ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 5, с. 717–720

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.928

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЧЁТНОГО ПОРЯДКА С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2022 г. **Я. Т. Султанаев, А. Р. Сагитова, Б. И. Марданов**

Исследуется асимптотическое поведение решений обыкновенного сингулярного дифференциального уравнения произвольного нечётного порядка. При этом потенциал в уравнении может быть либо быстро осциллирующей функцией, либо обобщённой функцией. С помощью специальных квазипроизводных уравнение сводится к системе дифференциальных уравнений первого порядка, которая приводится к L-диагональному виду последовательным применением преобразований Хаусдорфа.

DOI: 10.31857/S0374064122050119, EDN: CBWEDY

Введение. Рассмотрим уравнение

$$iy^{(2n-1)}(x) + q(x)y(x) = i\lambda y, \quad x \in [x_0, +\infty), \tag{1}$$

для которого исследуем асимптотическое поведение фундаментальной системы его решений при $x \to +\infty$. Отметим, что если функция $q(x)$ суммируема на бесконечности, то она не влияет на асимптотику решений (см. [1, с. 316]). Основная цель – выделить новый широкий класс функций $q(x)$, не влияющих на асимптотику решений уравнения (1). При этом будет предложен новый подход к построению асимптотических формул для решений, состоящий в переходе от уравнения (1) к уравнению в квазипроизводных, рассматриваемому в статье [2], которое заменяется эквивалентной системой дифференциальных уравнений первого порядка. Затем к этой системе применяется преобразование Хаусдорфа (см. [3]), причём это преобразование применяется до тех пор, пока не получится L-диагональная система, асимптотика которой хорошо известна [1]. Отметим, что аналогичные вопросы для уравнения чётного порядка с помощью иных методов изучались в работах [4] и [5]. Итак, будем рассматривать уравнение (1) при следующих условиях на функцию $q(x)$: пусть $q(x) = q_3'''(x)$, $q_1(x) = q_3''(x)$, $q_2(x) = q_3'(x)$, $q_3(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}[x_0, +\infty)$. Если $q(x)$ – обобщённая функция, то производные понимаются в смысле теории распределения. Запишем уравнение (1) в виде

$$y^{(2n-1)} - iq(x)y = \lambda y,$$

откуда получим уравнение

$$(y^{(2n-2)} - iq_1(x)y)' + iq_1(x)y' = \lambda y. \tag{2}$$

Введём в рассмотрение вектор-функцию

$$z = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(2n-3)} \\ y^{(2n-2)} - iq_1 y \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (2) будет эквивалентно системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -iq_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\lambda & iq_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} z. \tag{3}$$

Введём постоянные матрицы

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

в результате чего матрица коэффициентов $A_0(x;\lambda)$ в системе (3) запишется в виде $A_0 = L_0 + {}$ $+ iq_1(x)D$.

С помощью замены

$$z(x;\lambda) = e^{iq_2(x)D}u(x;\lambda)$$

представим систему (3) в виде

$$\frac{d}{dx}u\big(x;\lambda\big) = e^{-iq_2(x)D}L_0e^{iq_2(x)D}u(x;\lambda).$$

Воспользуемся тождеством Хаусдорфа и получим

$$e^{-iq_2(x)D}L_0e^{iq_2(x)D} = L_0 - iq_2(x)[L_0,D] - \frac{1}{2!}q_2^2(x)[[L_0,D],D] + \frac{1}{3!}iq_2^3(x)[[[L_0,D],D],D] + \ldots,$$

где $[A,B] = AB - BA$. Обозначим первый из коммутаторов через L_{01}, второй – L_{02} и т.д.

С помощью вычислений найдём

$$L_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad L_{0k} = 0, \quad \forall k > 1.$$

Таким образом, имеем систему

$$\frac{d}{dx}u(x;\lambda) = (L_0 - iq_2(x)L_{01})u(x;\lambda). \tag{4}$$

Далее, положив

$$u(x;\lambda) = e^{iq_3(x)L_{01}}v(x;\lambda),$$

получим следующую систему:

$$\frac{d}{dx}v(x;\lambda) = e^{-iq_3(x)L_{01}}L_0e^{iq_3(x)L_{01}}v(x;\lambda).$$

Согласно тождеству Хаусдорфа

$$e^{-iq_3(x)L_{01}}L_0e^{iq_3(x)L_{01}} = L_0 - iq_3(x)[L_0,L_{01}] - \frac{1}{2!}q_3^2(x)[[L_0,L_{01}],L_{01}] +$$

$$+ \frac{1}{3!}iq_3^3(x)[[[L_0,L_{01}],L_{01}],L_{01}] + \ldots$$

В результате вычисления будем иметь

$$K_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad K_{0m} = 0, \quad \forall m > 1.$$

Таким образом, приходим к системе

$$\frac{d}{dx} v(x;\lambda) = (L_0 - iq_3(x)K_{01})v(x;\lambda). \tag{5}$$

Заметим, что уравнения (4) и (5) имеют одинаковый вид

$$w'(x;\lambda) = (L_0 + G)w(x;\lambda), \tag{6}$$

где L_0 – постоянная матрица. Следовательно, если матрица G суммируема на бесконечности, то она не будет влиять на главный член асимптотики решений системы уравнений (6), что равносильно тому, что и функция $q(x)$ не будет влиять на асимптотику решений уравнения (1). Таким образом, доказана

Теорема. *Пусть $q_2(x)$ или $q_3(x)$ – комплекснозначные локально интегрируемые на промежутке $[x_0, +\infty)$ функции. Тогда фундаментальная система решений уравнения (1) при больших x ведет себя в главном как фундаментальная система решений укороченного уравнения $iy^{(2n-1)}(x) = i\lambda y(x)$, если либо $q_2(x) \in L[x_0, +\infty)$, либо $q_3(x) \in L[x_0, +\infty)$.*

Пример 1. Пусть функция $q_2(x)$ выражается через $q(x)$ в виде двойного несобственного интеграла, а $q_3(x)$ – в виде тройного интеграла, которые рассматриваются в смысле условной сходимости. Если $q(x) = x^\alpha \sin e^x$, то несложные выкладки с помощью интегрирования по частям показывают, что $q(x)$ не влияет на главный член асимптотики решений уравнения (1) при любом значении α. Если $q(x) = x^\alpha \sin x^\beta$, то случай $\alpha < -1$ неинтересный, так как $q(x)$ будет суммируемой функцией на бесконечности. Если же $\alpha \geqslant -1$, то $q_3(x)$ суммируема на бесконечности при $\beta > \alpha/3 + 4/3$, а $q_2(x)$ суммируема на бесконечности при значениях $\beta > \alpha/2 + 3/2$. Сравнивая два последних неравенства, получаем, что для $\alpha \geqslant -1$ $q(x)$ не влияет на главный член асимптотики решений уравнения (1), если $\beta > \alpha/3 + 4/3$.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$iy'''(x) + \delta'(x)y(x) = i\lambda y(x).$$

В данном случае $q(x) = \delta'(x)$, $q_1(x) = \delta(x)$, $q_2(x) = \Theta(x)$, $q_2^2(x) = q_2^3(x) = \Theta(x)$. Система (4), записанная для данного примера, будет иметь матрицу, элементы которой являются кусочно-постоянными функциями, а значит, допускает существование явного решения $u(x;\lambda)$, которое мы не будем приводить в силу громоздкости выкладок, и в результате получим

$$z(x;\lambda) = e^{i\Theta(x)D}u(x;\lambda).$$

Замечание. В работе [6] изучена асимптотика решений уравнения (1) для случаев производной третьего и пятого порядков. Показано, что для уравнений третьего порядка ряд Хаусдорфа не обрывается, но легко суммируется в силу циклического характера его членов. Для уравнения пятого порядка ряд Хаусдорфа обрывается на втором члене. Полученный результат относится к уравнениям произвольного нечётного порядка. Для уравнений порядка не менее семи ряд Хаусдорфа обрывается на первом члене.

Исследование Я.Т. Султанаева выполнено при поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект AP08856104) и финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение № 075-15-2019-1621).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
2. *Everitt W.N., Marcus L.* Boundary value problem and symplectic algebra for ordinary differential and quasi-differential operators // Math. Surveys and Monographs. 1999. V. 61. P. 1–60.
3. *Валеев Н.Ф., Назирова Э.А., Султанаев Я.Т.* О новом подходе к изучению асимптотического поведения решений сингулярных дифференциальных уравнений // Уфимский мат. журн. 2015. Т. 7. № 3. С. 9–15.
4. *Мирзоев К.А., Шкаликов А.А.* Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями // Мат. заметки. 2016. Т. 99. Вып. 5. С. 788–793.
5. *Савчук А.М., Шкаликов А.А.* Асимптотический анализ решений обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями // Мат. сб. 2020. Т. 211. № 11. С. 129–166.
6. *Валеев Н.Ф., Назирова Э.А., Султанаев Я.Т.* Об одном методе исследования асимптотики решений дифференциальных уравнений нечетного порядка с осциллирующими коэффициентами // Мат. заметки. 2021. Т. 109. Вып. 6. С. 938–943.

Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, г. Уфа,
Башкирский государственный университет, г. Уфа

Поступила в редакцию 28.03.2022 г.
После доработки 28.03.2022 г.
Принята к публикации 21.04.2022 г.