ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 6, с. 723–732

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.938

УПАКОВОЧНЫЕ РАЗМЕРНОСТИ БАССЕЙНОВ, ПОРОЖДЁННЫХ ИНВАРИАНТНЫМИ МЕРАМИ НА ПРОСТРАНСТВЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

© 2022 г. В. И. Бахтин, Б. М. Садок

Рассматривается отображение левого сдвига на пространстве бесконечных сигналов $X^{\mathbb{N}}$, составленных из букв конечного алфавита X. Для каждого сигнала итерации сдвигов порождают последовательность эмпирических мер на $X^{\mathbb{N}}$ и отвечающее этой последовательности предельное множество. Это множество компактно, связно и состоит из инвариантных вероятностных мер. Всё фазовое пространство $X^{\mathbb{N}}$ разбивается на *узкие бассейны*, состоящие из сигналов с одинаковыми предельными множествами для последовательности эмпирических мер, и для каждого узкого бассейна вычисляется упаковочная размерность.

DOI: 10.31857/S0374064122060012, EDN: CBXHEW

Введение. Рассмотрим множество $X=\{1,\ldots,r\}$. Ниже оно будет называться *алфавитом*, а его элементы – *буквами*. Всякие последовательности букв (конечные и бесконечные) будем называть *сигналами*. Совокупность конечных сигналов длины n естественно обозначить как X^n, а множество всех бесконечных сигналов как

$$X^{\mathbb{N}}=\{x=(x_1,x_2,\ldots):x_i\in X\}.$$

Любую начальную часть сигнала будем называть его *префиксом*.

Фиксируем на $X^{\mathbb{N}}$ топологию декартова произведения, порождённую дискретной топологией на множестве X. По теореме Тихонова [1, приложение, § 7, с. 417] пространство $X^{\mathbb{N}}$ с этой топологией компактно.

Определим на $X^{\mathbb{N}}$ отображение левого сдвига T:

$$T(x_1,x_2,x_3,\ldots)=(x_2,x_3,x_4,\ldots).$$

Пусть $M(X^{\mathbb{N}})$ обозначает совокупность всех (борелевских) вероятностных мер на топологическом пространстве $X^{\mathbb{N}}$, а $M_T(X^{\mathbb{N}})$ – совокупность всех T-инвариантных вероятностных мер на $X^{\mathbb{N}}$ (мера μ называется *инвариантной*, если для любого измеримого множества A выполняется равенство $\mu(T^{-1}A)=\mu(A)$). Очевидно, что оба множества $M(X^{\mathbb{N}})$ и $M_T(X^{\mathbb{N}})$ выпуклы. В силу теоремы Алаоглу [1, гл. IX, § 59, с. 389] они компактны (в слабой топологии, порождённой непрерывными функциями на $X^{\mathbb{N}}$).

Для каждого бесконечного сигнала $x\in X^{\mathbb{N}}$ обозначим через δ_x единичную меру, сосредоточенную в точке x. Определим также последовательность *эмпирических мер* $\delta_{x,n}\in M(X^{\mathbb{N}})$ по правилу

$$\delta_{x,n}=\frac{\delta_x+\delta_{Tx}+\ldots+\delta_{T^{n-1}x}}{n}.$$

Пусть $V(x)$ – множество всех предельных точек последовательности $\delta_{x,n}$. В силу компактности $M(X^{\mathbb{N}})$ это множество непусто и компактно. Ниже (см. леммы 1, 2) будет доказано, что оно связно и содержится в $M_T(X^{\mathbb{N}})$.

Каждое множество инвариантных мер $W\subset M_T(X^{\mathbb{N}})$ порождает следующие подмножества в пространстве $X^{\mathbb{N}}$: *бассейн* $B(W)$, *узкий бассейн* $NB(W)$ и *широкий бассейн* $WB(W)$, определяемые соответственно формулами

$$B(W)=\{x\in X^{\mathbb{N}}:V(x)\subset W\},$$

$$NB(W) = \{x \in X^{\mathbb{N}} : V(x) = W\},$$
$$WB(W) = \{x \in X^{\mathbb{N}} : V(x) \bigcap W \neq \varnothing\}.$$

Иначе говоря, $B(W)$ – это совокупность таких бесконечных сигналов x, для которых множество предельных точек последовательности эмпирических мер $\delta_{x,n}$ содержится в W, $NB(W)$ – это совокупность таких бесконечных сигналов x, для которых множество предельных точек последовательности $\delta_{x,n}$ совпадает с W, а $WB(W)$ – это совокупность таких бесконечных сигналов x, для которых последовательность $\delta_{x,n}$ имеет хотя бы одну предельную точку в W. При этом очевидно, что

$$NB(W) \subset B(W) \subset WB(W) \subset X^{\mathbb{N}}.$$

Из упомянутой выше компактности и связности $V(x)$ следует, что узкий бассейн может быть непуст только тогда, когда множество W непусто, компактно и связно. С другой стороны, для любого непустого связного компакта $W \subset M_T(X)$ порождённый им узкий бассейн $NB(W)$ действительно непуст (это будет доказано в п. 3, где будет построено некоторое непустое подмножество $D_\infty \subset NB(W)$). Что касается бассейнов $B(W)$ и $WB(W)$, то они непусты для любого $W \neq \varnothing$ (поскольку содержат узкие бассейны $NB(\mu)$ для всех $\mu \in W$).

Всякий бесконечный сигнал x однозначно определяет множество $V(x)$. Поэтому узкие бассейны, отвечающие разным множествам W, не пересекаются между собой. Таким образом, все пространство бесконечных сигналов $X^{\mathbb{N}}$ оказывается разбито на узкие бассейны, порождённые всевозможными связными компактами $W \subset M_T(X)$. Однако бассейны двух других типов могут иметь непустые пересечения.

Зафиксируем набор чисел $\theta = (\theta(1), \theta(2), \ldots, \theta(r)) \in (0,1)^r$ (по одному числу $\theta(i)$ для каждой буквы $i \in X$). Определим с его помощью метрику ρ на пространстве бесконечных сигналов $X^{\mathbb{N}}$ следующим образом:

$$\rho(x,y) = \prod_{t=1}^{n} \theta(x_t), \quad \text{где} \quad n = \inf\{t : x_t \neq y_t\} - 1 \tag{1}$$

(здесь n – длина наибольшего общего префикса x и y).

Введём в рассмотрение функцию

$$S(\mu,\theta) = h(\mu) \Big/ \biggl(-\sum_{i\in X} \mu(i) \ln \theta(i)\biggr), \quad \mu \in M_T(X^{\mathbb{N}}),$$

где $h(\mu)$ обозначает *энтропию* меры μ (определение см., например, в [2, гл. 2, с. 75]), а $\mu(i)$ обозначает меру множества всех бесконечных сигналов, начинающихся с буквы i. Известно [3, гл. 6, с. 133], что энтропия аффинна и полунепрерывна сверху (в слабой топологии) по отношению к аргументу $\mu \in M_T(X^{\mathbb{N}})$, поэтому функция $S(\mu,\theta)$ полунепрерывна сверху по отношению к μ.

Целью данной статьи является доказательство следующих двух теорем об упаковочных размерностях бассейнов.

Теорема 1. *Пусть на пространстве $X^{\mathbb{N}}$ задана метрика (1). Тогда для любого непустого связного компакта $W \subset M_T(X^{\mathbb{N}})$ имеет место равенство*

$$\dim_P NB(W) = \sup_{\mu\in W} S(\mu,\theta), \tag{2}$$

где $\dim_P$ обозначает упаковочную размерность.

Теорема 2. *Для любого непустого подмножества $W \subset M_T(X^{\mathbb{N}})$ справедливы равенства*

$$\dim_P B(W) = \sup_{\mu\in W} S(\mu,\theta), \tag{3}$$

$$\dim_P WB(W) = \dim_P X^{\mathbb{N}} = \sup_{\mu\in M_T(X^{\mathbb{N}})} S(\mu,\theta). \tag{4}$$

Замечание 1. В статье [4] аналогичные теоремы были доказаны в более простой ситуации, когда эмпирические меры $\delta_{x,n}$ определяются не на фазовом пространстве $X^{\mathbb{N}}$, а на алфавите X, и, соответственно, множества $V(x)$ и W содержатся в $M(X)$. Разумеется, в этом случае разбиение $X^{\mathbb{N}}$ на узкие бассейны оказывается грубее.

Работа имеет следующую структуру. В п. 1 определяются упаковочные размерности множеств, локальные размерности мер и формулируется теорема о связях между ними. В п. 2 доказываются топологические леммы и формулируется так называемая "информационная" теорема, необходимые для доказательства теорем 1 и 2. В п. 3 конструируется модельное множество сигналов, содержащееся в узком бассейне. В п. 4 доказывается нижняя оценка для упаковочных размерностей модельного множества и узкого бассейна с помощью локальных размерностей мер. В последнем п. 5 доказывается верхняя оценка для упаковочной размерности узкого бассейна, из которой затем выводятся теоремы 1, 2.

1. Упаковочные размерности множеств и локальные размерности мер. Важнейшей характеристикой фрактального множества является его дробная размерность. В настоящий момент известно несколько различных типов дробных размерностей (см., например, [5]), среди которых второй по популярности (после хаусдорфовой) является упаковочная размерность. Напомним её определение из [5].

Упаковкой множества A в метрическом пространстве M называется любой конечный или счётный набор шаров $B(x_i,r_i)$ с центрами $x_i\in A$ и радиусами r_i, для которых выполняется условие $\rho(x_i,x_j)>r_i+r_j$ при $i\ne j$. Упаковку, состоящую из шаров радиуса не больше ε, будем называть *ε-упаковкой*.

Для всякого $s>0$ положим

$$C^s_\varepsilon(A)=\sup\Biggl\{\sum_i r_i^s : \text{шары } B(x_i,r_i) \text{ образуют } \varepsilon\text{-упаковку } A\Biggr\}.$$

Очевидно, что величина $C^s_\varepsilon(A)$ не возрастает при уменьшении ε. Поэтому существует предел

$$C^s(A)=\lim_{\varepsilon\to0}C^s_\varepsilon(A), \tag{5}$$

который мы будем называть *ёмкостью* (размерности s) множества A.

Упаковочной мерой (размерности s) множества A называется число

$$P^s(A)=\inf\Biggl\{\sum_i C^s(A_i) : \text{множества } A_i \text{ образуют счётное покрытие } A\Biggr\}, \tag{6}$$

а его *упаковочная размерность* определяется как

$$\dim_P A=\inf\{s>0: P^s(A)=0\}.$$

Пусть на метрическом пространстве M задана борелевская мера μ. Функция

$$D_\mu(x)=\limsup_{r\to0+0}\frac{\ln\mu(B(x,r))}{\ln r},\quad x\in M, \tag{7}$$

называется *верхней локальной размерностью* меры μ.

Следующая теорема является техническим инструментом, позволяющим вычислять упаковочные размерности множеств с помощью локальных размерностей мер.

Теорема 3 [5, утверждение 2.3]. *Если для подмножества $A\subset M$ существует такая конечная борелевская мера μ на M, что $D_\mu(x)\leqslant s$ для всех точек $x\in A$, то тогда $\dim_P A\leqslant s$. С другой стороны, если $D_\mu(x)\geqslant s$ для всех $x\in A$ и при этом внешняя мера $\mu^*(A)$ положительна, то в таком случае $\dim_P A\geqslant s$.*

Замечание 2. Формально в монографии [5] теорема 3 доказана лишь для подмножеств A евклидова пространства, однако на самом деле приведённое там доказательство годится для любого метрического пространства.

2. Топологические леммы и информационная теорема. Для функций $f \in C(X^{\mathbb{N}})$ и мер $\mu \in M(X^{\mathbb{N}})$ введём обозначение

$$\mu[f] = \int\limits_{X^{\mathbb{N}}} f\, d\mu.$$

В частности, для эмпирической меры $\mu = \delta_{x,n}$ будет выполняться

$$\delta_{x,n}[f] = \frac{\delta_x[f] + \delta_{Tx}[f] + \ldots + \delta_{T^{n-1}x}[f]}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x). \tag{8}$$

Лемма 1. *Пусть $x \in X^{\mathbb{N}}$ и последовательность эмпирических мер $\delta_{x,n}$ имеет предельную точку μ (в слабой топологии). Тогда $\mu \in M_T(X^{\mathbb{N}})$.*

Доказательство. Для $f \in C(X^{\mathbb{N}})$ в силу (8) справедливы равенства

$$\delta_{x,n}[f] - \delta_{x,n}[f \circ T] = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^{i+1}x) = \frac{f(x) - f(T^n x)}{n}.$$

Из них в пределе получается

$$\mu[f] - \mu[f \circ T] = 0, \quad f \in C(X^{\mathbb{N}}).$$

Последнее тождество равносильно инвариантности меры μ. Лемма доказана.

Из этой леммы следует, что множество $V(x)$, состоящее из всех предельных точек последовательности $\delta_{x,n}$, содержится в $M_T(X^{\mathbb{N}})$.

Лемма 2. *Для всякого $x \in X^{\mathbb{N}}$ множество $V(x)$ связно.*

Доказательство. Заметим, что для любой функции $f \in C(X^{\mathbb{N}})$

$$\delta_{x,n}[f] - \delta_{x,n+1}[f] = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) - \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(T^i x) = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) - \frac{1}{n+1} f(T^n x),$$

откуда следует, что

$$|\delta_{x,n}[f] - \delta_{x,n+1}[f]| \leqslant \frac{2\|f\|}{n+1}. \tag{9}$$

Очевидно, что множество $V(x)$ замкнуто. Предположим, что оно не связно. Тогда его можно представить как объединение двух непустых непересекающихся замкнутых подмножеств: $V(x) = V_0 \bigsqcup V_1$. По лемме Урысона существует непрерывная функция F на $M(X^{\mathbb{N}})$ со значениями в отрезке $[0,1]$, равная тождественному нулю на V_0 и тождественной единице на V_1.

Из (9) и компактности множества $M(X^{\mathbb{N}})$ вытекает, что

$$F(\delta_{x,n}) - F(\delta_{x,n+1}) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{10}$$

Выберем произвольные меры $\mu_0 \in V_0$ и $\mu_1 \in V_1$. По определению множества $V(x)$ они являются предельными точками последовательности $\delta_{x,n}$. Следовательно, значения $F(\mu_0) = 0$ и $F(\mu_1) = 1$ будут предельными для последовательности $F(\delta_{x,n})$. Из этого факта и (10) вытекает, что любое значение между нулём и единицей, в том числе $1/2$, тоже будет предельным для $F(\delta_{x,n})$. Поэтому у последовательности $\delta_{x,n}$ существует такая предельная точка μ, для которой $F(\mu) = 1/2$. Поскольку $\mu \in V(x)$, это противоречит определению функции F. Значит, множество $V(x)$ связно. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть W – непустое компактное и связное подмножество метрического пространства (M, ρ) и функция $h\colon M \to \mathbb{R}$ полунепрерывна сверху. Тогда существует последовательность точек $x_i \in W$, обладающая следующими свойствами:*

а) множество её предельных точек совпадает с W;

б) $\rho(x_i, x_{i+1}) \to 0$;

в) для любой точки $x^* \in W$ *существует такая подпоследовательность* x_{i_k}, *которая сходится к* x^* *и при этом* $h(x_{i_k}) \geqslant h(x^*)$.

Доказательство. Фиксируем сходящуюся к нулю последовательность положительных чисел ε_n. Для каждого n построим конечную $\varepsilon_n/2$-сеть в W, которую обозначим S_n. Для каждой точки $z \in S_n$ найдём точку максимума функции h на множестве $B(z, \varepsilon_n/2) \bigcap W$. Обозначим её $x(z)$. Очевидно, множество $S_n' = \{x(z) : z \in S_n\}$ образует ε_n-сеть в W. В силу леммы 4 из статьи [6] существует такая замкнутая $2\varepsilon_n$-цепь (т.е. конечная последовательность точек, в которой первая точка совпадает с последней и любые две соседние точки лежат на расстоянии меньше $2\varepsilon_n$), которая содержит все точки S_n' и не содержит никаких других. Для каждой точки из S_n' найдётся точка из S_{n+1}' на расстоянии меньшем, чем ε_{n+1}. Поэтому все построенные замкнутые цепи можно разомкнуть и объединить в одну бесконечную цепь $\{x_i\}$ (в порядке возрастания n) таким образом, чтобы эта бесконечная цепь содержала каждое из множеств S_n' и удовлетворяла условию $\rho(x_i, x_{i+1}) \to 0$. По построению множество всех предельных точек последовательности $\{x_i\}$ будет совпадать с W.

Пусть $x^* \in W$. По построению для каждого n существует точка $z_n \in S_n$ такая, что $x^* \in B(z_n, \varepsilon_n/2)$. Поскольку $x(z_n)$ является точкой максимума функции h на множестве $B(z_n, \varepsilon_n/2) \bigcap W$, получаем, что $h(x(z_n)) \geqslant h(x^*)$ и одновременно $\rho(x(z_n), x^*) < \varepsilon_n$. Последовательность $\{x(z_n)\}$ удовлетворяет п. в). Лемма доказана.

Для всякого (конечного или бесконечного) сигнала $x = (x_1, x_2, \ldots)$ и натурального числа n, не превосходящего длины x, определим *цилиндр* $Z_n(x)$ как множество всех бесконечных сигналов y, имеющих тот же префикс длины n, что и x:

$$Z_n(x) = \{y = (y_1, y_2, \ldots) \in X^{\mathbb{N}} : y_1 = x_1, \ \ldots, \ y_n = x_n\}. \tag{11}$$

Ниже нам потребуется следующая "информационная" теорема.

Теорема 4 [7]. *Для любой меры* $\mu \in M_T(X^{\mathbb{N}})$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *существует слабая окрестность* $O(\mu) \subset M(X^{\mathbb{N}})$, *удовлетворяющая оценке*

$$\operatorname{card}\{x \in X^n : \exists y \in Z_n(x) \ \textit{такое, что} \ \delta_{y,n} \in O(\mu)\} < e^{n(h(\mu)+\varepsilon)}, \quad n \to \infty. \tag{12}$$

С другой стороны, для любой меры $\mu \in M_T(X^{\mathbb{N}})$, *любого* $\varepsilon > 0$ *и любой слабой окрестности* $O(\mu) \subset M(X^{\mathbb{N}})$ *справедлива оценка*

$$\operatorname{card}\{x \in X^n : \forall y \in Z_n(x) \ \ \delta_{y,n} \in O(\mu)\} > e^{n(h(\mu)-\varepsilon)}, \quad n \to \infty. \tag{13}$$

3. Модельное множество сигналов. Пусть W – непустой связный компакт в $M_T(X^{\mathbb{N}})$ и $NB(W) \subset X^{\mathbb{N}}$ – соответствующий узкий бассейн. Далее описывается конструкция модельного множества $D_\infty \subset NB(W)$, чья упаковочная размерность может быть легко оценена снизу при помощи теоремы 3.

Известно (см., например, [8, гл. IV, § 4, теорема 4]), что слабая топология на $M(X^{\mathbb{N}})$ метризуема посредством метрики

$$\rho(\mu, \nu) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |\mu[f_i] - \nu[f_i]|,$$

где $\{f_i\}$ образует счётное всюду плотное множество на единичной сфере в $C(X^{\mathbb{N}})$. Фиксируем такую метрику. Очевидно, она ограничена на $M(X^{\mathbb{N}})$.

Выберем для множества W последовательность точек $\mu_i \in W$ в соответствии с леммой 3 (в которой в качестве функции $h(\mu)$ используется энтропия). Зададим последовательность положительных чисел ε_i, сходящуюся к нулю. Вторая часть теоремы 4 (оценка (13)) гарантирует, что для каждой меры μ_i, числа $\varepsilon_i > 0$ и всякого достаточно большого $n_i \in \mathbb{N}$ существует такое подмножество $A_i \subset X^{n_i}$, что

$$\operatorname{card} A_i > e^{n_i(h(\mu_i)-\varepsilon_i)}, \tag{14}$$

и одновременно для любого $x \in X^{\mathbb{N}}$ с префиксом из A_i выполняются неравенства

$$\rho(\delta_{x,n_i}, \mu_i) < \varepsilon_i, \tag{15}$$

$$\sum_{j \in X} |\delta_{x,n_i}(j) - \mu_i(j)| < \varepsilon_i. \tag{16}$$

Выберем последовательность n_i настолько быстро растущей, чтобы выполнялось условие

$$n_{i+1} \geqslant i n_i. \tag{17}$$

После этого определим множества

$$D_i = A_1^{n_2} \times A_2^{n_3} \times \cdots \times A_i^{n_{i+1}} \subset X^{n_1 n_2 + n_2 n_3 + \ldots + n_i n_{i+1}}, \tag{18}$$

$$D_\infty = A_1^{n_2} \times A_2^{n_3} \times \cdots \subset X^{\mathbb{N}}. \tag{19}$$

Очевидно, что любой сигнал из D_∞ имеет префиксы в каждом из D_i.

Лемма 4. *Если* $w \in D_\infty$, *то* $V(w) = W$.

Доказательство. Пусть $w \in D_\infty$ и w' – префикс w произвольной длины n. В силу определений множеств D_i и D_∞ этот префикс представляется в виде конкатенации

$$w' = xyzu,$$

в которой

$$x \in D_{i-1}, \quad y \in A_i^{n_{i+1}}, \quad z \in A_{i+1}^k \quad (k < n_{i+2}), \quad u \in X^l \quad (l < n_{i+1}),$$

а длины сигналов x, y, z, u соответственно равны

$$|x| = n_1 n_2 + \ldots + n_{i-1} n_i, \quad |y| = n_i n_{i+1}, \quad |z| = n_{i+1} k, \quad |u| = l < n_{i+1}. \tag{20}$$

Поэтому эмпирическую меру $\delta_{w,n}$ можно записать следующим образом:

$$\delta_{w,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{T^i w} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{|x|-1} \delta_{T^i w} + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{|y|-1} \delta_{T^{|x|+i} w} + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{|z|-1} \delta_{T^{|xy|+i} w} + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{|u|-1} \delta_{T^{|xyz|+i} w},$$

откуда вытекает, что

$$\delta_{w,n} - \mu_i = \frac{|x|}{n}(\delta_{w,|x|} - \mu_i) + \frac{|y|}{n}(\delta_{T^{|x|}w,|y|} - \mu_i) + \frac{|z|}{n}(\delta_{T^{|xy|}w,|z|} - \mu_{i+1}) + {}$$
$$+ \frac{|z|}{n}(\mu_{i+1} - \mu_i) + \frac{|u|}{n}(\delta_{T^{|xyz|}w,|u|} - \mu_i)$$

и, следовательно, выполняется неравенство

$$\rho(\delta_{w,n}, \mu_i) \leqslant \frac{|x|}{|y|}\rho(\delta_{w,|x|}, \mu_i) + \rho(\delta_{T^{|x|}w,|y|}, \mu_i) + \rho(\delta_{T^{|xy|}w,|z|}, \mu_{i+1}) + {}$$
$$+ \rho(\mu_{i+1}, \mu_i) + \frac{|u|}{|y|}\rho(\delta_{T^{|xyz|}w,|u|}, \mu_i). \tag{21}$$

Заметим, что в силу (15), (20) и (17) имеют место оценки

$$\rho(\delta_{T^{|x|}w,|y|}, \mu_i) < \varepsilon_i, \quad \rho(\delta_{T^{|xy|}w,|z|}, \mu_{i+1}) < \varepsilon_{i+1},$$

$$\frac{|u|}{|y|} \leqslant \frac{1}{n_i},$$

$$\frac{|x|}{|y|} = \frac{n_1 n_2 + \ldots + n_{i-1} n_i}{n_i n_{i+1}} \leqslant \frac{(i-1) n_{i-1} n_i}{n_i n_{i+1}} \leqslant \frac{n_i}{n_{i+1}} \leqslant \frac{1}{i}, \tag{22}$$

и, кроме того, $\rho(\mu_{i+1},\mu_i)\to 0$ (в соответствии с леммой 3). Поэтому все слагаемые в правой части (21), а вместе с ними и величина $\rho(\delta_{w,n},\mu_i)$ (в которой i по построению монотонно зависит от n) стремятся к нулю при $n\to\infty$. Значит, последовательность $\delta_{w,n}$ имеет те же предельные точки, что и последовательность μ_i, а множество предельных точек последовательности μ_i по лемме 3 совпадает с множеством W. Лемма доказана.

Из леммы 4 вытекает включение $D_\infty\subset NB(W)$. Значит, бассейн $NB(W)$ непуст.

4. Нижняя оценка размерности узкого бассейна. Мы будем использовать модельное множество D_∞, определённое выше с помощью последовательности мер $\mu_i\in W$, удовлетворяющих лемме 3, и формул (14)–(19).

Положим

$$C=\max_{j\in X}|\ln\theta(j)|. \tag{23}$$

Обозначим через $|Z_n(x)|$ диаметр цилиндра $Z_n(x)$ из (11) в метрике (1). Тогда

$$|Z_n(x)|=\prod_{i=1}^{n}\theta(x_i),$$

$$\ln|Z_n(x)|=\sum_{i=1}^{n}\ln\theta(x_i)=n\sum_{j\in X}\delta_{x,n}(j)\ln\theta(j), \tag{24}$$

$$\left|\ln|Z_n(x)|-n\sum_{j\in X}\mu(j)\ln\theta(j)\right|\leqslant n\sum_{j\in X}|\delta_{x,n}(j)-\mu(j)|\cdot\max_{j\in X}|\ln\theta(j)|. \tag{25}$$

Из (25), (23) и (16) следует, что для любого $x\in X^{\mathbb N}$ с префиксом из A_i

$$\left|\ln|Z_{n_i}(x)|-n_i\sum_{j\in X}\mu_i(j)\ln\theta(j)\right|\leqslant n_i\sum_{j\in X}|\delta_{x,n_i}(j)-\mu_i(j)|\cdot\max_{j\in X}|\ln\theta(j)|\leqslant n_i\varepsilon_iC. \tag{26}$$

Пусть ν_i – вероятностная мера на множестве A_i, для которой все элементы $x\in A_i$ имеют равные вероятности $\nu_i(x)=(\operatorname{card}A_i)^{-1}$. Продолжим её нулём на $X^{n_i}\setminus A_i$. Тогда из (14) следует, что для всякого $x\in A_i$ справедливо неравенство

$$\ln\nu_i(x)<-n_ih(\mu_i)+n_i\varepsilon_i. \tag{27}$$

Затем определим на пространстве $X^{\mathbb N}=X^{n_1n_2}\times X^{n_2n_3}\times X^{n_3n_4}\times\ldots$ вероятностную меру $\nu=\nu_1^{n_2}\times\nu_2^{n_3}\times\nu_3^{n_4}\times\ldots$ По построению $\nu(D_\infty)=1$ и $\nu(X^{\mathbb N}\setminus D_\infty)=0$.

Нетрудно видеть, что в пространстве сигналов $X^{\mathbb N}$ всякий шар $B(x,r)$, где $r<1$, совпадает с цилиндром $Z_n(x)$, где n определяется из условий $|Z_n(x)|\leqslant r<|Z_{n-1}(x)|$. Поэтому величину $D_\nu(x)$ из (7) можно определять равносильной формулой

$$D_\nu(x)=\limsup_{n\to\infty}\frac{\ln\nu(Z_n(x))}{\ln|Z_n(x)|}.$$

Лемма 5. *Для всех $w\in D_\infty$ справедлива оценка*

$$D_\nu(w)\geqslant\sup_{\mu\in W}S(\mu,\theta). \tag{28}$$

Доказательство. Поскольку функция $S(\mu,\theta)$ полунепрерывна сверху по переменной μ, она достигает максимума на компакте W в некоторой точке $\mu^*\in W$.

В силу леммы 3 существует такое бесконечное подмножество $I\subset\mathbb N$, что для всех $i\in I$ выполняется неравенство $h(\mu_i)\geqslant h(\mu^*)$ и при этом $\mu_i\to\mu^*$ при $i\in I$.

Фиксируем $w \in D_\infty$ и индекс $i \in I$. У w есть префикс $w' \in D_i$. Он представляется в виде $w' = xy$, где $x \in D_{i-1}$ и $y \in A_i^{n_{i+1}}$. При этом справедлива оценка $|x|/|y| \leqslant 1/i$ как последняя из оценок (22).

Использовав определение меры ν и неравенство (27), получим оценку

$$\ln \nu(Z_{|w'|}(w')) \leqslant \ln \nu_i^{n_{i+1}}(Z_{|y|}(y)) \leqslant n_{i+1}(-n_i h(\mu_i) + n_i\varepsilon_i) = -|y|h(\mu_i) + |y|\varepsilon_i. \tag{29}$$

Аналогично, из определения диаметра цилиндра и неравенства (26) получим

$$\ln |Z_{|w'|}(w')| = \ln |Z_{|x|}(x)| + \ln |Z_{|y|}(y)| \geqslant -|x|C + |y| \sum_{j\in X} \mu_i(j) \ln \theta(j) - |y|\varepsilon_i C. \tag{30}$$

Наконец, деление (29) на (30) с учётом последней из оценок в (22) даёт неравенство

$$\frac{\ln \nu(Z_{|w'|}(w'))}{\ln |Z_{|w'|}(w')|} \geqslant (-h(\mu^*) + \varepsilon_i) \Big/ \biggl(-\frac{C}{i} + \sum_{j\in X} \mu_i(j) \ln \theta(j) - \varepsilon_i C\biggr).$$

Его правая часть при возрастании $i \in I$ сходится к

$$-h(\mu^*) \Big/ \biggl(\sum_{j\in X} \mu^*(j) \ln \theta(j)\biggr) = S(\mu^*, \theta).$$

Тем самым лемма доказана.

Очевидно, что из леммы 5 и теоремы 3 вытекает оценка

$$\dim_P D_\infty \geqslant \sup_{\mu\in W} S(\mu, \theta),$$

а поскольку модельное множество D_∞ содержится в узком бассейне $NB(W)$,

$$\dim_P NB(W) \geqslant \sup_{\mu\in W} S(\mu, \theta). \tag{31}$$

5. Верхняя оценка размерности узкого бассейна. Сейчас для любого непустого подмножества $W \subset M_T(X^{\mathbb{N}})$ докажем, что

$$\dim_P NB(W) \leqslant \dim_P B(W) \leqslant \sup_{\mu\in W} S(\mu, \theta). \tag{32}$$

Тем самым будет доказана теорема 1, поскольку равенство (2) следует из (31), (32).

Пусть заданы мера $\mu \in M_T(X^{\mathbb{N}})$ и её окрестность $O(\mu) \subset M(X^{\mathbb{N}})$. Определим последовательность множеств

$$X^n(O(\mu)) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n : \exists y \in Z_n(x) \ \ \delta_{y,n} \in O(\mu)\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{33}$$

В силу теоремы 4 для любой меры $\mu \in M_T(X^{\mathbb{N}})$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют такие слабая окрестность $O(\mu) \subset M(X^{\mathbb{N}})$ и число $N(\mu, \varepsilon)$, для которых выполняется оценка

$$\operatorname{card} X^n(O(\mu)) < e^{n(h(\mu)+\varepsilon)} \quad \text{при всех} \quad n \geqslant N(\mu, \varepsilon). \tag{34}$$

Положим

$$c = \min_{i\in X} |\ln \theta(i)|. \tag{35}$$

Фиксируем произвольное число s, удовлетворяющее условию

$$s > \sup_{\mu\in W} S(\mu, \theta),$$

и выберем такое малое $\varepsilon > 0$, при котором справедливо неравенство

$$\sup_{\mu\in W} S(\mu,\theta) < s - \frac{3\varepsilon}{c}. \tag{36}$$

Далее будем рассматривать меры μ, лежащие в замыкании $\overline{W}$ множества W. Для каждой из них выберем такую малую окрестность $O(\mu)$, чтобы для неё выполнялось условие (34) и для всех мер $\nu \in O(\mu)$ было бы

$$h(\mu)\Big/\Big(-\sum_{i\in X}\nu(i)\ln\theta(i)\Big) < h(\mu)\Big/\Big(-\sum_{i\in X}\mu(i)\ln\theta(i)\Big) + \frac{\varepsilon}{c} = S(\mu,\theta) + \frac{\varepsilon}{c}. \tag{37}$$

Тогда из (35)–(37) вытекает, что

$$h(\mu)\Big/\Big(-\sum_{i\in X}\nu(i)\ln\theta(i)\Big) < s - \frac{2\varepsilon}{c} \leqslant s + 2\varepsilon\Big/\Big(\sum_{i\in X}\nu(i)\ln\theta(i)\Big),$$

и после умножения на отрицательный знаменатель получим

$$s\sum_{i\in X}\nu(i)\ln\theta(i) < -h(\mu) - 2\varepsilon \quad \text{для всех} \quad \nu\in O(\mu). \tag{38}$$

Рассмотрим любой префикс $x \in X^n(O(\mu))$. По определению множества $X^n(O(\mu))$ существует такое $y \in Z_n(x)$, для которого $\delta_{y,n} \in O(\mu)$. Из (24) и (38) следует, что

$$s\ln|Z_n(x)| = s\ln|Z_n(y)| = sn\sum_{i\in X}\delta_{y,n}(i)\ln\theta(i) < -n(h(\mu)+2\varepsilon),$$

откуда получается оценка

$$|Z_n(x)|^s < e^{-n(h(\mu)+2\varepsilon)}. \tag{39}$$

Таким образом, для каждой меры $\mu \in \overline{W}$ определена окрестность $O(\mu)$, для которой одновременно выполняются условия (34) и (39). Выберем конечное покрытие компакта $\overline{W}$ окрестностями указанного вида. Обозначим их через $O(\mu_1), \ \ldots, \ O(\mu_l)$.

Рассмотрим последовательность множеств

$$G_N = \{y \in B(W) : \delta_{y,n} \in O(\mu_1)\bigcup \ldots \bigcup O(\mu_l) \ \text{ при всех } \ n \geqslant N\}.$$

Очевидно, что чем больше N, тем больше G_N. Из определения бассейна следует, что для всякого сигнала $y \in B(W)$ расстояние от $\delta_{y,n}$ до W стремится к нулю при $n\to\infty$, поэтому множества G_N покрывают бассейн $B(W)$.

Возьмём любые натуральные числа m, N, удовлетворяющие условиям

$$m \geqslant N \geqslant \max_{1\leqslant j\leqslant l} N(\mu_j,\varepsilon),$$

где $N(\mu_j,\varepsilon)$ – константы из (34), отвечающие мерам μ_j. Рассмотрим произвольную упаковку множества G_N непересекающимися цилиндрами вида $Z_{n_i}(y_i)$, где $y_i \in G_N$ и $n_i \geqslant m$. Из определения G_N видно, что $\delta_{y_i,n_i} \in O(\mu_1)\bigcup\ldots\bigcup O(\mu_l)$. При каждом $n \geqslant N(\mu_j,\varepsilon)$ число различных цилиндров $Z_n(x)$, для которых существует такое $y \in Z_n(x)$, что $\delta_{y,n} \in O(\mu_j)$, в силу (33) совпадает с числом элементов в множестве $X^n(O(\mu_j))$, а последнее в силу (34) не превосходит $e^{n(h(\mu_j)+\varepsilon)}$. Кроме того, для каждого такого цилиндра $Z_n(x)$ выполняется неравенство (39). Объединив эти оценки, получим

$$\sum_i |Z_{n_i}(y_i)|^s \leqslant \sum_{n\geqslant m}\sum_{j=1}^{l} e^{n(h(\mu_j)+\varepsilon)}e^{-n(h(\mu_j)+2\varepsilon)} =$$

$$= \sum_{n\geqslant m}\sum_{j=1}^{l} e^{-n\varepsilon} = \frac{le^{-m\varepsilon}}{1-e^{-\varepsilon}} \to 0 \quad \text{при} \quad m\to\infty. \tag{40}$$

Как уже отмечалось выше, всякий шар $B(y,r)$ в пространстве $X^{\mathbb{N}}$ совпадает с некоторым цилиндром $Z_n(y)$, где $|Z_n(y)| \leqslant r < |Z_{n-1}(y)|$. Поэтому всякая упаковка множества G_N шарами $B(y_i, r_i)$, где $y_i \in G_N$, на самом деле состоит из непересекающихся цилиндров вида $Z_{n_i}(y_i)$, причём

$$|Z_{n_i}(y_i)| \leqslant r_i < \frac{|Z_{n_i}(y_i)|}{\min\limits_j \theta(j)}. \tag{41}$$

Далее вычислим величины $C^s(G_N)$ и $P^s(B(W))$ по формулам (5), (6). Из (40) и (41) вытекает, что $C^s(G_N) = 0$. Поскольку множества G_N покрывают $B(W)$, отсюда следует равенство $P^s(B(W)) = 0$. Значит, $\dim_P B(W) \leqslant s$, откуда в силу произвольности числа $s > \sup\limits_{\mu\in W} S(\mu,\theta)$ и включения $NB(W) \subset B(W)$ получаем заявленные в начале пункта неравенства

$$\dim_P NB(W) \leqslant \dim_P B(W) \leqslant \sup_{\mu\in W} S(\mu,\theta). \tag{42}$$

Оценки (31) и (42) доказывают теорему 1.

Осталось доказать теорему 2. Очевидно, что для каждого одноточечного множества $W = \{\mu\}$ бассейн $B(\mu)$ совпадает с узким бассейном $NB(\mu)$. В силу теоремы 1 для них выполняются равенства

$$\dim_P B(\mu) = \dim_P NB(\mu) = S(\mu,\theta).$$

Поэтому для любого непустого множества $W \subset M_T(X^{\mathbb{N}})$ имеем

$$\dim_P B(W) \geqslant \sup_{\mu\in W} \dim_P B(\mu) = \sup_{\mu\in W} S(\mu,\theta). \tag{43}$$

Объединив (42) и (43), получим равенство (3).

Наконец, формула (4) является следствием из очевидных включений

$$NB(M_T(X^{\mathbb{N}})) \subset WB(W) \subset X^{\mathbb{N}} = B(M_T(X^{\mathbb{N}}))$$

и вытекающих из (2), (3) равенств

$$\dim_P NB(M_T(X^{\mathbb{N}})) = \dim_P B(M_T(X^{\mathbb{N}})) = \sup_{\mu\in M_T(X^{\mathbb{N}})} S(\mu,\theta).$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антоневич А.Б., Радыно Я.В.* Функциональный анализ и интегральные уравнения. 2-е изд. Минск, 2006.
2. *Биллингслей П.* Эргодическая теория и информация. М., 1969.
3. *Рюэль Д.* Термодинамический формализм. Математические структуры классической равновесной статистической механики. М.; Ижевск, 2002.
4. *Bakhtin V.I., Sadok B.* Packing dimensions of basins generated by distributions on a finite alphabet // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2021. № 2. С. 6–16.
5. *Falconer K.* Techniques in Fractal Geometry. Chichester; New York, 1997.
6. *Бахтин В.И., Садок Б.М.* Хаусдорфовы размерности узких бассейнов в пространстве последовательностей // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2019. Т. 27. № 1–2. С. 3–12.
7. *Бахтин В.И.* Информационный смысл энтропии неэргодических мер // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 304–312.
8. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1981.

Белорусский государственный университет,
г. Минск,
Люблинский католический университет
Иоанна Павла II, Польша

Поступила в редакцию 20.03.2022 г.
После доработки 20.03.2022 г.
Принята к публикации 25.05.2022 г.