ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 6, с. 756–762

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 519.6+517.956.4

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА И ИСТОЧНИКА В УРАВНЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© 2022 г. А. М. Денисов

Рассматривается начально-краевая задача для уравнения теплопроводности, в котором коэффициент теплопроводности и одна из функций, входящих в источник, зависят от времени и неизвестны. Ставится задача определения этих функций по дополнительной информации о решении начально-краевой задачи. Эта задача сводится к системе нелинейных операторных уравнений для неизвестных функций. Система нелинейных операторных уравнений используется при построении итерационного метода для определения искомых функций. Доказывается сходимость итерационного метода.

DOI: 10.31857/S0374064122060048, EDN: CCLWAH

1. Введение. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t = k(t)u_{xx} + g(t)f(x), \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{1.1}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \tag{1.3}$$

Будем предполагать, что функции $k(t)$ и $g(t)$ непрерывны на отрезке $[0,T]$, $k(t)$ положительна на этом отрезке, а функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям

$$f \in C^6[0,\pi], \quad f^{(2k)}(0) = f^{(2k)}(\pi) = 0, \quad k = 0,1,2; \tag{1.4}$$

$$\varphi \in C^6[0,\pi], \quad \varphi^{(2k)}(0) = \varphi^{(2k)}(\pi) = 0, \quad k = 0,1,2. \tag{1.5}$$

При сделанных предположениях решение задачи (1.1)–(1.3) существует, единственно и определяется формулой

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \exp\biggl(-n^2 \int\limits_0^t k(\theta)\,d\theta\biggr)\sin(nx) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} f_n \int\limits_0^t \exp\biggl(-n^2 \int\limits_\tau^t k(\theta)\,d\theta\biggr) g(\tau)\,d\tau \sin(nx), \tag{1.6}$$

где

$$\varphi_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \varphi(s)\sin(ns)\,ds, \quad f_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(s)\sin(ns)\,ds.$$

Сформулируем обратную задачу. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ заданы, а функции $k(t)$ и $g(t)$ неизвестны. Требуется определить $k(t)$ и $g(t)$, если задана дополнительная информация о решении задачи (1.1)–(1.3):

$$u_x(0,t) = p(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.7}$$

$$u_x(\pi,t) = h(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.8}$$

где $p(t)$ и $h(t)$ – известные функции, удовлетворяющие условиям

$$p, h \in C^1[0,T], \quad p(0) = \varphi'(0), \quad h(0) = \varphi'(\pi). \tag{1.9}$$

Исследованию обратных задач для уравнения теплопроводности посвящено большое число публикаций (см., например, [1–10] и имеющуюся в них библиографию). Обратные задачи для параболических уравнений, в которых неизвестными являются две или более функций, рассматривались в [11–17]. Итерационным методам решения обратных задач для дифференциальных уравнений посвящены работы [18–24].

Целью статьи является разработка и обоснование итерационного численного метода решения сформулированной обратной задачи.

Дадим определение решения обратной задачи. Далее, чтобы подчеркнуть зависимость решения задачи (1.1)–(1.3) от функций $k(t)$ и $g(t)$, будем обозначать его через $u(x,t;k,g)$. Пусть $t_0 \in (0,T]$.

Определение. Функции $k(t)$ и $g(t)$ называются *решением обратной задачи* для $t \in [0,t_0]$, если: $k,g \in C[0,t_0]$, $k(t) > 0$ для $t \in [0,t_0]$, $u(x,t;k,g)$ удовлетворяет уравнению (1.1) и условиям (1.2), (1.3), (1.7), (1.8) для $t \in [0,t_0]$.

Пусть функции $k(t)$ и $g(t)$ являются решением обратной задачи для $t \in [0,t_0]$. Выведем систему нелинейных операторных уравнений для этих функций.

Продифференцировав формулу (1.6) по x, положив $x=0$, $x=\pi$ и использовав условия (1.7), (1.8), получим для $t \in [0,t_0]$ равенства

$$p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\varphi_n \exp\biggl(-n^2\int_0^t k(\theta)\,d\theta\biggr) + \sum_{n=1}^{\infty} nf_n \int_0^t \exp\biggl(-n^2\int_\tau^t k(\theta)\,d\theta\biggr)g(\tau)\,d\tau, \tag{1.10}$$

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\varphi_n \cos(n\pi) \exp\biggl(-n^2\int_0^t k(\theta)\,d\theta\biggr) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} nf_n \cos(n\pi)\int_0^t \exp\biggl(-n^2\int_\tau^t k(\theta)\,d\theta\biggr)g(\tau)\,d\tau. \tag{1.11}$$

Введём операторы, действующие на функции $k(t)$ и $g(t)$:

$$A_1[k](t) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^3\varphi_n \exp\biggl(-n^2\int_0^t k(\theta)\,d\theta\biggr), \tag{1.12}$$

$$A_2[k](t) = -\sum_{n=1}^{\infty} n^3\varphi_n \cos(n\pi)\exp\biggl(-n^2\int_0^t k(\theta)\,d\theta\biggr), \tag{1.13}$$

$$B_1[k;g](t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 f_n \int_0^t \exp\biggl(-n^2\int_\tau^t k(\theta)\,d\theta\biggr)g(\tau)\,d\tau, \tag{1.14}$$

$$B_2[k;g](t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 f_n \cos(n\pi)\int_0^t \exp\biggl(-n^2\int_\tau^t k(\theta)\,d\theta\biggr)g(\tau)\,d\tau. \tag{1.15}$$

Продифференцировав равенства (1.10) и (1.11) по t, с помощью определений (1.12)–(1.15) получим уравнения

$$p'(t) = k(t)A_1[k](t) + g(t)f'(0) - k(t)B_1[k;g](t), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0, \tag{1.16}$$

$$h'(t) = k(t)A_2[k](t) + g(t)f'(\pi) - k(t)B_2[k;g](t), \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0. \tag{1.17}$$

Введём операторы

$$Q[k;g](t)=B_1[k;g](t)A_2[k](t)-B_2[k;g](t)A_1[k](t), \tag{1.18}$$

$$C[k;g](t)=\frac{p'(t)f'(\pi)-h'(t)f'(0)}{(A_1[k](t)-B_1[k;g](t))f'(\pi)-(A_2[k](t)-B_2[k;g](t))f'(0)}, \tag{1.19}$$

$$D[k;g](t)=\frac{p'(t)A_2[k](t)-h'(t)A_1[k](t)+k(t)Q[k;g](t)}{A_2[k](t)f'(0)-A_1[k](t)f'(\pi)}. \tag{1.20}$$

Решив систему уравнений (1.16), (1.17), с учётом определений (1.18)–(1.20) получим систему нелинейных операторных уравнений для функций $k(t)$ и $g(t)$:

$$k(t)=C[k;g](t),\quad 0\leqslant t\leqslant t_0, \tag{1.21}$$

$$g(t)=D[k;g](t),\quad 0\leqslant t\leqslant t_0. \tag{1.22}$$

Таким образом, мы показали, что если функции $k(t)$ и $g(t)$ являются решением обратной задачи для $t\in[0,t_0]$, то они удовлетворяют системе нелинейных операторных уравнений (1.21), (1.22).

2. Итерационный метод и его сходимость. Система операторных уравнений (1.21), (1.22) позволяет определить итерационный процесс для решения обратной задачи.

Найдём начальное приближение. Будем предполагать, что выполнено условие

$$(p'(0)f'(\pi)-h'(0)f'(0))(\varphi'''(0)f'(\pi)-\varphi'''(\pi)f'(0))>0. \tag{2.1}$$

Положив в уравнениях (1.21), (1.22) значение $t=0$, получим

$$k(0)=k_0=\frac{p'(0)f'(\pi)-h'(0)f'(0)}{\varphi'''(0)f'(\pi)-\varphi'''(\pi)f'(0)}>0, \tag{2.2}$$

$$g(0)=g_0=\frac{p'(0)\varphi'''(\pi)-h'(0)\varphi'''(0)}{f'(0)\varphi'''(\pi)-f'(\pi)\varphi'''(0)}.$$

Рассмотрим итерационный процесс

$$k_{m+1}(t)=C[k_m;g_m](t),\quad 0\leqslant t\leqslant t_0,\quad m=0,1,2,\ldots, \tag{2.3}$$

$$g_{m+1}(t)=D[k_m;g_m](t),\quad 0\leqslant t\leqslant t_0,\quad m=0,1,2,\ldots, \tag{2.4}$$

где $k_0(t)=k_0$, $g_0(t)=g_0$, и докажем его сходимость к решению обратной задачи.

Теорема. *Пусть функции $f(x)$, $\varphi(x)$, $p(t)$ и $h(t)$ удовлетворяют условиям (1.4), (1.5), (1.9) и (2.1). Тогда существует $t_0\in(0,T]$ такое, что последовательности функций $k_m(t)$, $g_m(t)$, $m=0,1,2\ldots$, определённых итерационным процессом (2.3), (2.4), равномерно сходятся на отрезке $[0,t_0]$ к функциям $\bar k(t)$, $\bar g(t)$, являющимся решением обратной задачи для $t\in[0,t_0]$.*

Доказательство. Обозначим через $\bar C[0,t_0]$ пространство вектор-функций

$$r(t)=\{k(t);g(t)\},$$

непрерывных на отрезке $[0,t_0]$ с нормой

$$\|r\|_{\bar C[0,t_0]}=\|k\|_{C[0,t_0]}+\|g\|_{C[0,t_0]}.$$

Введём функцию $r_0(t)=\{k_0;g_0\}$ и множество

$$R_0=\{r(t)\in\bar C[0,t_0];\quad \|r-r_0\|_{\bar C[0,t_0]}\leqslant k_0/2\}.$$

Оператор

$$M[r](t) = \{C[k;g](t); D[k;g](t)\},$$

где операторы $C[k;g](t)$, $D[k;g](t)$ определены формулами (1.19), (1.20), отображает множество R_0 в $\bar{C}[0,t_0]$. Сходимость итерационного процесса (2.3), (2.4) эквивалентна сходимости метода последовательных приближений

$$r_{m+1}(t) = M[r_m](t), \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.5}$$

Докажем, что найдётся $t_0 \in (0, T]$ такое, что метод последовательных приближений (2.5) сходится в норме пространства $\bar{C}[0,t_0]$.

Найдём условия, при которых оператор $M[r](t)$ отображает множество R_0 в себя.

Из определения операторов $A_1[k](t)$, $A_2[k](t)$ следует, что для $i = 1, 2$ и $t \in [0, t_0]$ выполняется условие

$$|A_i[k](t) - A_i[k](0)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^3|\varphi_n| \left| \exp\left(-n^2 \int\limits_0^t k(\theta)\,d\theta\right) - 1\right| \leqslant c_1 t_0 \quad \text{для любого} \quad r \in R_0, \tag{2.6}$$

где $c_1 = (3k_0/2)\sum_{n=1}^{\infty} n^5|\varphi_n|$.

Здесь и далее через c_i обозначаются положительные постоянные, не зависящие от $r \in R_0$ и $t \in [0, T]$.

С учётом определений (1.14), (1.15) получим для $i = 1, 2$ и $t \in [0, t_0]$

$$|B_i[k;g](t)| \leqslant t_0(|g_0| + k_0/2) \sum_{n=1}^{\infty} n^3|f_n| = c_2 t_0 \quad \text{при всех} \quad r \in R_0. \tag{2.7}$$

Обозначим через $\omega_p(\delta)$ и $\omega_h(\delta)$ модули непрерывности функций $p'(t)$ и $h'(t)$ на отрезке $[0, T]$.

Выберем $t_0 \in (0, T]$ такое, что

$$|\varphi'''(0)f'(\pi) - \varphi'''(\pi)f'(0)| - (|f'(\pi)| + |f'(0)|)(c_1 + c_2)t_0 \geqslant c_3 > 0. \tag{2.8}$$

Тогда, использовав определения (1.19), (2.2) и неравенства (2.6)–(2.8), имеем

$$|C[k;g](t) - k_0| \leqslant c_3^{-1}(\omega_p(t_0)|f'(\pi)| + \omega_h(t_0)|f'(0)|) + c_4 t_0, \quad t \in [0, t_0], \quad \text{для всех} \quad r \in R_0, \tag{2.9}$$

где

$$c_4 = c_3^{-2}|p'(0)f'(\pi) - h'(0)f'(0)|(|f'(\pi)| + |f'(0)|)(c_1 + c_2).$$

С учётом определений операторов $A_1[k](t)$, $A_2[k](t)$ и $Q[k;g](t)$ получим неравенства

$$|A_1[k](t)| \leqslant |\varphi'''(0)| + c_1 t_0, \quad |A_2[k](t)| \leqslant |\varphi'''(\pi)| + c_1 t_0, \quad t \in [0, t_0], \quad \text{для любого} \quad r \in R_0, \tag{2.10}$$

$$|Q[k;g](t)| \leqslant c_2 t_0(|\varphi'''(0)| + |\varphi'''(\pi)| + 2c_1 t_0), \quad t \in [0, t_0], \quad \text{для любого} \quad r \in R_0. \tag{2.11}$$

Из определения оператора $D[k;g](t)$ и постоянной g_0 следует, что

$$|D[k;g](t) - g_0| = |D[k;g](t) - D[k;g](0)|.$$

Учтём определения (1.18), (1.20), неравенство (2.8) и оценки (2.6), (2.7), (2.10), (2.11), в результате имеем

$$|D[k;g](t) - g_0| = |D[k;g](t) - D[k;g](0)| \leqslant$$
$$\leqslant c_3^{-1}(\omega_p(t_0)(|\varphi'''(\pi)| + c_1 t_0) + \omega_h(t_0)(|\varphi'''(0)| + c_1 t_0)) + c_5 t_0, \quad t \in [0, t_0], \quad \text{для всех} \quad r \in R_0, \tag{2.12}$$

где

$$c_5 = c_3^{-1}((|p'(0)| + |h'(0)|)c_1 + 3k_0 c_2(|\varphi'''(0)| + |\varphi'''(\pi)| + 2c_1 T)/2) +$$
$$+ c_3^{-2} c_1(|f'(0)| + |f'(\pi)|)|p'(0)\varphi'''(\pi) - h'(0)\varphi'''(0)|.$$

Выберем $t_0 \in (0,T]$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$c_3^{-1}(\omega_p(t_0)(|\varphi'''(\pi)|+|f'(\pi)|+c_1t_0)+\omega_h(t_0)(|\varphi'''(0)|+|f'(0)|+c_1t_0))+(c_4+c_5)t_0 \leqslant k_0/2. \quad (2.13)$$

Тогда из неравенств (2.9), (2.12), (2.13) следует, что оператор $M[r](t)$ отображает множество R_0 в себя.

Получим условия, при выполнении которых оператор $M[r](t)$ является сжимающим на множестве R_0.

Введём функцию $q(t)=p'(t)f'(\pi)-h'(t)f'(0)$.

Пусть $r_1(t)=\{k_1(t);g_1(t)\}$ и $r_2(t)=\{k_2(t);g_2(t)\}$ – две произвольные функции из множества R_0. Из определения (1.19) и неравенства (2.8) следует

$$\|C[k_1;g_1]-C[k_2;g_2]\|_{C[0,t_0]} \leqslant c_3^{-2}\|q\|_{C[0,T]}[|f'(\pi)|\times\|A_1[k_1]-A_1[k_2]\|_{C[0,t_0]}+$$
$$+|f'(0)|\times\|A_2[k_1]-A_2[k_2]\|_{C[0,t_0]}+|f'(\pi)|\times\|B_1[k_1;g_1]-B_1[k_2;g_2]\|_{C[0,t_0]}+$$
$$+|f'(0)|\times\|B_2[k_1;g_1]-B_2[k_2;g_2]\|_{C[0,t_0]}]. \quad (2.14)$$

С учётом определений (1.12) и (1.13) имеем

$$\|A_i[k_1]-A_i[k_2]\|_{C[0,t_0]} \leqslant c_6t_0\|k_1-k_2\|_{C[0,t_0]}, \quad i=1,2, \quad (2.15)$$

где $c_6=\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n|n^5$.

Из определения операторов $B_i[k;g](t)$, $i=1,2$, следует неравенство

$$\|B_i[k_1;g_1]-B_i[k_2,g_2]\|_{C[0,t_0]} \leqslant c_7t_0^2\|k_1-k_2\|_{C[0,t_0]}+c_8t_0\|g_1-g_2\|_{C[0,t_0]}, \quad (2.16)$$

где

$$c_7=(|g_0|+k_0/2)\sum_{n=1}^{\infty}n^5|f_n|, \quad c_8=\sum_{n=1}^{\infty}n^3|f_n|.$$

Использовав неравенства (2.14)–(2.16), получим

$$\|C[k_1;g_1]-C[k_2;g_2]\|_{C[0,t_0]} \leqslant c_9t_0\|k_1-k_2\|_{C[0,t_0]}+c_{10}t_0\|g_1-g_2\|_{C[0,t_0]}, \quad (2.17)$$

где $c_9=c_3^{-2}\|q\|_{C[0,T]}(|f'(\pi)|+|f'(0)|)(c_6+c_7T)$, $c_{10}=c_3^{-2}\|q\|_{C[0,T]}(|f'(\pi)|+|f'(0)|)c_8$.

Рассмотрим $\|Q[k_1;g_1]-Q[k_2;g_2]\|_{C[0,t_0]}$. Из формул (1.12)–(1.15) следует, что для любого $r\in R_0$ и $t\in[0,t_0]$ справедливы неравенства

$$|A_i[k](t)| \leqslant c_{11}; \quad |B_i[k;g](t)| \leqslant c_8t_0(|g_0|+k_0/2), \quad i=1,2, \quad (2.18)$$

где $c_{11}=\sum_{n=1}^{\infty}n^3|\varphi_n|$.

Тогда

$$\|Q[k_1;g_1]-Q[k_2;g_2]\|_{C[0,t_0]} \leqslant$$
$$\leqslant c_8t_0^2(2|g_0|+k_0)c_6\|k_1-k_2\|_{C[0,t_0]}+2c_{11}(c_7t_0^2\|k_1-k_2\|_{C[0,t_0]}+c_8t_0\|g_1-g_2\|_{C[0,t_0]})=$$
$$=c_{12}t_0^2\|k_1-k_2\|_{C[0,t_0]}+c_{13}t_0\|g_1-g_2\|_{C[0,t_0]}, \quad (2.19)$$

где $c_{12}=c_8(2|g_0|+k_0)c_6+2c_{11}c_7$, а $c_{13}=2c_{11}c_8$.

С учётом оценок (2.15), (2.16), (2.18) и (2.19) имеем

$$\|D[k_1;g_1]-D[k_2;g_2]\|_{C[0,t_0]} \leqslant c_3^{-1}t_0\bigg[(\|p'\|_{C[0,T]}+\|h'\|_{C[0,T]})c_6\|k_1-k_2\|_{C[0,t_0]}+$$
$$+c_{11}c_8(2|g_0|+k_0)\|k_1-k_2\|_{C[0,t_0]}+\frac{3k_0}{2}(c_{12}t_0\|k_1-k_2\|_{C[0,t_0]}+c_{13}\|g_1-g_2\|_{C[0,t_0]})\bigg]+$$

$$+ c_3^{-2} t_0[(\|p'\|_{C[0,T]} + \|h'\|_{C[0,T]})c_{11} + 3k_0 c_{11} c_8 t_0(|g_0| + k_0/2)](|f'(0)| + |f'(\pi)|)c_6 \|k_1 - k_2\|_{C[0,t_0]} =$$
$$= t_0(c_{14} + c_{15} t_0)\|k_1 - k_2\|_{C[0,t_0]} + t_0 c_{16}\|g_1 - g_2\|_{C[0,t_0]}, \qquad (2.20)$$

где
$$c_{14} = c_3^{-1}[(\|p'\|_{C[0,T]} + \|h'\|_{C[0,T]})c_6 + c_{11}c_8(2|g_0| + k_0)] +$$
$$+ c_3^{-2}(\|p'\|_{C[0,T]} + \|h'\|_{C[0,T]})c_{11}(|f'(0)| + |f'(\pi)|)c_6,$$
$$c_{15} = 3k_0 c_3^{-1} c_{12}/2 + c_3^{-2} 3k_0 c_{11} c_8(|g_0| + k_0/2)(|f'(0)| + |f'(\pi)|)c_6,$$
а $c_{16} = c_3^{-1} 3k_0 c_{13}/2$.

Пусть $t_0 \in (0,T]$ такое, что выполняются неравенства
$$c_9 t_0 + (c_{14} + c_{15} t_0)t_0 \leqslant \alpha, \qquad (2.21)$$
$$c_{10} t_0 + c_{16} t_0 \leqslant \alpha, \qquad (2.22)$$
где α – положительная постоянная, $\alpha < 1$. Тогда из неравенств (2.17), (2.20)–(2.22) и определения оператора $M[k;g](t)$ следует, что он является сжимающим на множестве R_0.

С учётом неравенств (2.8), (2.13), (2.21) и (2.22) получаем, что существует $t_0 \in (0,T]$ такое, что оператор $M[k;g](t)$ отображает множество R_0 в себя и является сжимающим на этом множестве. Следовательно, функции $k_m(t)$, $g_m(t)$ при $m \to \infty$ равномерно сходятся на отрезке $[0,t_0]$ к непрерывным функциям $\bar{k}(t)$ и $\bar{g}(t)$, являющимся решением системы операторных уравнений (1.21), (1.22). Тогда эти функции удовлетворяют системе уравнений (1.16), (1.17). Проинтегрировав эти уравнения с учётом условий (1.9), получим, что $\bar{k}(t)$ и $\bar{g}(t)$ являются решением системы уравнений (1.10), (1.11). Таким образом, функция $u(x,t;\bar{k},\bar{g})$ удовлетворяет уравнению (1.1) и условиям (1.2), (1.3), (1.7), (1.8) для $t \in [0,t_0]$. Следовательно, функции $\bar{k}(t)$ и $\bar{g}(t)$ являются решением обратной задачи для $t \in [0,t_0]$. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российский Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н.* Теоремы единственности для уравнения теплопроводности // Докл. АН СССР. 1935. Т. 1. № 5. С. 294–300.
2. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск, 1980.
3. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г.* Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1969.
4. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М., 1984.
5. *Алифанов О.М.* Обратные задачи теплообмена. М., 1988.
6. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М., 1994.
7. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.V.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York, 2000.
8. *Isakov V.* Inverse Problems for Partial Differential Equations. New York, 2006.
9. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск, 2008.
10. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. М., 2009.
11. *Музылев Н.В.* О единственности одновременного определения коэффициентов теплопроводности и объемной теплоемкости // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1983. Т. 23. № 1. С. 102–108.
12. *Клибанов М.В.* Об одном классе обратных задач для нелинейных параболических уравнений // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280. № 3. С. 533–536.
13. *Иванчов Н.И., Пабыривска Н.В.* Об определении двух зависящих от времени коэффициентов в параболическом уравнении // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43. № 2. С. 406–413.
14. *Fatullayev A.C., Gasilov N., Yusubov I.* Simultaneous determination of unknown coefficients in a parabolic equation // Appl. Anal. 2008. V. 87. № 10. P. 1167–1177.

15. *Hussein M.S., Lesnic D., Ivanchov M.I.* Simultaneous determination of time-dependent coefficients in the heat equation // Comp. and Math. with Appl. 2014. V. 67. № 5. P. 1065–1091.
16. *Su L.D., Vabishechevish P.N., Vasil'ev V.I.* The inverse problem of simultaneous determination of right-hand side and the lowest coefficients in parabolic equations // 6th Intern. Conf. "Numerical Analysis and its Applications" / Eds. I. Dimov, I. Farago, I. Vulkov. Lozenetz, Bulgaria, June 15–22, 2016. P. 633–639.
17. *Камынин В.Л.* Об обратной задаче одновременного определения двух зависящих от времени младших коэффициентов в недивергентном параболическом уравнении на плоскости // Мат. заметки. 2020. Т. 107. № 1. С. 74–86.
18. *Бимуратов С.Ш., Кабанихин С.И.* Решение одномерной обратной задачи электродинамики методом Ньютона–Канторовича // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1992. Т. 32. № 12. С. 1900–1915.
19. *Monch L.* A Newton method for solving inverse scattering problem for a sound-hard obstacle // Inverse Problems. 1996. V. 12. № 3. P. 309–324.
20. *Kabanikhin S.I., Scherzer O., Shichlenin M.A.* Iteration method for solving a two-dimensional inverse problem for hyperbolic equation // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2003. V. 11. № 1. P. 1–23.
21. *Yan-Bo Ma.* Newton method for estimation of the Robin coefficient // J. Nonlin. Sci. Appl. 2015. V. 8. № 5. P. 660–669.
22. *Денисов А.М.* Итерационный метод решения обратной коэффициентной задачи для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 7. С. 943–949.
23. *Баев А.В., Гаврилов С.В.* Итерационный метод решения обратной задачи рассеяния для системы уравнений акустики в слоисто-неоднородной среде с поглощением // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. 2018. № 2. С. 7–14.
24. *Гаврилов С.В., Денисов А.М.* Численные методы решения нелинейного операторного уравнения, возникающего в обратной коэффициентной задаче // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 7. С. 900–906.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 11.02.2022 г.
После доработки 11.02.2022 г.
Принята к публикации 25.05.2022 г.