ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 6, с. 747–755

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.929

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

© 2022 г. **А. Л. Скубачевский, А. Ш. Адхамова**

Рассмотрена система управления, описываемая системой дифференциальных уравнений запаздывающего типа с переменными матричными коэффициентами и несколькими запаздываниями. Показана связь между вариационной задачей для нелокального функционала, описывающей многомерную систему управления с запаздываниями, и соответствующей краевой задачей для систем дифференциально-разностных уравнений. Доказаны существование, единственность и гладкость обобщённого решения краевой задачи на всём интервале.

DOI: 10.31857/S0374064122060036, EDN: CCJPYL

Введение. Теория управляемых систем с последействием изучалась многими авторами (см., например, [1–5]). Широко известно, что обратная связь в системе управления может привести к задержке сигнала. Обычно предполагалось, что функционально-дифференциальные уравнения, описывающие систему, имеют запаздывающий или нейтральный тип. Задача об успокоении системы управления с последействием, описываемая системой дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием, рассматривалась Н.Н. Красовским [2]. Предполагалось, что имеется одно постоянное запаздывание и коэффициенты системы также постоянные. В работах [6–11] эта задача обобщалась на случай, когда уравнение, описывающее управляемую систему, содержит также старшие члены с запаздыванием, т.е. имеет нейтральный тип.

В данной работе рассматривается задача об успокоении многомерной системы управления, описываемой системой дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа с переменными матричными коэффициентами и несколькими запаздываниями. Устанавливается связь между вариационной задачей для нелокального функционала, описывающей многомерную систему управления с запаздываниями, и соответствующей краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений. Доказывается существование, единственность и гладкость обобщённого решения этой задачи (в отличие от нейтрального типа можно доказать гладкость решений на всём интервале).

1. Постановка задачи. В данной работе рассмотрим линейную нестационарную систему управления, описываемую системой дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа

$$A_0(t)y'(t)+\sum_{m=0}^{M}B_m(t)y(t-m\tau)=u(t),\quad 0<t<T,\tag{1}$$

где $y(t)=(y_1(t),\ldots,y_n(t))^{\text{т}}$ – вектор-функция состояния системы, $u(t)=(u_1(t),\ldots,u_n(t))^{\text{т}}$ – вектор-функция управления, $A_0(t)$ – невырожденная матрица порядка $n\times n$, $B_m(t)$ – матрица порядка $n\times n$ с элементами $a_{ij}^0(t)$, $b_{ij}^m(t)$ соответственно, которые являются непрерывно дифференцируемыми функциями на $\mathbb{R}$, $\tau=\text{const}>0$ – запаздывание.

Предыстория системы определяется начальным условием

$$y(t)=\varphi(t)\quad\text{для почти всех}\quad t\in[-M\tau,0],\tag{2}$$

где $\varphi(t)=(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t))^{\text{т}}\in L_2^n(-M\tau,0)$ – заданная вектор-функция, $L_2^n(a,b)=\prod_{i=1}^n L_2(a,b)$ – пространство вектор-функций со скалярным произведением $(v,w)_{L_2^n(a,b)}=\sum_{i=1}^n(v_i,w_i)_{L_2(a,b)}$, $v=(v_1,\ldots,v_n)^{\text{т}}$, $w=(w_1,\ldots,w_n)^{\text{т}}$.

Поскольку функция $\varphi \in L_2^n(-M\tau, 0)$ определена п.в. на отрезке $[-M\tau, 0]$, зададим дополнительно начальное условие

$$y(0+0) = \varphi_0, \tag{3}$$

где $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$ – некоторый вектор.

Рассмотрим задачу о приведении системы (1), (2) в положение равновесия при $t \geqslant T$. Для этого найдём такое управление $u(t)$, $0 < t < T$, что

$$y(t) = 0, \quad t \in [T - M\tau, T], \tag{4}$$

где $T > 2M\tau$.

Из всевозможных управлений будем искать управление, доставляющее минимум функционалу энергии

$$\int\limits_0^T |u(t)|^2\, dt \to \min.$$

Здесь $|\cdot|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, получим вариационную задачу о минимуме функционала

$$J(y) := \int\limits_0^T \left| A_0(t)y'(t) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t - m\tau)\right|^2 dt \to \min \tag{5}$$

с краевыми условиями (2)–(4).

2. Связь между вариационной и краевой задачами. Введём некоторые вещественные функциональные пространства.

Обозначим через $C(\mathbb{R})$ пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций с нормой

$$\|x(t)\|_{C(\mathbb{R})} = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|. \tag{6}$$

Пусть $C^k(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, – пространство непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, ограниченных на $\mathbb{R}$ вместе со всеми производными вплоть до k-го порядка, с нормой

$$\|x(t)\|_{C^k(\mathbb{R})} = \max_{0\leqslant i\leqslant k} \sup_{t\in\mathbb{R}} |x^{(i)}(t)|.$$

Обозначим через $W_2^k(a, b)$ пространство абсолютно непрерывных на $[a, b]$ функций, имеющих производную k-го порядка из $L_2(a, b)$ со скалярным произведением

$$(v, w)_{W_2^k(a,b)} = \sum_{i=0}^{k} \int\limits_a^b v^{(i)}(t)w^{(i)}(t)\, dt.$$

Пусть $\mathring{W}_2^k(a, b) = \{w \in W_2^k(a, b) : w^{(i)}(a) = w^{(i)}(b) = 0,\ i = \overline{0, k-1}\}$.

Введём пространства вектор-функций

$$W_2^{k,n}(a, b) = \prod_{i=1}^{n} W_2^k(a, b), \quad \mathring{W}_2^{k,n}(a, b) = \prod_{i=1}^{n} \mathring{W}_2^k(a, b)$$

со скалярным произведением

$$(v, w)_{W_2^{k,n}(a,b)} = \sum_{i=1}^{n} (v_i, w_i)_{W_2^k(a,b)},$$

где $v = (v_1, \ldots, v_n)^{\mathrm{т}}$, $w = (w_1, \ldots, w_n)^{\mathrm{т}}$.

Покажем, что вариационная задача (2)–(5) эквивалента краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка.

Пусть $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ – решение вариационной задачи (2)–(5), где $\varphi \in L_2^n(-M\tau, 0)$. Введём пространства

$$\widetilde{L} = \{v \in L_2^n(-M\tau, T) : v(t) = 0, \quad t \in (-M\tau, 0) \bigcup (T - M\tau, T)\},$$

$$\widetilde{W} = \{v \in W_2^{1,n}(-M\tau, T) : v(t) = 0, \quad t \in (-M\tau, 0) \bigcup (T - M\tau, T)\}.$$

Часто мы будем отождествлять пространство $\widetilde{L}$ с $L_2(0, T - M\tau)$, а пространство $\widetilde{W}$ с $\mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)$, не оговаривая этого специально.

Пусть $v \in \widetilde{W}$ – произвольная фиксированная функция. Тогда функция $y + sv \in W_2^{1,n}(0, T)$ удовлетворяет краевым условиям (2)–(4) для каждого $s \in \mathbb{R}$.

Обозначим $J(y + sv) = F(s)$. Поскольку $J(y + sv) \geqslant J(y) \quad (s \in \mathbb{R})$, имеем

$$\left.\frac{dF}{ds}\right|_{s=0} = 0. \tag{7}$$

Положим

$$B(y, v) := \int\limits_0^T \left(A_0(t)y'(t) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t - m\tau)\right)^{\text{т}} \left(A_0(t)v'(t) + \sum_{l=0}^{M} B_l(t)v(t - l\tau)\right) d\tau. \tag{8}$$

Из (7) следует, что

$$B(y, v) = 0, \quad v \in \widetilde{W}. \tag{9}$$

В слагаемых, содержащих $v(t - l\tau)$, сделаем замену переменной $\xi = t - l\tau$. Получим

$$B(y, v) = \int\limits_0^T \left(A_0(t)y'(t) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t - m\tau)\right)^{\text{т}} A_0(t)v'(t)\, dt +$$

$$+\sum_{l=0}^{M} \int\limits_{-l\tau}^{T-l\tau} \left(A_0(\xi + l\tau)y'(\xi + l\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(\xi + l\tau)y(\xi + (l - m)\tau)\right)^{\text{т}} B_l(\xi + l\tau)v(\xi)\, d\xi.$$

Вернёмся к старой переменной t, полагая $t = \xi$. С учётом $v(t) = 0$ при $t \in (-M\tau, 0) \bigcup$ $\bigcup (T - M\tau, T)$ будем иметь

$$B(y, v) = \int\limits_0^{T-M\tau} \left(A_0(t)y'(t) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t - m\tau)\right)^{\text{т}} A_0(t)v'(t)\, dt +$$

$$+\sum_{l=0}^{M} \int\limits_0^{T-l\tau} \left(A_0(t + l\tau)y'(t + l\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t + l\tau)y(t + (l - m)\tau)^{\text{т}} B_l(t + l\tau)\right) v(t)\, dt. \tag{10}$$

Из (9), (10) и определения производной в смысле теории обобщённых функций следует, что

$$\left[A_0^{\text{т}}(t)A_0(t)y'(t) + A_0^{\text{т}}(t) \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t - m\tau)\right]' \in L_2^n(0, T - M\tau), \tag{11}$$

т.е.

$$A_0^{\text{т}}(t)A_0(t)y'(t) + \sum_{m=0}^{M} A_0^{\text{т}}(t)B_m(t)y(t-m\tau) \in W_2^{1,n}(0, T-M\tau). \tag{12}$$

Поскольку предполагаем, что $\varphi \in L_2^n(-M\tau, 0)$, производная каждого из слагаемых в (11), стоящих в квадратных скобках, вообще говоря, может быть сингулярной обобщённой функцией и в этом случае не будет принадлежать $L_2^n(-M\tau, 0)$.

В силу (12), подставив (10) в (9), можем провести интегрирование по частям. Тогда получим

$$-\left[A_0^{\text{т}}(t)A_0(t)y'(t) + A_0^{\text{т}}(t)\sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t-m\tau)\right]' + \sum_{l=0}^{M} B_l^{\text{т}}(t+l\tau)A_0(t+l\tau)y'(t+l\tau) +$$

$$+\sum_{l,m=0}^{M} B_l^{\text{т}}(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t-(m-l)\tau) = 0, \quad t \in (0, T-M\tau). \tag{13}$$

Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(0,T)$ удовлетворяет системе (13) дифференциально-разностных уравнений почти всюду на интервале $(0, T-M\tau)$.

Определение 1. Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(0,T)$ называется *обобщённым решением задачи* (2)–(4), (13), если выполняется условие (12), $y(t)$ почти всюду на $(0, T-M\tau)$ удовлетворяет системе уравнений (13), а также краевым условиям (2)–(4).

Очевидно, что следующее определение обобщённого решения эквивалентно определению 1.

Определение 2. Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(0,T)$ называется *обобщённым решением задачи* (2)–(4), (13), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$B(y,v) = \int\limits_0^{T-M\tau} \left(\left\{(A_0^{\text{т}}(t)A_0(t)y'(t))^{\text{т}} + \left(A_0^{\text{т}}(t)\sum_{m=0}^{M} B_m^{\text{т}}(t+m\tau)y(t-m\tau)\right)^{\text{т}}\right\}v'(t) +\right.$$

$$+\left\{\left(\sum_{l=0}^{M} B_l^{\text{т}}(t+l\tau)A_0(t+l\tau)y'(t+l\tau)\right)^{\text{т}} +\right.$$

$$\left.\left.+\left(\sum_{l,m=0}^{M} B_l^{\text{т}}(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t-(m-l)\tau)\right)^{\text{т}}\right\}v(t)\right)dt = 0 \tag{14}$$

для всех $v \in \mathring{W}_2^{1,n}(0, T-M\tau)$ и краевым условиям (2)–(4).

Таким образом, мы доказали, что если вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(0,T)$ является решением вариационной задачи (2)–(5), то она будет обобщённым решением краевой задачи (2)–(4), (13).

Докажем обратное утверждение.

Пусть $y \in W_2^{1,n}(0,T)$ – обобщённое решение краевой задачи (2)–(4), (13). Тогда для всех $v \in \widetilde{W}$ мы получаем

$$J(y+v) = J(y) + J(v) + 2B(y,v),$$

где $J(v)$ – неотрицательный квадратичный функционал. Поскольку y – обобщённое решение задачи (2)–(4), (13), то $B(y,v) = 0$. Следовательно,

$$J(y+v) \geqslant J(y)$$

для всех $v \in \widetilde{W}$. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in L_2^n(-M\tau, 0)$. Функция $y \in W_2^{1,n}(0,T)$ доставляет минимум функционалу (5) с краевыми условиями (2)–(4) тогда и только тогда, когда она является обобщённым решением краевой задачи (2)–(4), (13).*

3. Разрешимость краевой задачи. Далее докажем однозначную разрешимость краевой задачи (2)–(4), (13).

Введём оператор $R_0 : \widetilde{L} \to L_2^n(0,T)$ по формуле

$$(R_0 v)(t) = A_0(t)v(t).$$

Рассмотрим функционал

$$J_0(v) = \int\limits_0^T |(R_0 v')(t)|^2\,dt, \quad v \in \widetilde{W}.$$

Лемма 1. *Пусть* $\det A_0(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$. *Тогда для всех* $w \in \widetilde{W}$ *выполняется оценка*

$$J_0(w) \geqslant c_0 \|w\|^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)},$$

где c_0 *– положительная постоянная, не зависящая от* w.

Доказательство следует из невырожденности матрицы $A_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Лемма 2. *Пусть* $\det A_0(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$. *Тогда для всех* $w \in \widetilde{W}$

$$J(w) \geqslant c_1 \|w\|^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}, \tag{15}$$

где c_1 *– положительная постоянная, не зависящая от* w.

Доказательство. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству леммы 3.2 из [10], однако для полноты картины приведём его полностью.

1. Предположим противное: неравенство (15) не выполняется. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $w_k \in \widetilde{W}$ такое, что

$$J(w_k) \leqslant \frac{1}{k}\|w_k\|^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $\|w_k\|_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 1$. Тогда имеем неравенство

$$J(w_k) \leqslant \frac{1}{k}. \tag{16}$$

Введём оператор $R_1 : \widetilde{L} \to L_2^n(0,T-M\tau)$ по формуле

$$(R_1 v)(t) = \sum_{k=0}^{M} B_k(t) v(t-k\tau). \tag{17}$$

Из неравенства

$$\alpha^2 \leqslant 2(\alpha+\beta)^2 + 2\beta^2 \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}),$$

леммы 1 и ограниченности оператора $R_1 : \widetilde{L} \to L_2^n(0,T-M\tau)$ для любого $v \in \widetilde{W}$ получим

$$c_0\|v\|^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} \leqslant J_0(v) \leqslant 2J(v) + 2\int\limits_0^{T-M\tau} ((R_1 v)(t))^2\,dt \leqslant 2J(v) + k_1\|v\|^2_{L_2^n(0,T-M\tau)}, \tag{18}$$

где c_0, k_1 – положительные постоянные, не зависящие от v.

В силу компактности оператора вложения $\widetilde{W}$ в $L_2^n(0,T-M\tau)$ существует подпоследовательность $\{w_{k_m}\}$, которая сходится к некоторой вектор-функции w_0 в пространстве $L_2^n(0,T-M\tau)$. Таким образом, из (16), (18) следует, что

$$c_0\|w_{k_m} - w_{k_l}\|^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} \leqslant 2J(w_{k_m} - w_{k_l}) + k_1\|w_{k_m} - w_{k_l}\|^2_{L_2^n(0,T-M\tau)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{k_m} + \frac{4}{k_l} + k_1\|w_{k_m} - w_{k_l}\|^2_{L_2^n(0,T-M\tau)} \to 0 \quad \text{при} \quad l, m \to \infty.$$

Следовательно, $w_{k_m} \to w_0$ в $\widetilde{W}$ и $\|w_0\|_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 1$. Поэтому в силу (16) мы имеем

$$J(w_0) = \int\limits_0^{T-M\tau} \left| A_0(t)w_0'(t) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)w_0(t-m\tau)\right|^2 dt = 0,$$

т.е.

$$A_0(t)w_0'(t) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)w_0(t-m\tau) = 0, \quad t \in (0, T-M\tau). \tag{19}$$

Поскольку $w_0 \in \widetilde{W}$, вектор-функция w_0 удовлетворяет начальному условию

$$w_0(t) = 0, \quad t \in [-M\tau, 0]. \tag{20}$$

Тогда, если $0 < t \leqslant \tau$, система уравнений (19) примет вид

$$A_0(t)w_0'(t) + B_0(t)w_0(t) = 0, \tag{21}$$

при этом в силу (20) $w_0(0) = 0$. Следовательно,

$$w_0(t) = 0, \quad t \in [0, \tau]. \tag{22}$$

В силу (20), (22) для $\tau < t \leqslant 2\tau$ система уравнений (19) примет вид (21), при этом в силу (22) $w_0(\tau) = 0$. Решив полученную задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (21) на полуинтервале $(\tau, 2\tau]$, имеем $w_0(t) = 0$, $t \in (\tau, 2\tau]$, и т.д.

Таким образом, $w_0(t) \equiv 0$ при $t \in [0, T-M\tau]$. Это противоречит равенству

$$\|w_0\|_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 1.$$

Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть* $\det A_0(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$. *Тогда для любой вектор-функции* $\varphi \in L_2^n(-M\tau, 0)$ *и любого* $\varphi_0 \in \mathbb{R}^n$ *существует единственное обобщённое решение краевой задачи (2)–(4), (13)* $y \in W_2^{1,n}(0,T)$, *при этом*

$$\|y\|_{W_2^{1,n}(0,T)} \leqslant c(\|\varphi\|_{L_2^n(-M\tau,0)} + |\varphi_0|), \tag{23}$$

где $c > 0$ *– постоянная, не зависящая от* φ *и* φ_0.

Доказательство. Введём вектор-функции $\Phi_0 \in L_2^n(-M\tau, T) \bigcap W_2^{1,n}(0,T)$ и $\Phi_1, \Phi_2 \in$ $\in L_2^n(0,T)$ по формулам

$$\Phi_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ -M\tau < t < 0; \\ \varphi_0 - \varphi_0 t/(T-M\tau), & \text{если } \ 0 < t < T-M\tau; \\ 0, & \text{если } \ T-M\tau < t < T; \end{cases} \tag{24}$$

$$\Phi_1(t) = \begin{cases} A_0^{\mathrm{т}}(t)\displaystyle\sum_{m=k}^{M} B_m^{\mathrm{т}}(t)\varphi(t-m\tau), & \text{если } \ (k-1)\tau < t < k\tau, \quad k = \overline{1,M}; \\ 0, & \text{если } \ M\tau < t < T; \end{cases} \tag{25}$$

$$\Phi_2(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{l,m} B_l^{\mathrm{т}}(t+l\tau)B_m(t+l\tau)\varphi(t-(m-l)\tau), & \text{если } \ (k-1)\tau < t < k\tau, \quad k = \overline{1,M}; \\ 0, & \text{если } \ M\tau < t < T. \end{cases} \tag{26}$$

В формуле для $\Phi_2(t)$ суммирование производится по l, m таким образом, что $k \leqslant m-l \leqslant M$.

Доказательство теоремы 2 основано на технике билинейных форм применительно к интегральному тождеству (14). Однако $B(y,v)$ не является билинейной формой, поскольку функция y удовлетворяет неоднородным краевым условиям (2), (3), поэтому введём вспомогательные билинейные формы $B_0(\varphi_0,v)$ $(\varphi_0\in\mathbb{R}^n,\ v\in\widetilde{W})$, $B_1(\varphi,v)$, $B_2(\varphi,v)$ $(\varphi\in L_2^n(-M\tau,0)$, $v\in\widetilde{W})$ по формулам

$$B_0(\varphi_0,v)=B(\Phi_0,v),\quad B_1(\varphi,v)=\int\limits_0^{T-M\tau}\Phi_1(t)v'(t)\,dt,\quad B_2(\varphi,v)=\int\limits_0^{T-M\tau}\Phi_2(t)v(t)\,dt.$$

Здесь функции Φ_0, Φ_1, Φ_2 задаются формулами (24), (25) и (26) соответственно.

Положим

$$x(t)=\begin{cases}y(t)-\Phi_0(t), & t\in(0,T);\\ 0, & t\in(-M\tau;0).\end{cases}$$

По построению $x\in\widetilde{W}$. Тогда интегральное тождество (14) примет вид

$$B_0(\varphi_0,v)+B_1(\varphi,v)+B_2(\varphi,v)+B(x,v)=0. \tag{27}$$

Поскольку $B(v,v)=J(v)$, $v\in\widetilde{W}$, по лемме 2 мы можем ввести в пространстве $\mathring{W}_2^1(0,T-M\tau)$ эквивалентное скалярное произведение по формуле

$$(x,v)'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)}=B(x,v).$$

Следовательно, тождество (27) может быть записано в виде

$$B_0(\varphi_0,v)+B_1(\varphi,v)+B_2(\varphi,v)+(x,v)'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)}=0. \tag{28}$$

Из неравенства Коши–Буняковского, равенства (24) и леммы 2 получим

$$|B_0(\varphi_0,v)|\leqslant k_1|\varphi_0|\|v\|_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}\leqslant k_2|\varphi_0|\|v\|'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)}, \tag{29}$$

где k_1, k_2 – положительные постоянные, не зависящие от φ_0 и v.

Вновь используя неравенства Коши–Буняковского, а также равенства (25), (26) и лемму 2, имеем

$$\begin{aligned}|B_i(\varphi,v)|&\leqslant k_3\|\varphi\|_{L_2(-M\tau,0)}\|v\|_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}\leqslant\\ &\leqslant k_4\|\varphi\|_{L_2(-M\tau,0)}\|v\|'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)},\quad i=1,2,\end{aligned} \tag{30}$$

где k_3, k_4 – положительные постоянные, не зависящие от φ и v.

Таким образом, при фиксированных φ_0 и φ функционалы $B_0(\varphi_0,v)$ и $B(\varphi,v)$ линейные и ограниченные по v на $\widetilde{W}$. В силу неравенств (29) и (30) нормы функционалов $B_0(\varphi_0,\cdot)$ и $B_i(\varphi,\cdot)$ на $\widetilde{W}$ не превышают $k_2|\varphi_0|$ и $k_4\|\varphi\|_{L_2(-M\tau,0)}$ соответственно. По теореме Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве существуют вектор-функции $F_i\in\widetilde{W}$ $(i=0,1,2)$ такие, что

$$B_0(\varphi_0,v)=(F_0,v)'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)},$$

$$B_i(\varphi_0,v)=(F_i,v)'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)},$$

при этом

$$\|F_0\|'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)}\leqslant k_2|\varphi_0|, \tag{31}$$

$$\|F_i\|'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)}\leqslant k_4\|\varphi\|_{L_2^n(-M\tau,0)}. \tag{32}$$

Функции F_i $(i = 0, 1, 2)$ определяются единственным образом. Тогда тождество (28) можно записать в виде

$$\sum_{i=0,1,2} (F_i, v)'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)} + (x, v)'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 0, \quad v \in \mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau). \tag{33}$$

Интегральное тождество (33) имеет единственное решение $x = -\sum_{i=0,1,2} F_i$. Следовательно, задача (2)–(4), (13) имеет единственное обобщённое решение $y = \Phi_0 - \sum_{i=0,1,2} F_i \in$ $\in W_2^{1,n}(0, T)$. Кроме того, в силу (24), (31), (32) выполняется оценка (23). Теорема доказана.

4. Гладкость обобщённых решений на всём интервале. Рассматриваемая нами система дифференциально-разностных уравнений имеет запаздывающий тип. Поэтому в случае достаточно гладкой начальной функции $(\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0))$ гладкость обобщённых решений сохраняется на всём интервале.

В отличие от дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа гладкость обобщённых решений уравнений нейтрального типа может нарушаться внутри интервала, на котором определено решение, и сохраняться лишь на некоторых подынтервалах (см. работы [6, 7, 12–15]).

Теорема 3. *Пусть* $\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$ *и пусть* $\varphi(0) = \varphi_0$. *Тогда обобщённое решение задачи (2)–(4), (13)* $y \in W_2^{2,n}(0, T - M\tau)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(t) = -\left(A_0^{\text{т}}(t) \sum_{m=0}^{M} B_m(t) y(t - m\tau)\right)' - \sum_{l=0}^{M} B_l^{\text{т}}(t + l\tau) A_0(t + l\tau) y'(t + l\tau) -$$

$$- \sum_{l,m=0}^{M} B_l^{\text{т}}(t + l\tau) B_m(t + l\tau) y(t - (m - l)\tau), \quad t \in (0, T - M\tau).$$

Из условий теоремы следует, что $F \in L_2^n(0, T - M\tau)$. Очевидно, что систему уравнений (13) можно записать в виде

$$-(A_0^{\text{т}}(t) A_0(t) y'(t))' = F(t), \quad t \in (0, T - M\tau),$$

откуда

$$-A_0^{\text{т}}(t) A_0(t) y''(t) = \Phi(t), \quad t \in (0, T - M\tau),$$

где $\Phi(t) = F(t) - (A_0^{\text{т}}(t) A_0(t))' y'(t)$.

Поскольку элементы матрицы $A_0(t)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями и $\det A_0(t) \neq 0$, имеем

$$y''(t) = -(A_0^{\text{т}}(t) A_0(t))^{-1} \Phi(t) \in L_2^n(0, T - M\tau),$$

т.е. $y(t) \in W_2^{2,n}(0, T - m\tau)$. Теорема доказана.

Авторы благодарят Ю.С. Осипова за обсуждение работы и ряд ценных советов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках государственного задания (соглашение 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Осипов Ю.С., Куржанский А.Б.* К задаче об управлении с ограниченными фазовыми координатами // Прикл. математика и механика. 1968. Т. 32. № 2. С. 194–202.
2. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М., 1968.

3. *Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.* Линейные дифференциально-разностные игры // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197. № 4. С. 777–780.
4. *Banks H.T., Kent G.A.* Control of functional differential equations of retarded and neutral type to target sets in function space // SIAM J. Control. 1972. V. 10. № 4. P. 567–593.
5. *Кряжимский А.В., Максимов В.И., Осипов Ю.С.* О позиционном моделировании в динамических системах // Прикл. математика и механика. 1983. Т. 47. № 6. С. 883–890.
6. *Скубачевский А.Л.* К задаче об успокоении системы управления с последействием // Докл. РАН. 1994. Т. 335. № 2. С. 157–160.
7. *Skubachevskii A.L.* Elliptic functional differential equations and applications // Operator Theory. Adv. and Appl. V. 91. Basel; Boston; Berlin, 1997.
8. *Леонов Д.Д.* К задаче об успокоении системы управления с последействием // Совр. математика. Фунд. направления. 2010. Т. 37. С. 28–37.
9. *Adkhamova A.S., Skubachevskii A.L.* Damping problem for multidimensional control system with delays // Distributed Computer and Communication Networks. 2016. № 678. P. 612–623.
10. *Адхамова А.Ш., Скубачевский А.Л.* Об одной задаче успокоения нестационарной системы управления с последействием // Совр. математика. Фунд. направления. 2019. Т. 65. № 4. С. 547–556.
11. *Адхамова А.Ш., Скубачевский А.Л.* Об успокоении системы управления с последействием нейтрального типа // Докл. РАН. 2020. Т. 490. № 1. С. 81–84.
12. *Каменский Г.А., Мышкис А.Д.* Постановка краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами в старших членах // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 3. С. 409–418.
13. *Каменский А.Г.* Краевые задачи для уравнений с формально симметричными дифференциально-разностными операторами // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12. № 5. С. 815–824.
14. *Скубачевский А.Л., Иванов Н.О.* Вторая краевая задача для дифференциально-разностных уравнений // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 500. № 1. С. 74–77.
15. *Скубачевский А.Л., Иванов Н.О.* Об обобщенных решениях второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами // Совр. математика. Фунд. направления. 2021. Т. 67. № 3. С. 576–595.

Математический институт имени С.М. Никольского,
г. Москва,
Российский университет дружбы народов,
г. Москва,
Московский центр фундаментальной
и прикладной математики

Поступила в редакцию 18.04.2022 г.
После доработки 18.04.2022 г.
Принята к публикации 25.05.2022 г.