ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 6, с. 733–746

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.928.2

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЁННАЯ ЗАДАЧА КОШИ ПРИ НАЛИЧИИ “СЛАБОЙ” ТОЧКИ ПОВОРОТА ПЕРВОГО ПОРЯДКА У ПРЕДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С КРАТНЫМ СПЕКТРОМ

© 2022 г. **А. Г. Елисеев, П. В. Кириченко**

Методом регуляризации С.А. Ломова построено асимптотическое решение линейной задачи Коши при наличии “слабой” точки поворота у предельного оператора. Записаны в явном виде основные сингулярности данной задачи. Приведены оценки по ε, характеризующие поведение сингулярностей при $\varepsilon \to 0$. Доказана асимптотическая сходимость регуляризованных рядов. Результаты работы проиллюстрированы на примере.

DOI: 10.31857/S0374064122060024, EDN: CCGRFM

Светлой памяти моего дорогого учителя
Сергея Александровича Ломова (12.10.1922–12.06.1993)
в связи со 100-летием со дня его рождения
посвящаю эту работу
А. Г. Елисеев

Введение. Сингулярно возмущённые дифференциальные уравнения с нестабильным спектром предельного оператора всегда вызывали интерес как у физиков, так и у математиков. Особенно трудными являются задачи с точечной нестабильностью, а именно наличием точек поворота. Первые задачи с точками поворота возникли, по-видимому, в квантовой механике. Первым методом их решения был метод ВКБ (Вентцеля–Крамерса–Бриллюэна) – самый известный пример квазиклассического вычисления в квантовой механике, в котором волновая функция представлена как показательная функция, квазиклассически расширенная, а затем амплитуда или фаза медленно изменяются. Он назван в честь физиков Г. Вентцеля, Х.А. Крамерса и Л. Бриллюэна, которые развили его в 1926 г. независимо друг от друга. В 1923 г. математик Гарольд Джеффри развил общий метод приближённого решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка, который включает и решение уравнения Шрёдингера. Методы решения задач со спектральными особенностями развиваются и в настоящее время. Отметим школу В.П. Маслова, школу А.Б. Васильевой–В.Ф. Бутузова–Н.Н. Нефедова и школу С.А. Ломова. Обзор всех методов не является целью данной статьи. С точки зрения метода регуляризации точки поворота делятся на три группы.

1. Простая точка поворота – собственные значения изолированы друг от друга, и одно собственное значение в отдельных точках t обращается в нуль.

2. Слабая точка поворота – хотя бы пара собственных значений пересекаются в отдельных точках t, но при этом предельный оператор сохраняет диагональную структуру вплоть до точек пересечения. Базис из собственных векторов остаётся гладким по t.

3. Сильная точка поворота – хотя бы пара собственных значений пересекаются в отдельных точках t, но при этом предельный оператор меняет диагональную структуру на жорданову в точках пересечения. Базис из собственных векторов в точках пересечения теряет гладкость по t.

Классические точки поворота относятся к третьему типу.

В данной работе методом регуляризации С.А. Ломова (см. монографию [1, гл. 1, с. 38–89]) строится регуляризованное асимптотическое решение сингулярно возмущённой неоднородной задачи Коши на всём отрезке $[0, T]$ при наличии спектральной особенности в виде "слабой" точки поворота у предельного оператора. Отметим статью [2], посвящённую построению асимптотики решений сингулярно возмущённых задач Коши для интегродифференциальных уравнений при наличии спектральных особенностей у предельного оператора. Следует отметить также работу [3], в которой рассмотрены задачи в случае пересечения корней вырожденного уравнения (этот случай в указанной статье называется случаем обмена устойчивостями). Исследование данной проблемы основано на асимптотическом методе дифференциальных неравенств. Точка $\varepsilon = 0$ для сингулярно возмущённой задачи Коши является особой в том смысле, что классические теоремы существования решения задачи Коши не имеют места в этой точке. Поэтому в решении сингулярно возмущённых задач возникают существенно особые сингулярности, описывающие нерегулярную зависимость решения от ε. Описание этих сингулярностей и представляет основную проблему метода регуляризации. При выполнении условий стабильности спектра существенно особые сингулярности описываются с помощью экспонент вида $\exp(\varphi(t)/\varepsilon)$, где $\varphi(t)$ – гладкая, в общем случае, комплексная функция действительного переменного t. Для решений линейных однородных уравнений такие сингулярности были выделены ещё Лиувиллем (см. [4]).

Если же условия стабильности нарушены, например, точки спектра пересекаются в одной или нескольких точках t, то описание сложнее. В работе [5] приведены сингулярности в случае "простой" точки поворота, когда отдельная точка спектра оператора $A(t)$ имеет вид

$$\lambda(t) = t^{k_0}(t-t_1)^{k_1}\cdots(t-t_m)^{k_m}a(t), \quad a(t)\neq 0, \quad k_0+k_1+\ldots+k_m = n.$$

В статье [6] рассмотрена рациональная "простая" точка поворота, а иррациональная "простая" точка поворота изучена в работе [7]. Настоящая работа развивает идеи публикации [8], в которой рассматривается самый элементарный случай спектральной особенности в виде "слабой" точки поворота.

Существенно особые сингулярности с математической точки зрения – это специальные функции, описывающие нерегулярную зависимость решения от ε при $\varepsilon\to 0$, а с точки зрения гидродинамики – функции пограничного слоя, порождаемого спектральной особенностью точки $\lambda(t)$.

1. Постановка задачи. Описание сингулярностей. Рассмотрим задачу Коши

$$\varepsilon\dot{u} = A(t)u + h(t), \quad u(0,\varepsilon) = u^0, \tag{1}$$

где выполнены следующие условия:

1) $h(t)\in C^\infty([0,T],R^n)$;

2) $A(t)\in C^\infty([0,T],\mathcal{L}(R^n,R^n))$;

3) для собственных значений предельного оператора $A(t)$:

а) для всех $t\in(0,T]$ $\lambda_1(t)\neq\lambda_2(t)$, $\lambda_i(t)\neq 0$, $i=\overline{1,2}$;

б) условие "слабой" точки поворота первого порядка при $t=0$:

$$\lambda_2(t)-\lambda_1(t) = ta(t), \quad a(t)\neq 0;$$

в) геометрическая кратность собственных значений равна алгебраической для всех $t\in$ $\in[0,T]$;

4) $\operatorname{Re}\lambda_i(t)\leqslant 0$, $i=\overline{1,2}$, для $t\in[0,T]$;

5) $A(t)=\lambda_1(t)P_1(t)+\lambda_2(t)P_2(t)$, $\dim\operatorname{Im}P_1(t)=m$, $\dim\operatorname{Im}P_2(t)=k$, $m+k=n$, здесь $\dim\operatorname{Im}P_i(t)$, $i=\overline{1,2}$, – размерность образов проектирующих операторов на собственные подпространства.

В рассматриваемой задаче (1) характер особенности сводится к наличию "слабой" точки поворота (условие 3), существенно особые сингулярности в этом случае можно найти из решения следующей задачи Коши:

$$\varepsilon\dot{J}(t) = \begin{pmatrix}\lambda_1(t) & 0\\ 0 & \lambda_2(t)\end{pmatrix}J + \varepsilon\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}J, \quad J(0) = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Решив (2) методом последовательных приближений, мы приходим к рядам для функций $J(t)$, членами которых являются “k-моментные” интегралы

$$\sigma_{1,k} = e^{\varphi_1(t)/\varepsilon} \underbrace{\int\limits_0^t e^{\Delta\varphi(s_1)/\varepsilon} \int\limits_0^{s_1} e^{-\Delta\varphi(s_2)/\varepsilon} \dots \int\limits_0^{s_{k-1}} e^{(-1)^{k+1}\Delta\varphi(s_k)/\varepsilon}}_{k \text{ интегралов}} ds_k \cdots ds_1,$$

$$\sigma_{2,k} = e^{\varphi_2(t)/\varepsilon} \underbrace{\int\limits_0^t e^{-\Delta\varphi(s_1)/\varepsilon} \int\limits_0^{s_1} e^{\Delta\varphi(s_2)/\varepsilon} \dots \int\limits_0^{s_{k-1}} e^{(-1)^{k}\Delta\varphi(s_k)/\varepsilon}}_{k \text{ интегралов}} ds_k \cdots ds_1,$$

где $\varphi_i(t) = \int_0^t \lambda_i(s)\,ds$, $i = \overline{1,2}$, а $\Delta\varphi(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t)$.

Несложно установить, что $\sigma_{i,k}$ удовлетворяют условиям

$$\varepsilon\dot{\sigma}_{1,k} = \lambda_1(t)\sigma_{1,k} + \varepsilon\sigma_{2,k-1}, \quad \varepsilon\dot{\sigma}_{2,k} = \lambda_2(t)\sigma_{2,k} + \varepsilon\sigma_{1,k-1},$$
$$\sigma_{1,k}(0) = 0, \quad \sigma_{2,k}(0) = 0, \quad k \geqslant 1. \tag{3}$$

Именно эти интегралы представляют собой многообразие функций, необходимое для регуляризации задачи (1). Вместо искомого решения $u(t,\varepsilon)$ задачи (1) будем изучать вектор-функцию $z(t,\sigma,\varepsilon)$ такую, что её сужение совпадает с искомым решением:

$$z(t,\sigma,\varepsilon)|_{\sigma=\sigma_{s,k}(t,\varepsilon)} = u(t,\varepsilon), \quad s = 1,2, \quad k = \overline{0,\infty}.$$

С учётом (1), (3) и формулы сложного дифференцирования

$$\frac{dz}{dt} = \dot{z} + \sum_{s=1}^{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda_s}{\varepsilon}\sigma_{s,k}(t,\varepsilon) + \sigma_{3-s,k-1}(t,\varepsilon)\right)\frac{\partial z}{\partial\sigma_{s,k}}$$

можно записать задачу для расширенной функции $z(t,\sigma,\varepsilon)$ следующим образом:

$$A(t)z - \sum_{s=1}^{2}\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda_s\sigma_{s,k} - \varepsilon\sigma_{3-s,k-1})\frac{\partial z}{\partial\sigma_{s,k}} = \varepsilon\dot{z} - h(t), \quad z(0,0,\varepsilon) = u^0. \tag{4}$$

Будем полагать, что если слагаемое содержит в индексе значение $k-1<0$, то это слагаемое равно нулю.

Для решения задачи (4) введём пространство безрезонансных решений

$$\hat{E} = \bigoplus_{s=1}^{2}\bigoplus_{k=0}^{\infty} E \bigotimes \{\sigma_{s,k}\} \bigoplus E.$$

Элемент $\hat{z} \in \hat{E}$ имеет вид

$$\hat{z} = \sum_{s=1}^{2}\sum_{k=0}^{\infty} z_{s,k} \bigotimes \{\sigma_{s,k}\} + w,$$

где $z_{s,k}, w \in E$. Здесь $\bigoplus$ – символ прямой суммы линейных пространств, $\bigotimes$ – символ тензорного произведения.

Введём операторы, порождённые задачей (4):

$$\mathcal{L}_0 = \bigoplus_{s=1}^{2}\bigoplus_{k=0}^{\infty}(A(t) - \lambda_s(t)) \bigotimes \left\{\sigma_{s,k}\frac{\partial}{\partial\sigma_{s,k}}\right\} \bigoplus A(t),$$

$$\mathcal{L}_1=\bigoplus_{s=1}^{2}\bigoplus_{k=0}^{\infty} I\bigotimes\left\{\sigma_{3-s,k}\frac{\partial}{\partial\sigma_{s,k}}\right\},\qquad I \text{ – тождественный оператор,}$$

$$Gz=z(0,0,\varepsilon).$$

Действия операторов запишутся в виде

$$\mathcal{L}_0\hat{z}(t)=\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=0}^{\infty}(A(t)-\lambda_s(t))z_{s,k}(t)\bigotimes\{\sigma_{s,k}\}+A(t)w(t),$$

$$\mathcal{L}_1\hat{z}(t)=\sum_{s=1}^{2}\sum_{k=0}^{\infty}z_{3-s,k+1}(t)\bigotimes\{\sigma_{s,k}\},$$

$$G\hat{z}=z(0,0,\varepsilon). \tag{5}$$

Кроме того, введём спектральные проекторы

$$\hat{P}_{k,s,p}(t)=P_k(t)\bigotimes\left\{\sigma_{s,p}\frac{\partial}{\partial\sigma_{s,p}}\right\},\quad \hat{\pi}_{k,s,p}(t)=P_k(t)\langle\delta(t),P_k(t)\cdot\rangle\bigotimes\left\{\sigma_{s,p}\frac{\partial}{\partial\sigma_{s,p}}\right\},$$

$$\hat{P}_0(t)=\sum_{s=1}^{2}\sum_{p=0}^{\infty}\hat{P}_{s,s,p}(t),\quad \hat{\pi}_0(t)=\sum_{s=1}^{2}\sum_{p=0}^{\infty}\hat{\pi}_{3-s,s,p}(t). \tag{6}$$

Здесь в формуле определения проектора $\hat{\pi}_{k,s,p}(t)$ вместо точки ставится элемент, на который действует проектор, а $\hat{P}_0(t)$ – оператор, проектирующий на ядро $\mathcal{L}_0$.

Действие проекторов на элемент $\hat{z}\in\hat{E}$ запишется в виде

а) $\hat{P}_{k,s,p}(t)\hat{z}(t)=P_k(t)z_{s,p}(t)\bigotimes\sigma_{s,p}$,

б) $\hat{P}_{k,s,p}(t)\mathcal{L}_0\hat{z}(t)=(\lambda_k(t)-\lambda_s(t))P_k(t)z_{s,p}(t)\bigotimes\sigma_{s,p}$,

в) $\hat{\pi}_{k,s,p}(t)\hat{z}(t)=P_k(0)z_{s,p}(0)\bigotimes\sigma_{s,p}$.

Использовав операторы (5), (6), можно записать задачу (4) в пространстве $\hat{E}$ следующим образом:

$$\mathcal{L}_0\hat{z}=\varepsilon\mathcal{L}_1\hat{z}+\varepsilon\dot{\hat{z}}-h(t),\quad G\hat{z}=u^0. \tag{7}$$

Задача (7) является регулярной по ε, поэтому её решение будем определять в виде регулярного ряда по степеням ε, т.е. в виде

$$\hat{z}=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\hat{z}_k. \tag{8}$$

Подставив ряд (8) в задачу (7), получим следующую серию итерационных задач:

$$\mathcal{L}_0\hat{z}_0=-h(t),\quad G\hat{z}_0=u^0,$$

$$\mathcal{L}_0\hat{z}_k=\mathcal{L}_1\hat{z}_{k-1}+\dot{\hat{z}}_{k-1},\quad k=\overline{1,\infty},$$

$$G\hat{z}_k=0. \tag{9}$$

2. Разрешимость итерационных задач. Для того чтобы решить итерационные задачи (9), сформулируем теорему разрешимости уравнений вида $\mathcal{L}_0(t)\hat{z}=\hat{h}(t)$ в пространстве $\hat{E}$. Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть в пространстве $\hat{E}$ имеется уравнение*

$$\mathcal{L}_0\hat{z}=\hat{h}(t) \tag{10}$$

и выполнены условия 1)–5) задачи (1). Уравнение (10) разрешимо в $\hat{E}$ тогда и только тогда, когда справедливы условия

1) $\hat{P}_0(t)\hat{h}(t)=0$ *для всех* $t\in[0,T]$;

2) $\hat{\pi}_0(t)\hat{h}(t)=0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнение (10) разрешимо. Подействуем на него оператором $\hat{P}_0(t)$. Так как $\hat{P}_0(t)\mathcal{L}_0(t)=0$, то и $\hat{P}_0(t)\hat{h}(t)=0$. Отсюда следует, что

$$\hat{h}(t)=\sum_{s=1}^{2}\sum_{p=0}^{\infty}P_{3-s}(t)h_{s,p}(t)\bigotimes\{\sigma_{s,p}\}+h_0(t).$$

Подействуем оператором $\hat{\pi}_0$. Тогда будем иметь

$$\hat{\pi}_0(t)\mathcal{L}_0\hat{z}=\hat{\pi}_0(t)\hat{h}(t).$$

Так как

$$\hat{\pi}_0(t)\mathcal{L}_0\hat{z}=\sum_{s=1}^{2}\sum_{p=0}^{\infty}(\lambda_{3-s}(0)-\lambda_s(0))(P_{3-s}(0)z_{s,p}(0))\bigotimes\{\sigma_{s,p}\}=0,$$

то

$$\hat{\pi}_0(t)\hat{h}(t)=\sum_{s=1}^{2}\sum_{p=0}^{\infty}(P_{3-s}(0)h_{s,p}(0))\bigotimes\{\sigma_{s,p}\}=0.$$

Достаточность очевидна.

В результате получим решение

$$\hat{z}(t)=\hat{P}_0(t)\hat{z}(t)+\sum_{s=1}^{2}\sum_{p=0}^{\infty}(A(t)-\lambda_s(t))^{-1}P_{3-s}(t)h_{s,p}(t)\bigotimes\{\sigma_{s,p}\}+A^{-1}(t)h_0(t).$$

Здесь $\hat{P}_0(t)\hat{z}(t)$ – произвольный вектор из ядра оператора $\mathcal{L}_0(t)$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть дана задача в пространстве* $\hat{E}$

$$\mathcal{L}_0\hat{z}=0,\quad G\hat{z}=0 \tag{11}$$

и выполнены условия теоремы 1. Тогда при выполнении равенств

$$\hat{P}_0(t)(\mathcal{L}_1\hat{z}+\dot{\hat{z}})=0,\quad \hat{\pi}_0(t)(\mathcal{L}_1\hat{z}+\dot{\hat{z}})=0$$

решение задачи (11) единственно и равно тождественно нулю.

Доказательство. Решение уравнения системы (11) запишется в виде

$$\hat{z_0}=\sum_{s=1}^{2}\sum_{p=0}^{\infty}P_s(t)z_{s,p}(t)\bigotimes\{\sigma_{s,p}\}. \tag{12}$$

Вычислим

$$\mathcal{L}_1\hat{z_0}+\dot{\hat{z_0}}=\sum_{s=1}^{2}\sum_{p=0}^{\infty}\left[\frac{d}{dt}(P_s(t)z_{s,p}(t))+P_{3-s}(t)z_{3-s,p+1}\right]\bigotimes\sigma_{s,p},$$

здесь $P_s(t)z_{s,p}(t)$ – произвольный собственный вектор оператора $A(t)$. Подставив функцию (12) в начальное условие, с учётом $\sigma_{s,p}(0,\varepsilon)=0,\ p\geqslant 1,$ будем иметь

$$P_s(0)z_{s,0}(0)=0,\quad s=1,2.$$

Так как $\hat{P}_0(t)(\mathcal{L}_1\hat{z}(t)+\dot{\hat{z}}(t))=0,$ то отсюда получим серию задач Коши

$$p=0:\ \begin{cases}\dfrac{d}{dt}(P_s(t)z_{s,0}(t))=\dot{P}_s(t)(P_s(t)z_{s,0}(t)),\\ P_s(0)z_{s,0}(0)=0,\quad s=1,2,\end{cases}$$

$$p\geqslant 1:\ \begin{cases}\dfrac{d}{dt}(P_s(t)z_{s,p}(t))=\dot{P}_s(t)(P_s(t)z_{s,p}(t)),\\ P_s(0)z_{s,p}(0)=\ ?\quad (\text{на данный момент не определено}).\end{cases} \tag{13}$$

Для решения возникающих задач Коши введём разрешающие операторы

$$\frac{d}{dt}U_s(t,\tau)=\dot{P}_s(t)U_s(t,\tau),\quad U_s(t,t)=I,\quad s=1,2.$$

При $p=0$ решение будет равно $P_s(t)z_{s,0}(t)=U_s(t,0)P_s(0)z_{s,0}(0)\equiv 0.$ Чтобы определить начальные условия для задач Коши (13) при $p\geqslant 1,$ вычислим $\hat{\pi}_0(t)(\mathcal{L}_1\hat{z}+\dot{\hat{z}})=0.$ В результате будем иметь

$$P_s(0)\left(\frac{d}{dt}\right)(P_s(t)z_{s,p+1}(t))|_{t=0}=P_s(0)\left(\frac{d}{dt}\right)(\dot{P}_s(t)P_{3-s}(t)z_{3-s,p}(t))|_{t=0},\quad p\geqslant 0. \tag{14}$$

Из системы (14) получим начальные условия для остальных задач Коши:

$$p=0,\quad s=1,2,\quad P_s(0)z_{s,1}(0)=\dot{P}_s(0)P_{3-s}(0)z_{3-s,0}(0)=0,$$

$$p=1,\quad s=1,2,\quad P_s(t)z_{s,1}(t)=U_s(t,0)P_s(0)z_{s,1}(0)\equiv 0.$$

Рассмотрев случай $p=1$ (напомним, что $p=1$ означает порядок кратных сингулярных интегралов), переходим к случаю $p=2.$ Так как начальные условия при p выражаются через начальные условия при $p-1,$ то тем самым по индукции доказываем, что начальные условия равны нулю для любых $p,$ а отсюда вытекает $P_s(t)z_{s,p}(t)=U_s(t,0)P_s(0)z_{s,p}(0)\equiv 0.$

Следовательно, решение задачи (11) равно тождественно нулю. Теорема доказана.

3. Построение формального асимптотического решения. Применим теоремы 1, 2 для решения итерационных задач (9). Запишем задачу на итерационном шаге ε^0:

$$\mathcal{L}_0\hat{z}_0=-h(t),\quad G\hat{z}_0=u^0, \tag{15}$$

или покомпонентно

$$(A(t)-\lambda_s(t))z^0_{s,p}(t)=0,\quad A(t)w_0(t)=-h(t),\quad z^0_{1,0}(0)+z^0_{2,0}(0)+w_0(0)=u^0,$$

$$z^0_{s,p}(0),\quad p\geqslant 1,\quad s=1,2\quad (\text{определяются в процессе решения итерационных задач}).$$

Решение (15) будет иметь вид

$$\hat{z}_0=\sum_{s=1}^{2}\sum_{p=0}^{\infty}P_s(t)z^0_{s,p}(t)\bigotimes\{\sigma_{s,p}\}-A^{-1}(t)h(t), \tag{16}$$

где $P_s(t)z^0_{s,p}(t)$ – произвольный собственный вектор оператора $A(t).$ Подставив решение (16) в начальное условие и с учётом равенства $\sigma_{s,p}(0,\varepsilon)=0$ при $p\geqslant 1,$ получим $P_1(0)z^0_{1,0}(0)+$ $+P_2(0)z^0_{2,0}(0)-A^{-1}(0)h(0)=u^0,$ откуда следует

$$P_s(0)z^0_{s,0}(0)=P_s(0)u^0+\frac{P_s(0)h(0)}{\lambda_s(0)},\quad s=1,2.$$

Начальные условия для случая $P_s(0)z^0_{s,p}(0),\ \ p\geqslant 1,$ определяются из условий разрешимости итерационной системы на первом итерационном шаге. Таким образом, на нулевом итерационном шаге получили

$$\hat{z_0}=\sum_{s=1}^{2}\sum_{p=0}^{\infty}P_s(t)z^0_{s,p}(t)\bigotimes\{\sigma_{s,p}\}-A^{-1}(t)h(t),$$

$$P_s(0)z^0_{s,0}(0)=P_s(0)u^0+\frac{P_s(0)h(0)}{\lambda_s(0)},\quad s=1,2. \tag{17}$$

Задача на первом итерационном шаге ε

$$\mathcal{L}_0\hat{z_1}=\dot{\hat{z_0}}+\mathcal{L}_1\hat{z_0},\quad G\hat{z_1}=0 \tag{18}$$

разрешима в пространстве $\hat{E},$ если правая часть уравнения в (18) удовлетворяет условиям теоремы 1. Предварительно вычислим

$$\mathcal{L}_1\hat{z_0}+\dot{\hat{z_0}}=\sum_{s=1}^{2}\sum_{p=0}^{\infty}\biggl(\frac{d}{dt}(P_s(t)z^0_{s,p}(t))+z^0_{3-s,p+1}(t)\biggr)\bigotimes\sigma_{s,p}-\frac{d}{dt}A^{-1}(t)h(t). \tag{19}$$

Расписав задачу (18) на первом итерационном шаге по компонентам и с учётом (19), получим серию задач:

$$(A(t)-\lambda_s(t))z^1_{s,p}(t)=\frac{d}{dt}(P_s(t)z^0_{s,p}(t))+P_{3-s}(t)z^0_{3-s,p+1}(t),$$

$$z^1_{1,0}(0)+z^1_{2,0}(0)=\biggl(\biggl(A^{-1}(t)\frac{d}{dt}\biggr)^2\int\limits_0^t h(s)ds\biggr)\bigg|_{t=0},$$

$$z^1_{s,p}(0),\quad p\geqslant 1,\quad s=1,2\quad \text{(определяются в процессе решения итерационных задач).} \tag{20}$$

Из условий разрешимости (20) с учётом (17) получим серию задач Коши:

$$p=0:\ \begin{cases}\dfrac{d}{dt}(P_s(t)z^0_{s,0}(t))=\dot{P}_s(t)(P_s(t)z^0_{s,0}(t)),\\ P_s(0)z^0_{s,0}(0)=P_s(0)u^0+\dfrac{P_s(0)h(0)}{\lambda_s(0)},\quad s=1,2,\end{cases}$$

$$p\geqslant 1:\ \begin{cases}\dfrac{d}{dt}(P_s(t)z^0_{s,p}(t))=\dot{P}_s(t)(P_s(t)z^0_{s,p}(t)),\\ P_s(0)z^0_{s,p}(0)=\ ?\quad \text{(на данный момент не определено).}\end{cases} \tag{21}$$

Для того чтобы определить начальные условия для задач Коши (21) при $p\geqslant 1,$ вычислим $\hat{\pi}_0(t)(\mathcal{L}_1\hat{z}_0+\dot{\hat{z}}_0)=0,$ в результате чего получим

$$P_s(0)z^0_{s,p+1}(0)=P_s(0)\biggl(\frac{d}{dt}\biggr)(\dot{P}_s(t)P_{3-s}(t)z^0_{3-s,p}|_{t=0}). \tag{22}$$

Так как начальные условия при $p+1$ выражаются через начальные условия при $p,$ то тем самым по индукции доказываем, что начальные условия определены для любых $p.$

После определения начальных условий из системы (22) получаем решения системы (21):

$$P_s(t)z^0_{s,0}(t)=U_s(t,0)\biggl(P_s(0)u^0+\frac{P_s(0)h(0)}{\lambda_s(0)}\biggr),$$

$$P_s(t)z^0_{s,p}(t)=U_s(t,0)P_s(0)z^0_{s,p}(0),\quad s=1,2,\quad p=\overline{1,\infty}.$$

Таким образом, главный член асимптотики решения после сужения запишется в виде

$$u_{\text{гл}}(t,\varepsilon)=\sum_{s=1}^{2}U_s(t,0)\biggl(P_s(0)u^0+\frac{P_s(0)h(0)}{\lambda_s(0)}\biggr)e^{\varphi_s(t)/\varepsilon}+$$

$$+\sum_{s=1}^{2}\sum_{p=1}^{\infty}U_s(t,0)P_s(0)z^0_{s,p}(0)\sigma_{s,p}(t,\varepsilon)-A^{-1}(t)h(t).$$

Записанное покомпонентно решение системы (21) на первом итерационном шаге имеет вид

$$z^1_{s,p}(t)=P_s(t)z^1_{s,p}(t)+(A(t)-\lambda_s(t))^{-1}\biggl(P_{3-s}(t)\frac{d}{dt}(P_s(t)z^0_{s,p}(t))+$$

$$+P_{3-s}(t)z^0_{3-s,p+1}(t)\biggr)-\biggl(A^{-1}(t)\frac{d}{dt}\biggr)^2\int\limits_0^t h(s)ds,$$

$$P_s(0)z^1_{s,0}(0)=P_s(0)\biggl(\biggl(A^{-1}(t)\frac{d}{dt}\biggr)^2\int\limits_0^t h(s)ds\biggr)\bigg|_{t=0},\quad s=1,2.$$

Собственные векторы $P_s(t)z^1_{s,p}(t)$ и оставшиеся начальные условия находятся на втором итерационном шаге. По данной схеме находятся все слагаемые решения задачи (9).

4. Оценка остаточного члена. Пусть члены ряда (8) в результате решения итерационных задач определены для $0\leqslant q\leqslant n+1$, $0\leqslant p\leqslant r$, здесь q – итерационный шаг по ε, а p – порядки сингулярных интегралов. Запишем соотношение для остатка $R_{n,r}(t,\varepsilon)$. Для этого запишем ряд (8) в виде

$$\hat z(t,\varepsilon)=\sum_{q=0}^{n}\varepsilon^q\sum_{s=1}^{2}\sum_{p=0}^{r}z^q_{s,p}(t)\sigma_{s,p}(t,\varepsilon)+\sum_{q=0}^{n}\varepsilon^q w_q(t)+\varepsilon^{n+1}R_{n,r}(t,\varepsilon). \tag{23}$$

Подставив ряд (23) в (1) и с учётом итерационных задач, получим задачу для остаточного члена $R_{n,r}(t,\varepsilon)$:

$$\varepsilon\dot R_{n,r}(t,\varepsilon)-A(t)R_{n,r}(t,\varepsilon)=-H(t,\varepsilon),\quad R_{n,r}(0,\varepsilon)=0, \tag{24}$$

где

$$H(t,\varepsilon)=\sum_{s=1}^{2}\biggl[\sum_{p=0}^{r-1}(\dot z^n_{s,p}(t)+z^n_{3-s,p+1}(t))\sigma_{s,p}(t,\varepsilon)+\dot z^n_{s,r}\sigma_{s,r}(t,\varepsilon)\biggr]+\dot w_n(t). \tag{25}$$

Как следует из условий 5) на спектр в задаче (1) и оценок интегралов $\sigma_{s,p}(t,\varepsilon)$ (см. приложение), правая часть (25) имеет оценку

$$\|H(t,\varepsilon)\|_{C[0,T]}\leqslant\mathbb{C}\quad\text{для всех}\quad(t,\varepsilon)\in[0,T]\times(0,\varepsilon_0].$$

Решение (24) запишем в виде

$$R_{k,m}=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t U_\varepsilon(t,s)H(s,\varepsilon)\,ds,$$

где $U_\varepsilon(t,s)$ – разрешающий оператор, являющийся решением следующей задачи Коши:

$$\varepsilon\dot U_\varepsilon(t,s)=A(t)U_\varepsilon(t,s),\quad U_\varepsilon(t,s)|_{s=t}=I.$$

Из условий 5) на спектр в задаче (1) следует, что $U_\varepsilon(t,s)$ ограничен на $[0,T]\times[0,t]$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, т.е. выполняется оценка

$$\|U_\varepsilon(t,s)\|_{C[0,T]}\leqslant \mathbb{C}.$$

Следовательно, из соотношения

$$R_{k,m}=-U_\varepsilon(t,s)A^{-1}(s)H(s,\varepsilon)|_0^t+\int\limits_0^t U_\varepsilon(t,s)\frac{d}{ds}A^{-1}(s)H(s,\varepsilon)\,ds=$$

$$=-A^{-1}(t)H(t,\varepsilon)+U_\varepsilon(t,0)A^{-1}(0)H(0,\varepsilon)+\int\limits_0^t U_\varepsilon(t,s)\frac{d}{ds}A^{-1}(s)H(s,\varepsilon)\,ds$$

получим

$$\|R_{n,r}\|_{C[0,T]}\leqslant \mathbb{C}.$$

Из этих двух оценок следует

Теорема 3 (об оценке остатка, асимптотическая сходимость). *Пусть дана задача Коши (1) и выполнены условия 1)–5). Тогда справедлива оценка*

$$\left\|u(t,\varepsilon)-\sum_{q=0}^n\varepsilon^q\sum_{s=1}^2\sum_{p=0}^r z_{s,p}^q(t)\sigma_{s,p}(t,\varepsilon)+\sum_{q=0}^n\varepsilon^q w_q(t)\right\|_{C[0,T]}\leqslant \mathbb{C}\varepsilon^{n+1},$$

где $\mathbb{C}\geqslant 0$ – константа, не зависящая от ε, а функции $z_{s,p}^q(t)$ и $w_q(t)$ получены из решения итерационных задач при значениях $0\leqslant q\leqslant n$, $0\leqslant p\leqslant r$.

Теорема 4 (о предельном переходе). *Пусть дана задача (1) и выполнены условия 1)–5). Тогда:*

a) если $\operatorname{Re}\lambda_i\leqslant-\delta<0$, то $\lim\limits_{\varepsilon\to0}u(t,\varepsilon)=-A^{-1}(t)h(t)$, $t\in[\delta_0,T]$, где $\delta_0>0$ – сколь угодно малое значение;

b) если $\operatorname{Re}\lambda_i\leqslant 0$, то для всех $\varphi(t)\in C^\infty[0,T]$ справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int\limits_0^T\Big(u(t,\varepsilon)+A^{-1}(t)h(t)\Big)\varphi(t)dt=0.$$

Доказательство. *a*) Утверждение этого пункта непосредственно следует из оценок интегралов $\sigma_{s,p}(t,\varepsilon)$ в лемме из Приложения.

b) В этом случае $\sigma_{s,p}(t,\varepsilon)$ являются быстро осциллирующими функциями и доказательство предельного перехода в слабом смысле следует из леммы Римана–Лебега.

5. Приложение. Рассмотрим систему

$$\varepsilon\dot J(t)=\begin{pmatrix}\lambda_1(t)&0\\0&\lambda_2(t)\end{pmatrix}J(t)+\varepsilon\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}J(t),\quad J(0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\tag{26}$$

где $J(t)=\begin{pmatrix}J_1(t)\\J_2(t)\end{pmatrix}$ – вектор-функция. Система (26) в общем случае в явном виде не решается. Найдём решение (26) методом последовательных приближений.

Лемма. *Решение (26) представляется в виде равномерно сходящегося ряда на $[0,T]\times$ $\times(0,\varepsilon_0]$, которое допускает следующую оценку:*

a) если $\operatorname{Re}\lambda_i\leqslant-\delta<0$, то $\|J\|_{C[0,T]}\leqslant e^{-\delta t/\varepsilon}\mathbb{C}$;

b) если $\operatorname{Re}\lambda_i\leqslant 0$, то $\|J\|_{C[0,T]}\leqslant\mathbb{C}$,

где $\mathbb{C}>0$ – константа, не зависящая от ε.

Доказательство. Решив (26) методом последовательных приближений, получим

$$J(t)=\exp\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\Big)+\exp\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\Big)\int\limits_0^t\exp\Big(-\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^s\Big)T\exp\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^s\Big)\,ds+$$

$$+\exp\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\Big)\int\limits_0^t\exp\Big(-\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^s\Big)T\exp\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^s\Big)\int\limits_0^s\exp\Big(-\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^{s_1}\Big)T\exp\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^{s_1}\Big)\,ds_1\,ds+\ldots,$$

здесь

$$T=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \Lambda_0^t=\begin{pmatrix}\varphi_1(t)&0\\0&\varphi_2(t)\end{pmatrix}.$$

Использовав свойство

$$T\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix}\varphi_1(t)&0\\0&\varphi_2(t)\end{pmatrix}\right)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix}\varphi_2(t)&0\\0&\varphi_1(t)\end{pmatrix}\right)T,$$

получим

$$J(t)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right)+\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right)\int\limits_0^t\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\triangle_0^s\right)T\,ds+$$

$$+\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right)\int\limits_0^t\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\triangle_0^s\right)\int\limits_0^s\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\triangle_0^{s_1}\right)T\,ds_1\,ds+$$

$$+\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Lambda_0^t\right)\int\limits_0^t\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\triangle_0^s\right)\int\limits_0^s\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\triangle_0^{s_1}\right)\int\limits_0^{s_1}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\triangle_0^{s_2}\right)T\,ds_2\,ds_1\,ds+\ldots,\qquad(27)$$

где

$$\triangle_0^t=\begin{pmatrix}\varphi_2(t)-\varphi_1(t)&0\\0&\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\end{pmatrix}.$$

Покомпонентно выражение (27) выглядит следующим образом:

$$J_1(t)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_1(t)\right)+\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_1(t)\right)\int\limits_0^t\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s)\right)ds+$$

$$+\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_1(t)\right)\int\limits_0^t\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s)\right)\int\limits_0^s\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s_1)\right)ds_1\,ds+\ldots,$$

$$J_2(t)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_2(t)\right)+\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_2(t)\right)\int\limits_0^t\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s)\right)ds+$$

$$+\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\varphi_2(t)\right)\int\limits_0^t\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s)\right)\int\limits_0^s\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\Delta\varphi(s_1)\right)ds_1\,ds+\ldots\qquad(28)$$

Равномерная сходимость рядов (28) следует из оценок:

a) при $\operatorname{Re}\lambda_i(t)\leqslant-\delta<0,\ \ t\in[0,T]$,

$$|e^{\varphi_1(t)/\varepsilon}|\leqslant e^{-\delta t/\varepsilon},$$

$$\left|e^{\varphi_1(t)/\varepsilon}\int\limits_0^t e^{(\varphi_2(s)-\varphi_1(s))/\varepsilon}\,ds\right|\leqslant\int\limits_0^t\exp\biggl(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t\operatorname{Re}\lambda_1(s_1)\,ds_1+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^s\operatorname{Re}\lambda_2(s_2)\,ds_2\biggr)\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^t e^{-\delta(t-s+s)/\varepsilon}\,ds=e^{-\delta t/\varepsilon}t,$$

$$\ldots$$

$$\left|e^{\varphi_1(t)/\varepsilon}\int\limits_0^t e^{\Delta\varphi(s_1)/\varepsilon}\int\limits_0^{s_1}e^{\Delta\varphi(s_2)/\varepsilon}\ldots\int\limits_0^{s_{p-1}}e^{(-1)^p\Delta\varphi(s_n)/\varepsilon}\,ds_p\cdots ds_1\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^t\int\limits_0^{s_1}\cdots\int\limits_0^{s_{p-1}}e^{(\varphi_1(t)-\varphi_1(s_1)+\ldots+(-1)^{p+1}\varphi_1(s_p))/\varepsilon}e^{(\varphi_2(s_1)-\varphi_2(s_2)+\ldots+(-1)^p\varphi_2(s_p))/\varepsilon}\,ds_1\cdots ds_p\leqslant e^{-\delta t/\varepsilon}\frac{(t)^p}{p!},$$

откуда имеем

$$|J_1(t,\varepsilon)|\leqslant e^{-\delta t/\varepsilon}e^t\leqslant e^Te^{-\delta t/\varepsilon};$$

$$|J_2(t,\varepsilon)|\leqslant e^Te^{-\delta t/\varepsilon}.$$

b) при $\operatorname{Re}\lambda_i(t)\leqslant 0,\ \ t\in[0,T]$,

$$|J_i(t)|\leqslant e^T,\quad i=1,2.$$

Следовательно, ряды (28) сходятся равномерно по ε и t на $[0,T]\times(0,\varepsilon_0]$. Кроме того, легко проверяется, что ряды допускают действие оператора $\varepsilon\dfrac{d}{dt}$ в любой степени.

6. Пример. Здесь приведём решение задачи Коши

$$\varepsilon\dot u(t,\varepsilon)=A(t)u(t,\varepsilon)+h(t),\quad u(t,\varepsilon)=u^0. \tag{29}$$

Пусть выполнены условия 1)–5) задачи (1) при $n=3$, $m=2$, $k=1$. Для удобства обозначим эти требования здесь повторно:

1) $h(t)\in C^\infty([0,T],R^3)$;

2) $A(t)\in C^\infty([0,T],\mathcal{L}(R^3,R^3))$;

3) для собственных значений предельного оператора $A(t)$:

а) для всех $t\in(0,T]$ $\lambda_1(t)\neq\lambda_2(t)$, $\lambda_i(t)\neq0$, $i=\overline{1,2}$;

б) условие "слабой" точки поворота первого порядка при $t=0$:

$$\lambda_2(t)-\lambda_1(t)=ta(t),\quad a(t)\neq0;$$

в) геометрическая кратность собственных значений равна алгебраической для всех $t\in$ $\in[0,T]$;

4) $\operatorname{Re}\lambda_i(t)\leqslant0$, $i=\overline{1,2}$, для $t\in[0,T]$;

5) $A(t)=\lambda_1(t)P_1(t)+\lambda_2(t)P_2(t)$, $\dim\operatorname{Im}P_1(t)=2$, $\dim\operatorname{Im}P_2(t)=1$.

В базисе из собственных векторов $e_i(t)$, $i=\overline{1,3}$, оператора $A(t)$ производные проекторов имеют вид

$$\dot P_1(t)=\begin{pmatrix}0&0&-C_3^1\\0&0&-C_3^2\\C_1^3&C_2^3&0\end{pmatrix},\quad \dot P_2(t)=\begin{pmatrix}0&0&C_3^1\\0&0&C_3^2\\-C_1^3&-C_2^3&0\end{pmatrix},$$

где $C_i^j(t)$ – коэффициенты разложения $\dot e_i(t)$ по базису $\dot e_i(t)=\sum_{j=0}^3C_i^j(t)e_j(t)$.

Сингулярности в данном случае имеют вид

$$\sigma_{1,k} = e^{\varphi_1(t)/\varepsilon} \underbrace{\int\limits_0^t e^{\Delta\varphi(s_1)/\varepsilon} \int\limits_0^{s_1} e^{-\Delta\varphi(s_2)/\varepsilon} \cdots \int\limits_0^{s_{k-1}} e^{(-1)^{k+1}\Delta\varphi(s_k)/\varepsilon}}_{k \text{ интегралов}} ds_k \cdots ds_1,$$

$$\sigma_{2,k} = e^{\varphi_2(t)/\varepsilon} \underbrace{\int\limits_0^t e^{-\Delta\varphi(s_1)/\varepsilon} \int\limits_0^{s_1} e^{\Delta\varphi(s_2)/\varepsilon} \cdots \int\limits_0^{s_{k-1}} e^{(-1)^{k}\Delta\varphi(s_k)/\varepsilon}}_{k \text{ интегралов}} ds_k \cdots ds_1.$$

Решение будем искать в виде

$$u(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \bigg[\sum_{p=0}^{\infty} \sigma_{1,p} x_k^p(t) + \sigma_{2,p} y_k^p(t) + z_k(t) \bigg].$$

Подставив функцию $u(t,\varepsilon)$ в уравнение, получим серию итерационных задач. Вычислим главный член асимптотики.

При ε^0 имеем

$$z_0(t) = -A^{-1}(t)h(t);$$

$$(A(t)-\lambda_1(t))x_0^0(t) = 0, \quad P_1(0)x_0^0(0) = P_1(0)u^0 + \frac{P_1(0)h(0)}{\lambda_1(0)};$$

$$(A(t)-\lambda_2(t))y_0^0(t) = 0, \quad P_2(0)y_0^0(0) = P_2(0)u^0 + \frac{P_2(0)h(0)}{\lambda_2(0)};$$

$$(A(t)-\lambda_1(t))x_0^p(t) = 0, \quad P_1(0)x_0^p(0) = ?;$$

$$(A(t)-\lambda_2(t))y_0^p(t) = 0, \quad P_2(0)y_0^p(0) = ?.$$

Начальные условия для $x_0^p(t)$, $y_0^p(t)$ при $p \geqslant 1$ находятся на основании теоремы разрешимости при рассмотрении итерационных задач на шаге ε.

При ε получим

$$z_0(t) = -\bigg(\frac{d}{dt}A^{-1}(t)\bigg)A^{-1}(t)h(t);$$

$$(A(t)-\lambda_1(t))x_1^p(t) = \frac{d}{dt}(P_1(t)x_0^p(t)) + P_2(t)y_0^{p+1}(t), \quad P_1(0)x_1^p(0) = ?;$$

$$(A(t)-\lambda_2(t))y_0^p(t) = \frac{d}{dt}(P_2(t)y_0^p(t)) + P_1(t)x_0^{p+1}(t), \quad P_2(0)y_0^p(0) = ?. \qquad (30)$$

Из условий разрешимости системы (30) получим уравнения

$$\frac{d}{dt}P_1(t)x_0^p(t) = \dot{P}_1(t)P_1(t)x_0^p(t),$$

$$P_1(0)x_0^0(0) = P_1(0)u^0 + \frac{P_1(0)h(0)}{\lambda_1(0)},$$

$$P_1(0)x_0^p(0) = ?, \quad p \geqslant 1,$$

и уравнения

$$\frac{d}{dt}P_2(t)y_0^p(t) = \dot{P}_2(t)P_2(t)y_0^p(t),$$

$$P_2(0)y_0^0(0) = P_2(0)u^0 + \frac{P_2(0)h(0)}{\lambda_2(0)},$$

$$P_2(0)y_0^p(0) = ?, \quad p \geqslant 1.$$

Решение задачи Коши при $p = 0$ имеет вид

$$P_1(t)x_0^0(t) = U_1(t,0)P_1(0)x_0^0(0), \quad P_2(t)y_0^0(t) = U_2(t,0)P_2(0)y_0^0(0).$$

Для определения начальных условий при $p \geqslant 1$ подчиним системы при ε условиям точечной разрешимости

$$P_2(0)\,\frac{d}{dt}(P_1x_0^p)(0) + P_2(0)y_0^{p+1}(0) = 0, \quad P_1(0)\,\frac{d}{dt}(P_2y_0^p)(0) + P_1(0)x_0^{p+1}(0) = 0,$$

что даёт рекуррентно начальные условия при $p \geqslant 1$:

$$P_1(0)x_0^p(0) = P_1(0)\dot{P}_2(0)P_2(0)y_0^{p-1}(0), \quad P_2(0)y_0^p(0) = P_2(0)\dot{P}_1(0)P_1(0)x_0^{p-1}(0).$$

Тогда решения задач Коши при $p \geqslant 1$ запишутся в виде

$$P_1(t)x_0^p(t) = U_1(t,0)P_1(0)x_0^p(0), \quad P_2(t)y_0^p(t) = U_2(t,0)P_2(0)y_0^p(0),$$

или покомпонентно

$$\begin{pmatrix}\alpha_0^p(0)\\ \beta_0^p(0)\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & C_3^1\\ 0 & 0 & C_3^2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \gamma_0^p(0)\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \gamma_0^p(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & C_3^1\\ 0 & 0 & C_3^2\\ C_1^3(0) & C_2^3(0) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0^p(0)\\ \beta_0^p(0)\\ 0\end{pmatrix}.$$

Таким образом, для определения главного члена асимптотики имеем следующие задачи Коши:

$$\dot{\alpha}_0^p(t) + C_1^1(t)\alpha_0^p + C_2^1(t)\beta_0^P(t) = 0, \quad \dot{\beta}_0^p(t) + C_2^2(t)\beta_0^p + C_2^1(t)\alpha_0^p(t) = 0,$$

$$\alpha_0^p(0) = \left(u_1^0 + \frac{h_1(0)}{\lambda_1(0)}\right)\delta_0^p + C_3^1(0)\gamma_0^{p-1}, \quad \beta_0^p(0) = \left(u_2^0 + \frac{h_2(0)}{\lambda_2(0)}\right)\delta_0^p + C_3^2(0)\gamma_0^{p-1}$$

и

$$\dot{\gamma}_0^p(t) + C_3^3(t)\gamma_0^p(t), \quad \gamma_0^p(0) = \left(u_3^0 + \frac{h_3(0)}{\lambda_2(0)}\right)\delta_0^p + C_1^3(0)\alpha_0^{p-1} + C_2^3(0)\beta_0^{p-1}.$$

Главный член асимптотики решения задачи (29) имеет вид

$$u_{\text{гл}}(t) = \sum_{p=0}^{\infty}[\sigma_{1,p}(t,\varepsilon)U_1(t,0)P_1(0)x_0^p(0) + \sigma_{2,p}(t,\varepsilon)U_2(t,0)P_2(0)y_0^p(0)] - A^{-1}(t)h(t).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.
2. *Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.* Регуляризованная асимптотика решений интегродифференциальных уравнений с частными производными с быстро изменяющимися ядрами // Уфимск. мат. журн. 2018. Т. 10. № 2. С. 3–12.

3. *Butuzov V.F., Nefedov N.N., Schneider K.R.* Singularly perturbed problems in case of exchange of stabilities // J. of Math. Sci. 2004. V. 121. № 1. P. 1973–2079.
4. *Lioville J.* Second memoire sur le developpement des fonction ou parties de fonctions en series dont les divers termes sont assujetis a satisfaire a une meme equation differentielle du second ordre, contenant un parametre variable // J. Math. Pure Appl. 1837. V. 2. P. 16–35.
5. *Елисеев А.Г., Ломов С.А.* Теория сингулярных возмущений в случае спектральных особенностей предельного оператора // Мат. сб. 1986. Т. 131 (173). № 4 (12). С. 544–557.
6. *Елисеев А.Г., Ратникова Т.А.* Сингулярно возмущённая задача Коши при наличии рациональной “простой” точки поворота у предельного оператора // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2019. № 3. С. 63–73.
7. *Елисеев А.Г.* Регуляризованное решение сингулярно возмущённой задачи Коши при наличии иррациональной “простой” точки поворота // Дифференц. уравнения и процессы управления. 2020. № 2. С. 15–32.
8. *Елисеев А.Г., Кириченко П.В.* Решение сингулярно возмущённой задачи Коши при наличии “слабой” точки поворота у предельного оператора // Итоги науки и техн. Сер. Совр. математика и её прил. 2021. Т. 192. С. 55–64.

Национальный исследовательский университет
“Московский энергетический институт”

Поступила в редакцию 28.12.2021 г.
После доработки 28.12.2021 г.
Принята к публикации 25.05.2022 г.