslant\|m\|\leqslant 5\cdot[N_j^{1/s}\beta_{K_j}^{-1/r_j}]\},$$

где $\beta_{K_j}=\min\{\eta_{N_j},\ln N_j\}$, $j\in\{1,2\}$.

Так как $\lim\limits_{K_j\to+\infty}\beta_{K_j}=+\infty$, то существует номер $K_j^{(0)}$ такой, что для всех $K_j\geqslant K_j^{(0)}$ имеет место неравенство

$$\beta_{K_j}\geqslant 1,\quad j\in\{1,2\}. \tag{26}$$

При каждом $K_j\geqslant K_j^{(0)}$ для функций

$$h_{K_j}(x)=\frac{\beta_{K_j}N_j^{-r_j/s-1/2}}{\sqrt{s\cdot 11^s}\cdot 5^{r_j}}\sum_{m\in G_{K_j}}\exp\{2\pi i(m,x)\}$$

из проверяемого неравенства $|G_{K_j}| \leqslant 11^s N_j \beta_{K_j}^{-s/r_j}$ и условий (26) получим цепочку неравенств

$$\|h_{K_j}\|_{W_2^{r_j}} = \sum_{m \in G_{K_j}} \beta_{K_j}^2 N_j^{-2r_j/s-1} \frac{\widetilde{m}_1^{2r_j} + \ldots + \widetilde{m}_s^{2r_j}}{s \cdot 11^s \cdot 5^{2r_j}} \leqslant$$

$$\leqslant \beta_{K_j}^2 N_j^{-2r_j/s-1} \frac{1}{s \cdot 11^s \cdot 5^{2r_j}} s (5 N_j^{1/s} \beta_{K_j}^{-1/r_j})^{2r_j} |G_{K_j}| \leqslant \beta_{K_j}^{-s/r_j} \leqslant 1.$$

С учётом $|G_{K_j}| \geqslant N_j \beta_{K_j}^{-s/r_j}$ оценим L^2-норму функции h_{K_j}, $j \in \{1, 2\}$ снизу:

$$\|h_{K_j}\|_{L^2} \underset{s,r_j}{\gg} \frac{\beta_{K_j}}{N_j^{r_j/s} \sqrt{N_j}} |G_{K_j}|^{1/2} \underset{s,r_j}{\gg} \frac{\beta_{K_j}}{N^{r_j/s} \sqrt{N_j}} \sqrt{N_j} \beta_{K_j}^{-s/(2r_j)} \underset{s,r_j}{\gg} \frac{1}{N^{r_j/s}} \beta_{K_j}^{(2r_j - s)/(2r_j)}. \tag{27}$$

Теперь рассмотрим N-мерные векторы

$$(\overline{\alpha}_1^{(1)}, \ldots, \overline{\alpha}_1^{(N_1)}, \overline{\alpha}_2^{(1)}, \ldots, \overline{\alpha}_2^{(N_2)}), \quad (\tilde{\alpha}_1^{(1)}, \ldots, \tilde{\alpha}_1^{(N_1)}, \tilde{\alpha}_2^{(1)}, \ldots, \tilde{\alpha}_2^{(N_2)}),$$

$$(\overline{\omega}_1^{(1)}, \ldots, \overline{\omega}_1^{(N_1)}, \overline{\omega}_2^{(1)}, \ldots, \overline{\omega}_2^{(N_2)}), \quad (\widetilde{\omega}_1^{(1)}, \ldots, \widetilde{\omega}_1^{(N_1)}, \widetilde{\omega}_2^{(1)}, \ldots, \widetilde{\omega}_2^{(N_2)})$$

с компонентами, определёнными равенствами:

1) $\overline{\alpha}_1^{(\tau)} = -\dfrac{\hat{h}_{K_1}(m_1^{(\tau)})}{\overline{\varepsilon}_{N_1} \eta_{N_1}}$, $\tau = \overline{1, N_1}$, и $\overline{\alpha}_2^{(\nu)} = 0$, $\nu = \overline{1, N_2}$;

2) $\tilde{\alpha}_1^{(\tau)} = -\dfrac{(-\hat{h}_{K_1})(m_1^{(\tau)})}{\overline{\varepsilon}_{N_1} \eta_{N_1}}$, $\tau = \overline{1, N_1}$, и $\tilde{\alpha}_2^{(\nu)} = 0$, $\nu = \overline{1, N_2}$;

3) $\overline{\omega}_1^{(\tau)} = 0$, $\tau = \overline{1, N_1}$, и $\overline{\omega}_2^{(\nu)} = -\dfrac{\hat{h}_{K_2}(m_2^{(\nu)})}{\overline{\varepsilon}_{N_2} \eta_{N_2}}$, $\nu = \overline{1, N_2}$;

4) $\widetilde{\omega}_1^{(\tau)} = 0$, $\tau = \overline{1, N_1}$, и $\widetilde{\omega}_2^{(\nu)} = -\dfrac{(-\hat{h}_{K_2})(m_2^{(\nu)})}{\overline{\varepsilon}_{N_2} \eta_{N_2}}$, $\nu = \overline{1, N_2}$.

Так как все компоненты указанных выше векторов по модулю не превосходят единицы и при всех значениях $\tau = \overline{1, N_1}$, $\nu = \overline{1, N_2}$ имеют место равенства

$$\hat{h}_{K_1}(m_1^{(\tau)}) + \overline{\alpha}_1^{(\tau)} \overline{\varepsilon}_{N_1} \eta_{N_1} = 0, \quad (-\hat{h}_{K_1})(m_1^{(\tau)}) + \tilde{\alpha}_1^{(\tau)} \overline{\varepsilon}_{N_1} \eta_{N_1} = 0,$$

$$\hat{h}_{K_2}(m_2^{(\nu)}) + \overline{\omega}_2^{(\nu)} \overline{\varepsilon}_{N_2} \eta_{N_2} = 0, \quad (-\hat{h}_{K_2})(m_2^{(\nu)}) + \widetilde{\omega}_2^{(\nu)} \overline{\varepsilon}_{N_2} \eta_{N_2} = 0,$$

то для всякого вычислительного агрегата $(l^{(N_1,N_2)}, \varphi_N) \in \Phi_{(N_1,N_2)}$, в силу известного вложения $W_2^r(0,1)^s \subset H_2^r(0,1)^s$ (см., например, [17, с. 230]), имеем

$$\sup_{(f_1,f_2) \in H_2^{r_1} \times H_2^{r_2}} \sup_{\substack{|\gamma_1^{(1)}| \leqslant 1, \ \ldots, \ |\gamma_1^{(N_1)}| \leqslant 1 \\ |\gamma_2^{(1)}| \leqslant 1, \ \ldots, \ |\gamma_2^{(N_2)}| \leqslant 1}} \sup_{t \geqslant 0} \|u(\cdot\,; t; f_1, f_2) - \overline{\varphi}_N(\hat{f}_1(m_1^{(1)}) + \gamma_1^{(1)} \overline{\varepsilon}_{N_1} \eta_{N_1}, \ldots$$

$$\ldots, \hat{f}_1(m_1^{(N_1)}) + \gamma_1^{(N_1)} \overline{\varepsilon}_{N_1} \eta_{N_1}, \hat{f}_2(m_2^{(1)}) + \gamma_2^{(1)} \overline{\varepsilon}_{N_2} \eta_{N_2}, \ldots, \hat{f}_2(m_2^{(N_2)}) + \gamma_2^{(N_2)} \overline{\varepsilon}_{N_2} \eta_{N_2}; \cdot\,, t)\|_{L^2} \geqslant$$

$$\geqslant \max\{\|u(\,\cdot\,, 0; h_{K_1}, 0) - \varphi_N(\hat{h}_{K_1}(m_1^{(1)}) + \overline{\alpha}_1^{(1)} \overline{\varepsilon}_{N_1} \eta_{N_1}, \ldots$$

$$\ldots, \hat{h}_{K_1}(m_1^{(N_1)}) + \overline{\alpha}_1^{N_1} \overline{\varepsilon}_{N_1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{N_2}; \cdot\,, 0)\|_{L^2}, \|u(\,\cdot\,, 0; (-h_{K_1}), 0) - \varphi_N((-\hat{h}_{K_1})(m_1^{(1)}) +$$

$$+ \tilde{\alpha}_1^{(1)} \overline{\varepsilon}_{N_1} \eta_{N_1}, \ldots, (-\hat{h}_{K_1})(m_1^{(N_1)}) + \tilde{\alpha}_1^{(N_1)} \overline{\varepsilon}_{N_1} \eta_{N_1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{N_2}; \cdot\,, 0)\|_{L^2}\} =$$

$$= \max\{\|u(\,\cdot\,,0;h_{K_1},0)-\varphi_N(0,\ldots,0;\cdot\,,0)\|_{L^2}, \|u(\,\cdot\,,0;(-h_{K_1}),0)-\varphi_N(0,\ldots,0;\cdot\,,0)\|_{L^2}\} \geqslant$$

$$\geqslant \|u(\,\cdot\,,0;h_{K_1},0)\|_{L^2} \geqslant \Big(\sum_{m\in H_{K_1}} |\hat h_{K_1}(m)|^2|\rho'_m(0)|^2\Big)^{1/2} = \|h_{K_1}\|_{L^2}.$$

Следовательно, в силу (27) получаем

$$\sup_{(f_1,f_2)\in H_2^{r_1}\times H_2^{r_2}} \sup_{\substack{|\gamma_1^{(1)}|\leqslant 1,\ \ldots,\ |\gamma_1^{(N_1)}|\leqslant 1\\ |\gamma_2^{(1)}|\leqslant 1,\ldots,|\gamma_2^{(N_2)}|\leqslant 1}} \|u(\cdot\,;f_1,f_2)-$$

$$-\overline{\varphi}_N(\hat f_1(m_1^{(1)})+\gamma_1^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_1}\eta_{N_1},\ldots,\hat f_1(m_1^{(N_1)})+\gamma_1^{(N_1)}\overline{\varepsilon}_{N_1}\eta_{N_1},\hat f_2(m_2^{(1)})+\gamma_2^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_2}\eta_{N_2},\ldots$$

$$\ldots,\hat f_2(m_2^{(N_2)})+\gamma_2^{(N_2)}\overline{\varepsilon}_{N_2}\eta_{N_2};\cdot)\|_{L^{2,\infty}} \underset{s,r_1}{\gg} \frac{1}{N_1^{r_1/s}}\beta_{K_1}^{(2r_1-s)/(2r_1)}. \tag{28}$$

Пусть $t_0=\beta_{K_2}^{1/r_2}/(15\pi\sqrt{s}N_2^{1/s})$. Тогда для всех $m\in G_{K_2}$ имеют место неравенства

$$\frac{1}{15\sqrt{s}} \leqslant t_0\sqrt{4\pi^2(m_1^2+\ldots+m_s^2)+1}\leqslant 1,$$

откуда следует

$$\sin\Big(t_0\sqrt{4\pi^2(m_1^2+\ldots+m_s^2)+1}\Big)\geqslant \sin\frac{1}{15\sqrt{s}},\quad m\in G_{K_2}. \tag{29}$$

В силу равенства Парсеваля с учётом (27) и (29) имеем

$$\|u(\,\cdot\,,t_0;0,h_{K_2})\|_{L^2} = \Big(\sum_{m\in G_{K_2}} |\hat h_{K_2}(m)|^2|\rho_m(t_0)|^2\Big)^{1/2} =$$

$$= \Big(\sum_{m\in G_{K_2}} |\hat h_{K_2}(m)|^2\frac{\sin^2(t_0\sqrt{4\pi^2(m_1^2+\ldots+m_s^2)+1})}{4\pi^2(m_1^2+\ldots+m_s^2)+1}\Big)^{1/2} \underset{s,r_2}{\gg}$$

$$\underset{s,r_2}{\gg} \frac{\beta_{K_2}^{1/r_2}}{N_2^{1/s}}\|h_{K_2}\|_{L^2} \underset{s,r_2}{\gg} \frac{\beta_{K_2}^{(2r_2-s)/(2r_2)+1/r_2}}{N_2^{(r_2+1)/s}}. \tag{30}$$

Поскольку

$$\sup_{(f_1,f_2)\in H_2^{r_1}\times H_2^{r_2}} \sup_{\substack{|\gamma_1^{(1)}|\leqslant 1,\ \ldots,\ |\gamma_1^{(N_1)}|\leqslant 1\\ |\gamma_2^{(1)}|\leqslant 1,\ \ldots,\ |\gamma_2^{(N_2)}|\leqslant 1}} \sup_{t\geqslant 0}\|u(\,\cdot\,,t;f_1,f_2)-\varphi_N(\hat f_1(m_1^{(1)})+\gamma_1^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_1}\eta_{N_1},\ldots$$

$$\ldots,\hat f_1(m_1^{(N_1)})+\gamma_1^{(N_1)}\overline{\varepsilon}_{N_1}\eta_{N_1},\hat f_2(m_2^{(1)})+\gamma_2^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_2}\eta_{N_2},\ldots,\hat f_2(m_2^{(N_2)})+\gamma_2^{(N_2)}\overline{\varepsilon}_{N_2}\eta_{N_2};\cdot\,,t)\|_{L^2}\geqslant$$

$$\geqslant \max\{\|u(\,\cdot\,,t_0;0,h_{K_2})-\varphi_N(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{N_1},\hat h_{K_2}(m_2^{(1)})+\overline{\omega}_2^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_2}\eta_{N_2},\ldots$$

$$\ldots,\hat h_{K_2}(m_2^{(N_2)})+\overline{\omega}_2^{N_2}\overline{\varepsilon}_{N_2};\cdot\,,t_0)\|_{L^2},\|u(\,\cdot\,,t_0;0,(-h_{K_2}))-\varphi_N(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{N_1},(-\hat h_{K_2})(m_2^{(1)})+$$

$$+\widetilde{\omega}_2^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_2}\eta_{N_2},\ldots,(-\hat h_{K_2})(m_2^{(N_2)})+\widetilde{\omega}_2^{(N_2)}\overline{\varepsilon}_{N_2}\eta_{N_2};\cdot\,,t_0)\|_{L^2}\}=$$

$$=\max\{\|u(\,\cdot\,,t_0;0,h_{K_2})-\varphi_N(0,\ldots,0;\cdot\,,t_0)\|_{L^2},\|u(\,\cdot\,,t_0;0,(-h_{K_2}))-\varphi_N(0,\ldots,0;\cdot\,,t_0)\|_{L^2}\}\geqslant$$

$$\geqslant \|u(\,\cdot\,,t_0;0,h_{K_2})\|_{L^2},$$

то, приняв во внимание (30), получаем

$$\sup_{(f_1,f_2)\in H_2^{r_1}\times H_2^{r_2}} \sup_{\substack{|\gamma_1^{(1)}|\leqslant 1,\ \ldots,\ |\gamma_1^{(N_1)}|\leqslant 1\\ |\gamma_2^{(1)}|\leqslant 1,\ \ldots,\ |\gamma(N_2)_2|\leqslant 1}} \|u(\cdot\,; f_1, f_2) - \varphi_N(\hat{f}_1(m_1^{(1)}) + \gamma_1^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_1}\eta_{N_1}, \ldots$$

$$\ldots, \hat{f}_1(m_1^{(N_1)}) + \gamma_1^{(N_1)}\overline{\varepsilon}_{N_1}\eta_{N_1}, \hat{f}_2(m_2^{(1)}) + \gamma_2^{(1)}\overline{\varepsilon}_{N_2}\eta_{N_2}, \ldots, \hat{f}_2(m_2^{(N_2)}) + \gamma_2^{(N_2)}\overline{\varepsilon}_{N_2}\eta_{N_2}; \cdot)\|_{L^{2,\infty}} \underset{s,r_2}{\gg}$$

$$\underset{s,r_2}{\gg} \frac{\beta_{K_2}^{(2r_2-s)/(2r_2)+1/r_2}}{N_2^{(r_2+1)/s}}. \tag{31}$$

Из неравенств (28) и (31) следует

$$\triangle_N((\eta_{N_1}\overline{\varepsilon}_{N_1}, \eta_{N_2}\overline{\varepsilon}_{N_2}), (l^{(N_1,N_2)}, \varphi_N), H_2^{r_1}, H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}} \underset{s,r_1,r_2}{\gg}$$

$$\underset{s,r_1,r_2}{\gg} (N_1^{-r_1/s} + N_2^{-(r_2+1)/s}) \min\{\beta_{K_1}^{\theta_1}, \beta_{K_2}^{\theta_2}\}, \tag{32}$$

где $\theta_1 = (2r_1 - s)/(2r_1)$, $\theta_2 = (2r_2 - s)/(2r_2) + 1/r_2$.

Поскольку $\delta_N(L_N, H_2^{r_1}, H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}} \underset{s,r_1,r_2}{\ll} (N_1^{-r_1/s} + N_2^{-(r_2+1)/s})$, то с учётом (32) имеем

$$\triangle_N((\eta_{N_1}\overline{\varepsilon}_{N_1}, \eta_{N_2}\overline{\varepsilon}_{N_2}), (l^{(N_1,N_2)}, \varphi_N), H_2^{r_1}, H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}} \underset{s,r_1,r_2}{\gg}$$

$$\underset{s,r_1,r_2}{\gg} \delta_N(L_N, H_2^{r_1}, H_2^{r_2})_{L^{2,\infty}} \min\{\beta_{K_1}^{\theta_1}, \beta_{K_2}^{\theta_2}\},$$

отсюда, в силу равенства $\lim\limits_{\substack{K_1\to\infty\\ K_2\to\infty}} \min\{\beta_{K_1}^{\theta_1}, \beta_{K_2}^{\theta_2}\} = +\infty$, вытекает соотношение (7). Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1981.
2. *Коробов Н.М.* Теоретико-числовые методы в приближённом анализе. М., 1963.
3. *Жилейкин Я.М.* О приближённом решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа // Докл. АН СССР. 1964. Т. 155. № 5. С. 999–1002.
4. *Loo Keng Hua, Yang Wang.* Application of Number Theory to Numerical Analysis. Berlin; Heidelberg; New York, 1981.
5. *Смоляк С.А.* Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148. № 5. С. 1042–1045.
6. *Sickel W., Ullrich T.* The Smolyak's algorithm, sampling, on spars grids and function spaces of dominating mixed smoothness // East J. Approx. 2007. V. 13. № 4. P. 287–425.
7. *Naurizbayev N.,Temirgaliyev N.* An exact order of discrepancy of the Smolyak grid and some general conclusions in the theory of numerical integration // Found. Comput. Math. 2012. V. 12. P. 139–172.
8. *Кудайбергенов С.С., Сабитова С.Г.* О дискретизации решений уравнения Пуассона на классе Коробова // Журн. вычислит. математики. и мат. физики. 2013. Т. 13. № 7. С. 1082–1093.
9. *Темиргалиев Н., Таугынбаева Г.Е., Абикенова Ш.К.* Дискретизация решений уравнений в частных производных в контексте Компьютерного (вычислительного) поперечника // Вестн. Евразийск. нац. ун-та. Сер. Математика. Информатика. Механика. 2019. Т. 126. № 1. С. 8–51.
10. *Темиргалиев Н., Жубанышева А.Ж.* Компьютерный (вычислительный) поперечник в контексте общей теории восстановления // Изв. вузов. Математика. 2019. № 1. С. 89–97.
11. *Абикенова Ш.К.,Темиргалиев Н.* О точном порядке информативной мощности всех возможных линейных функционалов при дискретизации решений волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 8. С. 1201–1204.

12. *Абикенова Ш.К., Утесов А.Б., Темиргалиев Н.* О дискретизации решений волнового уравнения с начальными условиями из обобщённых классов Соболева // Мат. заметки. 2012. Т. 91. № 3. С. 459–463.
13. *Абикенова Ш.К.* Дискретизация периодических решений волнового уравнения с начальными условиями из классов $W_2^r(0,1)^s$, $W_2^{\omega_{r_1},\ldots,\omega_{r_s}}(0,1)^s$ и E_s^r: дис. … канд. физ.-мат. наук. Астана, 2010.
14. *Утесов А.Б., Базарханова А.А.* Об оптимальной дискретизации решений уравнения теплопроводности и предельной погрешности оптимального вычислительного агрегата // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 12. С. 1705–1714.
15. *Ибатулин И.Ж., Темиргалиев Н.* Об информативной мощности всех возможных линейных функционалов при дискретизации решений уравнения Клейна–Гордона в метрике $L^{2,\infty}$ // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 4. С. 491–506.
16. *Темиргалиев Н., Шерниязов К.Е., Берикханова М.Е.* Точные порядки компьютерных (вычислительных) поперечников в задачах восстановления функций и дискретизации решений уравнения Клейна–Гордона по коэффициентам Фурье // Совр. проблемы математики. 2013. Вып. 17. Математика и информатика. 2. К 75-летию со дня рождения А.А. Карацубы. С. 179–207.
17. *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М., 1977.

Актюбинский региональный университет
им. К. Жубанова, г. Актобе, Казахстан,
Назарбаев университет,
г. Нур-Султан, Казахстан

Поступила в редакцию 24.01.2022 г.
После доработки 25.03.2022 г.
Принята к публикации 21.04.2022 г.