*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 6, с. 763–776*

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 519.624.2

# ДВИЖЕНИЕ ФРОНТА В ЗАДАЧЕ СО СЛАБОЙ АДВЕКЦИЕЙ В СЛУЧАЕ НЕПРЕРЫВНОГО ИСТОЧНИКА И ИСТОЧНИКА МОДУЛЬНОГО ТИПА

**© 2022 г. Н. Н. Нефедов, Е. И. Никулин, А. О. Орлов**

Получено асимптотическое приближение решения, имеющего вид движущегося внутреннего слоя (фронта), начально-краевой задачи для сингулярно возмущённого параболического уравнения реакция–адвекция–диффузия с малой адвекцией. Отдельно рассмотрены случай непрерывного источника (нелинейности, описывающей взаимодействие, реакцию) и случай разрыва источника при некотором значении искомой функции, возникающий в ряде актуальных приложений. Для каждой задачи построено асимптотическое приближение решения и доказаны теоремы существования и единственности такого решения.

DOI: 10.31857/S037406412206005X, EDN: CDARNG

**1. Введение. Постановка задачи.** Рассмотрим сингулярно возмущённую начально-краевую задачу

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon A(x,\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x}-f(u,x,\varepsilon)=0,\quad x\in(-1,1),\quad t\in(0,T],$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(-1,t,\varepsilon)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t,\varepsilon)=0,\quad t\in[0,T],$$
$$u(x,0,\varepsilon)=u_{\mathrm{init}}(x,\varepsilon),\quad x\in[-1,1], \tag{1}$$

где $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ – малый параметр. В работе получено асимптотическое приближение решения этой задачи, имеющего вид движущегося внутреннего слоя (фронта). Исследование формирования и движения фронтов в задачах для уравнений реакция–адвекция–диффузия обусловлено важными приложениями, использующими для математических моделей такие задачи, в частности в теории нелинейных волн (см. статьи [1, 2]), при изучении автоволновых процессов в урбоэкологии (см. работы [3, 4]) и многих других приложениях.

Стационарные решения задачи (1) с пограничными и внутренними слоями изучены в [5]. Периодические решения задачи (1) рассматривались в [6, 7].

Результаты, полученные в данной работе, развивают результаты статьи [8], где рассмотрено движение фронта при отсутствии адвекции ($A(x,\varepsilon)=0$ в уравнении в (1)), на новые классы задач, включающие так называемые модульные источники и адвекцию.

В обсуждаемых ниже задачах предполагается, что в начальный момент времени фронт уже сформирован. Это означает, что функция $u_{\mathrm{init}}(x,\varepsilon)$ имеет внутренний переходный слой в окрестности некоторой точки $x_{00}\in(-1,1)$, т.е. близка к некоторому корню $\varphi^{(-)}(x)$ вырожденного уравнения $f(u,x,0)=0$ левее точки $x_{00}$ и к корню $\varphi^{(+)}(x)$ правее этой точки. В окрестности $x_{00}$ происходит резкий переход от $\varphi^{(-)}(x)$ к $\varphi^{(+)}(x)$. Доказано существование решения вида движущегося фронта, т.е. такого решения, которое имеет внутренний переходный слой, в каждый момент времени локализованный в окрестности движущейся точки $\hat{x}(t,\varepsilon)\in(-1,1)$, асимптотическое приближение которой получено ниже.

В п. 2 будет разобран случай непрерывного источника кубического типа. Поскольку поведение решения и его асимптотика в случае разрывной при некотором значении $u$ функции $f(u,x,\varepsilon)$ в значительной мере аналогичны случаю, рассмотренному в п. 2, в п. 3 остановимся лишь на отличительных особенностях. Полученные результаты проиллюстрированы примерами, которые могут быть использованы для разработки эффективных численных методов для исследуемых классов задач.

**2. Случай непрерывного источника.** Предполагаем, что выполнены следующие условия:

**Условие 1.** Функции $A(x,\varepsilon)$, $f(u,x,\varepsilon)$ являются достаточно гладкими в своих областях определения.

**Условие 2.** Пусть вырожденное уравнение $f(u,x,0)=0$ имеет ровно три решения $u = \varphi^{(\pm,0)}(x)$, причём

$$\varphi^{(-)}(x) < \varphi^{(0)}(x) < \varphi^{(+)}(x), \quad x\in[-1,1],$$

а также выполнены неравенства

$$f_u(\varphi^{(\pm)}(x),x,0) > 0, \quad f_u(\varphi^{(0)}(x),x,0) < 0, \quad x\in[-1,1].$$

**2.1. Построение формальной асимптотики решения.** Асимптотика решения задачи (1) строится методом пограничных функций (см. [9]) отдельно в каждой из областей $[-1,\hat{x}]\times\times[0,T]$ и $[\hat{x},1]\times[0,T]$ с подвижной границей (см. [10]) с использованием развиваемого в наших работах эффективного метода построения асимптотики локализации внутреннего слоя:

$$U(x,\varepsilon) = \begin{cases} U^{(-)}(x,t,\varepsilon), & (x,t,\varepsilon)\in[-1,\hat{x}]\times[0,T]\times(0,\varepsilon_0],\\ U^{(+)}(x,t,\varepsilon), & (x,t,\varepsilon)\in[\hat{x},1]\times[0,T]\times(0,\varepsilon_0].\end{cases}$$

Каждую из функций $U^{(\pm)}(x,\varepsilon)$ будем представлять в виде суммы трёх слагаемых:

$$U^{(\pm)}(x,t,\varepsilon) = \bar{u}^{(\pm)}(x,\varepsilon) + Q^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon) + R^{(\pm)}(\eta^{(\pm)},\varepsilon). \tag{2}$$

Здесь $\bar{u}^{(\pm)}(x,\varepsilon) = \bar{u}_0^{(\pm)}(x) + \varepsilon\bar{u}_1^{(\pm)}(x) + \ldots$ – регулярная часть разложения, функции

$$Q^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon) = Q_0^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon) + \varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon) + \ldots$$

описывают поведение решения в окрестности точки перехода $\hat{x}(t,\varepsilon)$, $\xi = (x-\hat{x}(t,\varepsilon))/\varepsilon$ – переменная переходного слоя: $\xi\leqslant 0$ для функций с индексом $(-)$ и $\xi\geqslant 0$ для функций с индексом $(+)$; функции $R(\eta^{(\pm)},\varepsilon) = R_0(\eta^{(\pm)}) + \varepsilon R_1(\eta^{(\pm)}) + \ldots$ описывают поведение решения в окрестностях граничных точек отрезка $[-1,1]$, $\eta^{(\pm)} = (x\mp 1)/\varepsilon$ – растянутые переменные, соответственно, вблизи точек $x=\pm 1$. В настоящей работе не будем описывать процедуру построения функций $R_i(\eta^{(\pm)})$, поскольку они определяются стандартным образом (см., например, [5]). Отметим, что данные функции не зависят от переменной $t$ и тем самым не участвуют в описании движущегося переходного слоя, а функции $R_0(\eta^{(\pm)}) = 0$ в силу краевых условий Неймана.

Положение внутреннего переходного слоя определяется из условия $C^1$-сшивания асимптотических представлений $U^{(-)}(x,t,\varepsilon)$ и $U^{(+)}(x,t,\varepsilon)$ в точке перехода $\hat{x}(t,\varepsilon)$:

$$U^{(-)}(\hat{x}(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = U^{(+)}(\hat{x}(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = \varphi^{(0)}(\hat{x}(t,\varepsilon)), \tag{3}$$

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}U^{(-)}(\hat{x}(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}U^{(+)}(\hat{x}(t,\varepsilon),t,\varepsilon). \tag{4}$$

Точку перехода $x=\hat{x}(t,\varepsilon)$ будем искать в виде разложения по степеням малого параметра $\varepsilon$:

$$\hat{x}(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \ldots \tag{5}$$

Коэффициенты данного разложения будут определены в процессе построения асимптотики.

*Регулярная часть асимптотики* определяется после подстановки представления слагаемого $\bar{u}^{(\pm)}(x,\varepsilon)$ в уравнение

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2\bar{u}^{(\pm)}}{\partial x^2}-\varepsilon A(x,\varepsilon)\frac{\partial\bar{u}^{(\pm)}}{\partial x}-f(\bar{u}^{(\pm)},x,\varepsilon)=0.$$

Стандартным образом (см. статью [5]) получим алгебраические уравнения для определения функций регулярной части $\bar{u}_k^{(\pm)}(x)$, $k\in\mathbb{N}_0\equiv\mathbb{N}\bigsqcup\{0\}$.

С учётом условия 2 регулярные функции нулевого порядка определяются как

$$\bar{u}_0^{(\pm)}(x)=\varphi^{(\pm)}(x).$$

Для сокращения записей введём обозначения

$$\bar{f}_u^{(\pm)}(x):=f_u(\varphi^{(\pm)}(x),x,0).$$

Функции $\bar{u}_k^{(\pm)}(x)$ при $k\in\mathbb{N}$ определяются из уравнений

$$\bar{f}_u^{(\pm)}(x)\bar{u}_k^{(\pm)}(x)=\bar{h}_k^{(\pm)}(x),$$

где функции $\bar{h}_k^{(\pm)}(x)$ известны на каждом $k$-м шаге и выражаются рекуррентно через функции $\bar{u}_k^{(\pm)}(x)$ с индексами $0,\ 1,\ \ldots,\ k-1$. Разрешимость уравнений следует из условия 2.

Для того чтобы получить уравнения, которым удовлетворяют *функции переходного слоя* $Q^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$, запишем дифференциальный оператор задачи в переменных $(\xi,t)$. Оператор

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}-\varepsilon A(x,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x}$$

принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\left(\frac{\partial\hat{x}(t,\varepsilon)}{\partial t}-A(\varepsilon\xi+\hat{x}(t,\varepsilon),\varepsilon)\right)\frac{\partial}{\partial\xi}-\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}.$$

Уравнения для функций $Q_k^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$, $k\in\mathbb{N}_0$, определяются стандартным способом путём приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $\varepsilon$ в обеих частях равенств:

$$\frac{\partial^2 Q^{(\pm)}}{\partial\xi^2}+\left(\frac{\partial\hat{x}(t,\varepsilon)}{\partial t}-A(\varepsilon\xi+\hat{x}(t,\varepsilon),\varepsilon)\right)\frac{\partial Q^{(\pm)}}{\partial\xi}-\varepsilon\frac{\partial Q^{(\pm)}}{\partial t}=Qf^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon),\tag{6}$$

где

$$Qf^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)=f(\bar{u}^{(\pm)}(\varepsilon\xi+\hat{x}(t,\varepsilon),\varepsilon)+Q^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon),\varepsilon\xi+\hat{x}(t,\varepsilon),\varepsilon)-$$
$$-f(\bar{u}^{(\pm)}(\varepsilon\xi+\hat{x}(t,\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon\xi+\hat{x}(t,\varepsilon),\varepsilon).$$

Не будем раскладывать по степеням $\varepsilon$ точку перехода $\hat{x}(t,\varepsilon)$, в отличие от подхода, изложенного в работе [8]. Это упростит алгоритм построения асимптотики.

Потребуем, чтобы функции переходного слоя $Q_k^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$, $k\in\mathbb{N}_0$, удовлетворяли условиям равенства нулю на бесконечности:

$$Q_k^{(-)}(\xi,t,\varepsilon)\to 0\ \text{ при }\ \xi\to-\infty,$$

$$Q_k^{(+)}(\xi,t,\varepsilon)\to 0\ \text{ при }\ \xi\to+\infty,\quad k\in\mathbb{N}_0,\quad t\in[0,T].$$

Приравняв коэффициенты при $\varepsilon^0$ в правой и левой частях равенств (6), получим уравнения для функции $Q_0^{(-)}(\xi,t,\varepsilon)$ при $\xi\leqslant 0$ и функции $Q_0^{(+)}(\xi,t,\varepsilon)$ при $\xi\geqslant 0$:

$$\frac{\partial^2 Q_0^{(\pm)}}{\partial\xi^2}+\left(\frac{\partial\hat{x}(t,\varepsilon)}{\partial t}-A(\hat{x}(t,\varepsilon),0)\right)\frac{\partial Q_0^{(\pm)}}{\partial\xi}=f(\varphi^{(\pm)}(\hat{x}(t,\varepsilon))+Q_0^{(\pm)},\hat{x}(t,\varepsilon),0).\tag{7}$$

Дополнительные условия при $\xi = 0$ получим из условия непрерывного сшивания (3), записанного в нулевом порядке по $\varepsilon$:

$$Q_0^{(-)}(0,t,\varepsilon) + \varphi^{(-)}(\hat{x}(t,\varepsilon)) = Q_0^{(+)}(0,t,\varepsilon) + \varphi^{(+)}(\hat{x}(t,\varepsilon)) = \varphi^{(0)}(\hat{x}(t,\varepsilon)).$$

Добавим также условия на бесконечности $Q_0^{(-)}(\xi,t,\varepsilon) \to 0$ при $\xi \to -\infty$, $Q_0^{(+)}(\xi,t,\varepsilon) \to 0$ при $\xi \to +\infty$, $t \in [0,T]$.

Введём оператор $D$:

$$D\hat{x} := \frac{\partial \hat{x}(t,\varepsilon)}{\partial t} - A(\hat{x}(t,\varepsilon),0). \tag{8}$$

Введём функции

$$\tilde{u}^{(\pm)}(\xi,\hat{x}) = \varphi^{(\pm)}(\hat{x}(t,\varepsilon)) + Q_0^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon),$$

$$\tilde{u}(\xi,\hat{x}) = \begin{cases} \varphi^{(-)}(\hat{x}(t,\varepsilon)) + Q_0^{(-)}(\xi,t,\varepsilon), & \text{если } \ \xi \leqslant 0; \\ \varphi^{(+)}(\hat{x}(t,\varepsilon)) + Q_0^{(+)}(\xi,t,\varepsilon), & \text{если } \ \xi \geqslant 0; \end{cases}$$

$$\tilde{v}^{(-)}(\xi,\hat{x}) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}(\xi,\hat{x}), \quad \xi \leqslant 0, \quad \tilde{v}^{(+)}(\xi,\hat{x}) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi}(\xi,\hat{x}), \quad \xi \geqslant 0. \tag{9}$$

Запишем уравнения (7), а также дополнительные условия с использованием (9):

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}^{(\pm)}}{\partial \xi^2} + D\hat{x}\frac{\partial \tilde{u}^{(\pm)}}{\partial \xi} = f(\tilde{u}^{(\pm)},\hat{x},0), \quad \tilde{u}^{(\pm)}(0,\hat{x}) = \varphi^{(0)}(\hat{x}), \quad \tilde{u}^{(\pm)}(\pm\infty,\hat{x}) = \varphi^{(\pm)}(\hat{x}). \tag{10}$$

Вместе с задачами (10) рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi^2} + W\frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} = f(\hat{u},\hat{x},0), \quad \hat{u}(0,\hat{x}) = \varphi^{(0)}(\hat{x}), \quad \hat{u}(\pm\infty,\hat{x}) = \varphi^{(\pm)}(\hat{x}). \tag{11}$$

Задача (11) подробно изучена в статье [11]. Приведём необходимый нам результат в виде леммы.

**Лемма 1.** *Для каждого $\hat{x} \in (-1,1)$ существует единственная величина $W$ такая, что задача (11) имеет единственное гладкое монотонное решение $\hat{u}(\xi,\hat{x})$, удовлетворяющее оценке*

$$|\hat{u}(\xi,\hat{x}) - \varphi^{(\pm)}(\hat{x})| < C\exp(-\kappa|\xi|),$$

*где $C$ и $\kappa$ – некоторые положительные постоянные. При этом зависимость $W(\hat{x})$ определяется следующим выражением:*

$$W(\hat{x}) = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi}(\xi,\hat{x})\right)^2 d\xi\right)^{-1} \int\limits_{\varphi^{(-)}(\hat{x})}^{\varphi^{(+)}(\hat{x})} f(u,\hat{x},0)\,du.$$

*Гладкость функции $W(\hat{x})$ совпадает с гладкостью функции $f(\hat{u},\hat{x},0)$.*

Потребуем выполнения следующего условия.

**Условие 3.** Пусть задача

$$\frac{dx}{dt} = W(x) + A(x,0), \quad x(0) = x_{00} \tag{12}$$

имеет решение $x = x_0(t)$:

$$-1 < x_0(t) < 1 \quad \text{при} \quad t \in [0,T].$$

Потребуем также, чтобы

$$W(x_0) + A(x_0,0) > 0 \quad \text{для всех} \quad x_0 \in [-1,1].$$

Неравенство в условии 3 гарантирует отсутствие стационарных решений у задачи (12). Обозначим через $(10a)$ задачи (10), в которых везде $\hat{x}$ заменено на $x_0(t)$, или, другими словами, в которых положили $\varepsilon = 0$. Из леммы 1 и условия 3 следует единственная разрешимость задач $(10a)$, так как выполнено условие $Dx_0 = W(x_0)$. При этом

$$\frac{\partial \tilde{u}^{(+)}}{\partial \xi}(0, x_0(t)) - \frac{\partial \tilde{u}^{(-)}}{\partial \xi}(0, x_0(t)) = 0.$$

В силу предполагаемой гладкости функций $f$, $A$ (см. условие 1) задачи (10) являются регулярным возмущением задач $(10a)$, а потому также единственно разрешимы. Отметим, что в силу представления (5) имеем теперь

$$\frac{\partial \tilde{u}^{(+)}}{\partial \xi}(0, \hat{x}(t,\varepsilon)) - \frac{\partial \tilde{u}^{(-)}}{\partial \xi}(0, \hat{x}(t,\varepsilon)) = O(\varepsilon).$$

Таким образом, построение функции переходного слоя в нулевом порядке завершено.

Функции переходного слоя первого порядка находятся из следующих задач:

$$\frac{\partial^2 Q_1^{(\pm)}}{\partial \xi^2} + D\hat{x}\frac{\partial Q_1^{(\pm)}}{\partial \xi} - \tilde{f}_u(\xi,t)Q_1^{(\pm)} = r_1^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon),$$

$$Q_1^{(\pm)}(0,t,\varepsilon) + \bar{u}_1^{(\pm)}(\hat{x}) = 0,$$

$$Q_1^{(\pm)}(\pm\infty,t,\varepsilon) = 0, \tag{13}$$

где введены обозначения

$$\tilde{f}_u(\xi,t) = f_u(\tilde{u}(\xi,\hat{x}),\hat{x},0) \tag{14}$$

и

$$r_1^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon) = \frac{\partial Q_0^{(\pm)}}{\partial \xi}\left(\frac{\partial A}{\partial x}(\hat{x},0)\xi + \frac{\partial A}{\partial \varepsilon}(\hat{x},0)\right) + \left(\bar{u}_1^{(\pm)}(\hat{x}) + \xi\frac{d\varphi^{(\pm)}}{dx}(\hat{x})\right)\tilde{f}_u(\xi,t) +$$

$$+ \xi\tilde{f}_x(\xi,t) + \tilde{f}_\varepsilon(\xi,t) + A(\hat{x},0)\frac{d\varphi^{(\pm)}}{dx}(\hat{x}).$$

Здесь производные $\tilde{f}_x(\xi,t)$, $\tilde{f}_\varepsilon(\xi,t)$ вычисляются в той же точке, что и производная $\tilde{f}_u(\xi,t)$ в (14). Задачу для функции $Q_1^{(-)}(\xi,t,\varepsilon)$ будем решать на полупрямой $\xi \leqslant 0$, а для функции $Q_1^{(+)}(\xi,t,\varepsilon)$ – на полупрямой $\xi \geqslant 0$. Решения задач (13) записываются в явном виде:

$$Q_1^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon) = -\bar{u}_1^{(\pm)}(\hat{x})\frac{\tilde{v}^{(\pm)}(\xi,\hat{x})}{\tilde{v}^{(\pm)}(0,\hat{x})} +$$

$$+ \tilde{v}^{(\pm)}(\xi,\hat{x})\int\limits_0^{\xi}\left(\tilde{v}^{(\pm)}(\eta,\hat{x})\right)^{-2}e^{-(D\hat{x})\eta}\int\limits_{\pm\infty}^{\eta}\tilde{v}^{(\pm)}(\sigma,\hat{x})e^{(D\hat{x})\sigma}r_1^{(\pm)}(\sigma,t,\varepsilon)\,d\sigma\,d\eta. \tag{15}$$

Из выражений для функций $r_1^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$ следует, что они имеют экспоненциальные оценки, а из (15) стандартным образом следует, что аналогичные оценки справедливы и для функций $Q_1^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$. Аналогично первому приближению можно определить функции переходного слоя $Q_k^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$ для любого $k = 2, 3\ldots$

**2.2. Асимптотическое приближение положения фронта.** В силу важности этого раздела построения асимптотики выделим его в отдельный пункт.

Неизвестные коэффициенты $x_i(t),\ i \in \mathbb{N},$ разложения (5) определяются из условий сшивания (4) производных асимптотических разложений. Введём функцию

$$H(\varepsilon, t) := \varepsilon\bigg(\frac{dU^{(+)}}{dx}(\hat{x}, t, \varepsilon) - \frac{dU^{(-)}}{dx}(\hat{x}, t, \varepsilon)\bigg) = H_0(\varepsilon, t) + \varepsilon H_1(\varepsilon, t) + \varepsilon^2 H_2(\varepsilon, t) + \ldots, \qquad (16)$$

где

$$H_0(\varepsilon, t) = \frac{\partial Q_0^{(+)}}{\partial \xi}(0, t, \varepsilon) - \frac{\partial Q_0^{(-)}}{\partial \xi}(0, t, \varepsilon),$$

$$H_1(\varepsilon, t) = \frac{d\varphi^{(+)}}{dx}(\hat{x}) - \frac{d\varphi^{(-)}}{dx}(\hat{x}) + \bigg(\frac{\partial Q_1^{(+)}}{\partial \xi}(0, t, \varepsilon) - \frac{\partial Q_1^{(-)}}{\partial \xi}(0, t, \varepsilon)\bigg),$$

и т.д.

Условие $C^1$-сшивания (4) выражается равенством $H(\hat{x}, t, \varepsilon) = 0.$ В силу леммы 1 и условия 3 с учётом разложения точки перехода (5) это равенство выполнено в порядке $\varepsilon^0.$

Анализ задач (10), (11) показывает, что функция $H_0$ может быть представлена в виде

$$H_0(\varepsilon, t) = (D\hat{x} - W(\hat{x}))\frac{1}{\tilde{v}(0, \hat{x})}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}^2(\xi, \hat{x})e^{(D\hat{x})\xi}\, d\xi + O(\varepsilon^2). \qquad (17)$$

Как следует из разложения (16) и представления (17), члены $x_i(t),\ i \geqslant 1,$ высших порядков в (5) могут быть найдены из следующих задач Коши:

$$\frac{dx_i}{dt} + \bigg(W'(x_0(t)) + \frac{\partial A(x, 0)}{\partial x}\bigg|_{x = x_0(t)}\bigg)x_i(t) = G_i(t), \quad x_i(0) = 0, \qquad (18)$$

где $G_i(t)$ – известные функции.

**2.3. Обоснование формальной асимптотики.** Положим

$$X_n(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i x_i(t), \quad \xi = \frac{x - X_n(t, \varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Кривая $X_n(t, \varepsilon)$ разделяет область $\bar{D} : (x, t) \in [-1, 1] \times [0, T]$ на две подобласти:

$$\bar{D}_n^{(-)} : (x, t) \in [-1, X_n(t, \varepsilon)] \times [0, T] \quad \text{и} \quad \bar{D}_n^{(+)} : (x, t) \in [X_n(t, \varepsilon), 1] \times [0, T].$$

Определим функции

$$U_n^{(-)}(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i(\bar{u}_i^{(-)}(x) + Q_i^{(-)}(\xi, t, \varepsilon) + R_i^{(-)}(\eta^{(-)})), \quad (x, t) \in \bar{D}_n^{(-)},$$

$$U_n^{(+)}(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i(\bar{u}_i^{(+)}(x) + Q_i^{(+)}(\xi, t, \varepsilon) + R_i^{(+)}(\eta^{(+)})), \quad (x, t) \in \bar{D}_n^{(+)},$$

где $\hat{x}(t, \varepsilon),$ входящие в выражения для функций переходного слоя, заменены на $X_n(t, \varepsilon),$ и обозначим

$$U_n(x, t, \varepsilon) = \begin{cases} U_n^{(-)}(x, t, \varepsilon), & (x, t) \in \bar{D}_n^{(-)}, \\ U_n^{(+)}(x, t, \varepsilon), & (x, t) \in \bar{D}_n^{(+)}. \end{cases} \qquad (19)$$

Для доказательства существования решения вида движущегося фронта используем асимптотический метод дифференциальных неравенств [12]. Построим непрерывные функции $\alpha(x,t,\varepsilon)$, $\beta(x,t,\varepsilon)$ таким образом, чтобы они удовлетворяли условиям:

1) условие упорядоченности:

$$\alpha(x,t,\varepsilon) \leqslant \beta(x,t,\varepsilon), \quad x\in[-1,1], \quad t\in[0,T], \quad \varepsilon\in(0,\varepsilon_0];$$

2) действие дифференциального оператора на верхнее и нижнее решения:

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2} - \varepsilon\frac{\partial\beta}{\partial t} - \varepsilon A(x,\varepsilon)\frac{\partial\beta}{\partial x} - f(\beta,x,\varepsilon) \leqslant 0 \leqslant \varepsilon^2\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} - \varepsilon\frac{\partial\alpha}{\partial t} - \varepsilon A(x,\varepsilon)\frac{\partial\alpha}{\partial x} - f(\alpha,x,\varepsilon)$$

для всех $x\in(-1,1)$, $t\in[0,T]$ за исключением тех $x(t)$, в которых функции $\alpha(x,t,\varepsilon)$, $\beta(x,t,\varepsilon)$ являются негладкими;

3) условия на границе:

$$\frac{d\alpha}{dx}(-1,t,\varepsilon) \geqslant 0 \geqslant \frac{\partial\beta}{\partial x}(-1,t,\varepsilon), \quad \frac{\partial\alpha}{\partial x}(+1,t,\varepsilon) \leqslant 0 \leqslant \frac{\partial\beta}{\partial x}(+1,t,\varepsilon), \quad t\in[0,T], \quad \varepsilon\in(0,\varepsilon_0];$$

4) условия на начальную функцию:

$$\alpha(x,0,\varepsilon) \leqslant u_{\mathrm{init}}(x,\varepsilon) \leqslant \beta(x,0,\varepsilon), \quad x\in[-1,1], \quad \varepsilon\in(0,\varepsilon_0];$$

5) условия на скачок производных:

$$\frac{\partial\beta}{dx}(\overline{x}(t)-0,t,\varepsilon) \geqslant \frac{\partial\beta}{dx}(\overline{x}(t)+0,t,\varepsilon),$$

где $\overline{x}(t)$ – точка, в которой верхнее решение является негладким;

$$\frac{\partial\alpha}{dx}(\underline{x}(t)-0,t,\varepsilon) \leqslant \frac{\partial\alpha}{dx}(\underline{x}(t)+0,t,\varepsilon),$$

где $\underline{x}(t)$ – точка, в которой нижнее решение является негладким.

Известно (см. [13, 14]), что при выполнении условий 1)–5) существует решение задачи (1), для которого выполняются неравенства

$$\alpha(x,t,\varepsilon) \leqslant u(x,t,\varepsilon) \leqslant \beta(x,t,\varepsilon), \quad (x,t)\in[-1,1]\times[0,T].$$

Верхнее и нижнее решения задачи будем строить как модификацию асимптотических рядов (19). Зададим функцию

$$x_\beta(t,\varepsilon) = X_{n+1}(t,\varepsilon) - \varepsilon^{n+1}\delta(t),$$

где положительная функция $\delta(t)>0$ будет определена ниже. Будем строить верхнее решение задачи в каждой из областей

$$\bar{D}^{(-)}_\beta : (x,t)\in[-1,x_\beta(t,\varepsilon)]\times[0,T] \quad \text{и} \quad \bar{D}^{(+)}_\beta : (x,t)\in[x_\beta(t,\varepsilon),1]\times[0,T],$$

$$\beta(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} \beta^{(-)}(x,t,\varepsilon), & (x,t)\in\bar{D}^{(-)}_\beta, \\ \beta^{(+)}(x,t,\varepsilon), & (x,t)\in\bar{D}^{(+)}_\beta. \end{cases}$$

Будем сшивать функции $\beta^{(-)}(x,t,\varepsilon)$ и $\beta^{(+)}(x,t,\varepsilon)$ на $x_\beta(t,\varepsilon)$ таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$\beta^{(-)}(x_\beta(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = \beta^{(+)}(x_\beta(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = \varphi^{(0)}(x_\beta(t,\varepsilon)).$$

Отметим, что функция $\beta(x,t,\varepsilon)$ не является гладкой. Введём растянутую переменную

$$\xi_\beta = \frac{x - x_\beta(t,\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Построим функции $\beta^{(\pm)}(x,t,\varepsilon)$ как модификации формальной асимптотики (19):

$$\beta^{(-)}(x,t,\varepsilon) = U_{n+1}^{(-)}|_{\xi_\beta} + \varepsilon^{n+1}(\mu + q^{(-)}(\xi_\beta,t,\varepsilon)) +$$

$$+ \varepsilon^{n+1} R_\beta^{(-)}(\eta^{(-)}), \quad (x,t) \in D_\beta^{(-)}, \quad \xi_\beta \leqslant 0, \quad \eta^{(-)} \geqslant 0;$$

$$\beta^{(+)}(x,t,\varepsilon) = U_{n+1}^{(+)}|_{\xi_\beta} + \varepsilon^{n+1}(\mu + q^{(+)}(\xi_\beta,t,\varepsilon)) +$$

$$+ \varepsilon^{n+1} R_\beta^{(+)}(\eta^{(+)}), \quad (x,t) \in D_\beta^{(+)}, \quad \xi_\beta \geqslant 0, \quad \eta^{(+)} \leqslant 0.$$

Здесь под обозначениями $U_{n+1}^{(\pm)}|_{\xi_\beta}$ мы понимаем функции из (19), в которых заменён аргумент $\xi$ у функций переходного слоя на $\xi_\beta$, а $X_{n+1}$ – на $x_\beta$.

Положительная величина $\mu$ выбирается так, чтобы были выполнены условия 1) и 2). Функции $R_\beta^{(\pm)}(\eta^{(\pm)})$ подбираются так, чтобы было выполнено условие 3). Их построение в данной работе не рассматривается. Функции $q^{(\pm)}(\xi_\beta,t,\varepsilon)$ нужны для устранения невязок, которые возникают при действии оператора на верхнее решение. Определим их из следующих задач:

$$\frac{\partial^2 q^{(\pm)}}{\partial {\xi_\beta}^2} + Dx_\beta \frac{\partial q^{(\pm)}}{\partial \xi_\beta} - \tilde{f}_u(\xi_\beta,t) q^{(\pm)}(\xi_\beta,t,\varepsilon) - qf^{(\pm)}(\xi_\beta,t,\varepsilon) = 0,$$

$$q^{(\pm)}(0,t,\varepsilon) + \mu = 0; \quad q^{(\pm)}(\pm\infty,t,\varepsilon) = 0, \tag{20}$$

где

$$qf^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon) = \mu(\tilde{f}_u(\xi,t) - \bar{f}_u^{(\pm)}(x_\beta)).$$

Для данных функций можно получить явные выражения

$$q^{(\pm)}(\xi_\beta,t,\varepsilon) = -\mu \frac{\tilde{v}^{(\pm)}(\xi,x_\beta)}{\tilde{v}^{(\pm)}(0,x_\beta)} +$$

$$+ \tilde{v}^{(\pm)}(\xi,x_\beta) \int\limits_0^{\xi_\beta} \left(\tilde{v}^{(\pm)}(\eta,x_\beta)\right)^{-2} e^{-(Dx_\beta)\eta} \int\limits_{\pm\infty}^{\eta} \tilde{v}^{(\pm)}(\sigma,x_\beta) e^{(Dx_\beta)\sigma} qf^{(\pm)}(\sigma,t,\varepsilon)\, d\sigma\, d\eta. \tag{21}$$

Функции $q^{(\pm)}(\xi_\beta,t,\varepsilon)$ имеют экспоненциальные оценки.

Можно упростить выражения (21):

$$q^{(\pm)}(\xi_\beta,t,\varepsilon) = -\mu - \mu \bar{f}_u^{(\pm)}(x_\beta) \int\limits_0^{\xi_\beta} \left(\tilde{v}^{(\pm)}(\eta,x_\beta)\right)^{-2} e^{-(Dx_\beta)\eta} \int\limits_{\pm\infty}^{\eta} \tilde{v}^{(\pm)}(\sigma,x_\beta) e^{(Dx_\beta)\sigma}\, d\sigma\, d\eta.$$

По аналогичному алгоритму построим нижнее решение. Зададим функцию

$$x_\alpha(t,\varepsilon) = X_{n+1}(t,\varepsilon) + \varepsilon^{n+1}\delta(t),$$

где $\delta(t)$ – та же самая функция, что и при построении верхнего решения.

Построим нижнее решение

$$\alpha(x,t,\varepsilon) = \begin{cases} \alpha^{(-)}(x,t,\varepsilon), & (x,t) \in \bar{D}_\alpha^{(-)}, \\ \alpha^{(+)}(x,t,\varepsilon), & (x,t) \in \bar{D}_\alpha^{(+)} \end{cases}$$

задачи в каждой из областей

$$\bar{D}_\alpha^{(-)} : (x,t) \in [-1, x_\alpha(t,\varepsilon)] \times [0,T] \quad \text{и} \quad \bar{D}_\alpha^{(+)} : (x,t) \in [x_\alpha(t,\varepsilon), 1] \times [0,T].$$

Будем сшивать функции $\alpha^{(-)}(x,t,\varepsilon)$ и $\alpha^{(+)}(x,t,\varepsilon)$ в точке $x_\alpha(t,\varepsilon)$ таким образом, чтобы было выполнено равенство

$$\alpha^{(-)}(x_\alpha(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = \alpha^{(+)}(x_\alpha(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = \varphi^{(0)}(x_\alpha(t,\varepsilon)).$$

Отметим, что функция $\alpha(x,t,\varepsilon)$ не является гладкой. Введём растянутую переменную

$$\xi_\alpha = \frac{x - x_\alpha(t,\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Построим функции $\alpha^{(\pm)}(x,t,\varepsilon)$ как модификации формальной асимптотики (19):

$$\alpha^{(-)}(x,t,\varepsilon) = U_{n+1}^{(-)}|_{\xi_\alpha} + \varepsilon^{n+1}(\mu + q^{(-)}(\xi_\alpha,t,\varepsilon)) +$$

$$+\, \varepsilon^{n+1} R_\alpha^{(-)}(\eta^{(-)}), \quad (x,t) \in D_\beta^{(-)}, \quad \xi_\alpha \leqslant 0, \quad \eta^{(-)} \geqslant 0;$$

$$\alpha^{(+)}(x,t,\varepsilon) = U_{n+1}^{(+)}|_{\xi_\alpha} + \varepsilon^{n+1}(\mu + q^{(+)}(\xi_\alpha,t,\varepsilon)) +$$

$$+\, \varepsilon^{n+1} R_\alpha^{(+)}(\eta^{(+)}), \quad (x,t) \in D_\alpha^{(+)}, \quad \xi_\alpha \geqslant 0, \quad \eta^{(+)} \leqslant 0.$$

Здесь $\mu > 0$ – та же величина, что и в выражении для верхнего решения, а $q^{(\pm)}(\xi_\alpha,t,\varepsilon)$ определяются из задач (20), в которых растянутая переменная $\xi_\beta$ заменена на $\xi_\alpha$.

Проверим, что построенные функции $\alpha(x,t,\varepsilon)$ и $\beta(x,t,\varepsilon)$ удовлетворяют дифференциальным неравенствам 1)–5). Условие упорядоченности можно проверить аналогично тому, как это было сделано в работе [8].

Покажем выполнение неравенства 2). Из способа построения верхнего и нижнего решений следуют равенства

$$L[\alpha^{(\pm)}] = \varepsilon^{n+1} \bar{f}_u^{(\pm)}(x_\alpha)\mu + O(\varepsilon^{n+2}), \quad L[\beta^{(\pm)}] = -\varepsilon^{n+1} \bar{f}_u^{(\pm)}(x_\beta)\mu + O(\varepsilon^{n+2}).$$

Неравенства вблизи границы 3) выполняются за счёт модификации погранслойных функций и в данной работе не проверяются.

Проверим условие скачка производной

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\beta^{(+)}}{\partial x}\bigg|_{x=x_\beta} - \frac{\partial\beta^{(-)}}{\partial x}\bigg|_{x=x_\beta}\right) =$$

$$= -\varepsilon^{n+1}\frac{1}{\tilde{v}(0,x_0)}\left(L(x_0)\frac{d\delta}{dt} + L(x_0)\left(W'(x_0(t)) + \frac{\partial A(x,0)}{\partial x}\bigg|_{x=x_0(t)}\right)\delta(t) + F(x_0)\right) + O(\varepsilon^{n+2}),$$

где

$$F(x_0) = \mu\left[\bar{f}_u^{(\pm)}(x_0)\int\limits_{\pm\infty}^{0} \tilde{v}^{(\pm)}(\sigma,x_0)e^{(Dx_0)\sigma}\,d\sigma\right]_-^+, \quad L(x_0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}^2(\xi,x_0)e^{(Dx_0)\xi}\,d\xi > 0.$$

Определим функцию $\delta(t)$ как решение задачи

$$L(x_0)\frac{d\delta}{dt} + L(x_0)\left(W'(x_0(t)) + \frac{\partial A(x,0)}{\partial x}\bigg|_{x=x_0(t)}\right)\delta(t) + F(x_0) = \sigma, \quad \delta(0) = \delta_0,$$

где $\sigma$ – достаточно большая положительная величина, а $\delta_0 > 0$. В этом случае решение задачи $\delta(t)$ – положительная функция. Таким образом, имеем

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\beta^{(+)}}{\partial x}\bigg|_{x=x_\beta} - \frac{\partial\beta^{(-)}}{\partial x}\bigg|_{x=x_\beta}\right) = -\varepsilon^{n+1}\frac{\sigma}{\tilde{v}(0,x_0)} + O(\varepsilon^{n+2}).$$

Выражение в правой части отрицательно за счёт $\sigma > 0$. При том же выборе функции $\delta(t)$ будет выполнено неравенство скачка производной для нижнего решения $\alpha(x,t,\varepsilon)$. Таким образом, верна

**Теорема 1.** *При выполнении условий 1–3 для любой достаточно гладкой начальной функции* $u_{\text{init}}(x,\varepsilon)$, *лежащей между верхним и нижним решениями*

$$\alpha(x,0,\varepsilon) \leqslant u_{\text{init}}(x,\varepsilon) \leqslant \beta(x,0,\varepsilon),$$

*существует решение* $u(x,t,\varepsilon)$ *задачи (1), которое при любом* $t \in [0,T]$ *заключено между этими верхним и нижним решениями, и для которого функция* $U_n(x,t,\varepsilon)$ *является равномерным в области* $[-1,1]\times[0,T]$ *асимптотическим приближением с точностью* $O(\varepsilon^{n+1})$.

**3. Случай модульно-кубичной правой части.** Сформулируем основные отличия случая модульно-кубичной нелинейности от кубической нелинейности, рассмотренной в п. 2. Модульно-кубичной нелинейностью называем функцию, имеющую разрыв по искомой функции следующего вида:

$$f(u,x,\varepsilon) = \begin{cases} f^{(+)}(u,x,\varepsilon), & \text{если} \;\; u \geqslant 0, \quad x \in [-1,1]; \\ f^{(-)}(u,x,\varepsilon), & \text{если} \;\; u < 0, \quad x \in [-1,1], \end{cases}$$

имеющую в областях $u > 0$ и $u < 0$ корни, отвечающие за точки покоя типа седла у соответствующих присоединённых систем (см. условие 2* ниже).

Отметим, что нелинейности модульно-кубичного типа находят своё применение в популяционной динамике при построении модели перколяционной решётки фиксации мутаций [15], а также в климатологии при изучении изменений температуры на поверхности Земли под влиянием солнечной радиации [16, 17].

Сформулируем необходимые нам условия.

**Условие 1*.** Функции $A(x,\varepsilon)$, $f^{(\pm)}(u,x,\varepsilon)$ являются достаточно гладкими в своих областях определения.

**Условие 2*.** Пусть вырожденное уравнение $f^{(+)}(u,x,0) = 0$ – единственное решение $u = \varphi^{(+)}(x)$, а уравнение $f^{(-)}(u,x,0) = 0$ имеет единственное решение $u = \varphi^{(-)}(x)$, причём

$$\varphi^{(-)}(x) < 0 < \varphi^{(+)}(x), \quad x \in [-1,1],$$

а также выполнены неравенства

$$f_u^{(\pm)}(\varphi^{(\pm)}(x),x,0) > 0, \quad x \in [-1,1].$$

Определим решение (1) в этом случае следующим образом.

**Определение.** Функция

$$u(x,t,\varepsilon) \in C^{1,0}([-1,1]\times[0,T]) \bigcap C^{1,1}([-1,1]\times(0,T]) \bigcap C^{2,1}((-1,\hat{x})\times(0,T] \bigcup (\hat{x},1)\times(0,T])$$

называется *решением задачи* (1), если она удовлетворяет уравнению (1) в каждой из областей $(-1,\hat{x})\times(0,T]$ и $(\hat{x},1)\times(0,T]$, а также начальному и граничному условиям.

Асимптотику решения задачи (1) будем строить аналогично тому, как это делалось в п. 2. Положение внутреннего переходного слоя определяется из условия $C^1$-сшивания асимптотических представлений $U^{(-)}(x,t,\varepsilon)$ и $U^{(+)}(x,t,\varepsilon)$, выражения которых имеют вид (2), в точке перехода $\hat{x}(t,\varepsilon)$:

$$U^{(-)}(\hat{x}(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = U^{(+)}(\hat{x}(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = 0,$$

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}U^{(-)}(\hat{x}(t,\varepsilon),t,\varepsilon) = \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}U^{(+)}(\hat{x}(t,\varepsilon),t,\varepsilon).$$

Регулярные члены асимптотических разложений (2) можно получить из уравнений

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2\bar{u}^{(\pm)}}{\partial x^2}-\varepsilon A(x,\varepsilon)\frac{\partial\bar{u}^{(\pm)}}{\partial x}-f^{(\pm)}(\bar{u}^{(\pm)},x,\varepsilon)=0.$$

В частности, согласно условию 2*, получим

$$\bar{u}_0^{(\pm)}=\varphi^{(\pm)}(x),\quad x\in[-1,1].$$

Функции переходного слоя нулевого приближения $Q_0^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$ строятся из задач, аналогичных случаю гладкой правой части. Запишем их с использованием функции $\tilde{u}(\xi,\hat{x})$:

$$\frac{\partial^2\tilde{u}^{(\pm)}}{\partial\xi^2}+D\hat{x}\frac{\partial\tilde{u}^{(\pm)}}{\partial\xi}=f^{(\pm)}(\tilde{u}^{(\pm)},\hat{x},0),\quad \tilde{u}^{(\pm)}(0,\hat{x})=0,\quad \tilde{u}^{(\pm)}(\pm\infty,\hat{x})=\varphi^{(\pm)}(\hat{x}).\tag{22}$$

Наряду с задачей (22), рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial\xi^2}+W\frac{\partial\hat{u}}{\partial\xi}=f(\hat{u},\hat{x},0),\quad \hat{u}(0,\hat{x})=\varphi^{(0)}(\hat{x}),\quad \hat{u}(\pm\infty,\hat{x})=\varphi^{(\pm)}(\hat{x}).\tag{23}$$

Задача (23) в теории бегущих волн для разрывных нелинейностей изучена в работе [18]. Точка разрыва нелинейности в рассматриваемом нами случае является неустойчивой сингулярной точкой. Мы приведём здесь результат из [18], сформулировав его в виде леммы.

**Лемма 2.** *Для каждого $\hat{x}\in(-1,1)$ существует величина $W$ такая, что задача (23) имеет гладкое монотонное решение $\hat{u}(\xi,\hat{x})$ из класса решений определения (см. выше), удовлетворяющее оценке*

$$|\hat{u}(\xi,\hat{x})-\varphi^{(\pm)}(\hat{x})|<C\exp(-\kappa|\xi|),$$

*где $C$ и $\kappa$ – некоторые положительные постоянные. При этом зависимость $W(\hat{x})$ определяется следующим выражением:*

$$W(\hat{x})=\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\xi}(\xi,\hat{x})\right)^2d\xi\right)^{-1}\int\limits_{\varphi^{(-)}(\hat{x})}^{\varphi^{(+)}(\hat{x})}f(u,\hat{x},0)\,du.$$

Условие отсутствия стационарных решений у задачи (12) аналогично используемому в п. 2.

**Условие 3*.** Пусть задача (12) имеет решение $x=x_0(t)\colon\ -1<x_0(t)<1$ при $t\in[0,T]$. Потребуем также, чтобы $W(x_0)+A(x_0,0)>0$ для всех $x_0\in[-1,1]$.

Разрешимость задач (22) следует из леммы 2 и условия 3* (аналогично случаю с непрерывной правой частью).

Действуя по алгоритму А.Б. Васильевой, можно определить функции $Q_k^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon)$, $k\in\mathbb{N}$, аналогично тому, как это делалось в п. 2.1.

Коэффициенты в разложении точки перехода $\hat{x}(t,\varepsilon)$ в случае разрывной правой части определяются по алгоритму, описанному в п. 2.2. Главный член ряда $x_0(t)$ точки перехода, а также старшие порядки $x_i(t)$, $i\in\mathbb{N}$, определяются из задач (12) и (18), в которых используется функция $W(\hat{x})$ из леммы 2.

Алгоритм построения верхнего $\beta^*(x,t,\varepsilon)$ и нижнего $\alpha^*(x,t,\varepsilon)$ решений для случая модульно-кубичной нелинейности аналогичен изложенному в п. 2.3. Таким образом, верна

**Теорема 2.** *При выполнении условий 1*–3* для любой достаточно гладкой начальной функции $u_{\mathrm{init}}(x,\varepsilon)$, лежащей между верхним и нижним решениями*

$$\alpha^*(x,0,\varepsilon)\leqslant u_{\mathrm{init}}(x,\varepsilon)\leqslant\beta^*(x,0,\varepsilon),$$

*существует решение $u(x,t,\varepsilon)$ из класса решений определения (см. выше) задачи (1) с модульно-кубичной нелинейностью, которое при любом $t\in[0,T]$ заключено между этими верхним* *и нижним решениями, и для которого функция* $U_n(x,t,\varepsilon)$ *является равномерным в области* $[-1,1]\times[0,T]$ *асимптотическим приближением с точностью* $O(\varepsilon^{n+1})$.

Для доказательства теоремы используется асимптотический метод дифференциальных неравенств [19], основанный на теоремах сравнения для параболических уравнений в случае разрывных источников [20].

**4. Примеры.**

**4.1. Случай непрерывной правой части.** Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon A(x,\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x}=(u^2-1)(u-\varphi^{(0)}(x)),\quad x\in(-1,1),\quad t\in(0,T],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-1,t,\varepsilon)=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}(1,t,\varepsilon)=0,\quad t\in[0,T],$$

$$u(x,0,\varepsilon)=u_{\mathrm{init}}(x,\varepsilon),\quad x\in[-1,1].$$

Будем считать, что при всех $x\in[-1,1]$ выполнено неравенство

$$-1<\varphi^{(0)}(x)<1.$$

Члены регулярной части нулевого порядка легко определяются: $\bar u_0^{(\pm)}(x)=\pm1$.

Начальная задача для определения положения фронта в нулевом приближении имеет вид

$$\frac{dx_0}{dt}=\sqrt{2}\varphi^{(0)}(x_0)+A(x_0,0),\quad x_0(0)=x_{00}.$$

Определим теперь функцию $\tilde u(\xi,x_0)$ из начальной задачи

$$\frac{\partial\tilde u}{\partial\xi}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde u^2-1),\quad \tilde u(0,x_0)=\varphi^{(0)}(x_0).$$

Нетрудно получить выражения

$$\tilde u(\xi,x_0)=\frac{C\exp(-\sqrt{2}\xi)-1}{C\exp(-\sqrt{2}\xi)+1},\quad C=\frac{1+\varphi^{(0)}(x_0)}{1-\varphi^{(0)}(x_0)}.$$

**4.2. Случай модульно-кубичной правой части.** Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}-\varepsilon A(x,\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x}=f(u,x,\varepsilon),\quad x\in(-1,1),\quad t\in(0,T],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(-1,t,\varepsilon)=0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}(1,t,\varepsilon)=0,\quad t\in[0,T],$$

$$u(x,0,\varepsilon)=u_{\mathrm{init}}(x,\varepsilon),\quad x\in[-1,1],$$

где

$$f(u,x,\varepsilon)=\begin{cases}u-\varphi^{(-)}(x), & u<0,\\ u-\varphi^{(+)}(x), & u\geqslant 0.\end{cases}$$

Будем считать, что при всех $x\in[-1,1]$ выполнены неравенства

$$\varphi^{(-)}(x)<0<\varphi^{(+)}(x)\quad \text{и}\quad \varphi^{(+)}(x)>|\varphi^{(-)}(x)|.$$

Члены регулярной части нулевого порядка легко определяются:

$$\bar u_0^{(\pm)}(x)=\varphi^{(\pm)}(x).$$

Запишем задачи для функций переходного слоя нулевого порядка

$$\frac{\partial^2 Q_0^{(\pm)}}{\partial \xi^2} + W\frac{\partial Q_0^{(\pm)}}{\partial \xi} = Q_0^{(\pm)},$$

$$Q_0^{(\pm)}(0,t,\varepsilon) + \varphi^{(\pm)}(\hat{x}(t,\varepsilon)) = 0,$$

$$Q_0^{(\pm)}(\pm\infty,t,\varepsilon) = 0. \qquad (24)$$

Нетрудно получить решения задач (24) в явном виде:

$$Q_0^{(\pm)}(\xi,t,\varepsilon) = -\varphi^{(\pm)}(\hat{x}(t,\varepsilon))\exp\left(\frac{1}{2}(-W \pm \sqrt{W^2+4})\xi\right).$$

Тогда

$$v^{(+)}(0,x_0) - v^{(-)}(0,x_0) =$$

$$-\frac{\varphi^{(+)}(x_0)}{2}(-W - \sqrt{W^2+4}) + \frac{\varphi^{(-)}(x_0)}{2}(-W + \sqrt{W^2+4}) = 0,$$

и выражение для $W(x_0)$ имеет вид

$$W(x_0) = -\frac{|\varphi^{(+)}(x_0) + \varphi^{(-)}(x_0)|}{\sqrt{\varphi^{(+)}(x_0)|\varphi^{(-)}(x_0)|}}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-11-00042).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Руденко О.В.* Неоднородное уравнение Бюргерса с модульной нелинейностью: возбуждение и эволюция интенсивных волн // Докл. РАН. 2017. Т. 474. № 6. С. 671–674.
2. *Нефедов Н.Н., Руденко О.В.* О движении фронта в уравнении типа Бюргерса с квадратичной и модульной нелинейностью при нелинейном усилении // Докл. РАН. 2018. Т. 478. № 3. С. 274–279.
3. *Olchev A., Radler K., Sogachev A., Panferov O., Gravenhorst G.* Application of a three-dimensional model for assessing effects of small clear-cuttings on radiation and soil temperature // Ecological Modelling. 2009. V. 220. № 21. P. 3046–3056.
4. *Levashova N., Sidorova A., Semina A., Ni M.* A spatio-temporal autowave model of shanghai territory development // Sustainability. 2019. V. 11. P. 3658-1–3658-13.
5. *Васильева А.Б., Давыдова М.А.* О контрастной структуре типа ступеньки для одного класса нелинейных сингулярно возмущённых уравнений второго порядка // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1998. Т. 38. № 6. С. 938–947.
6. *Нефедов Н.Н., Давыдова М.А.* Периодические контрастные структуры в системах типа реакция–диффузия–адвекция // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 9. С. 1300–1312.
7. *Нефедов Н.Н., Никулин Е.И.* Существование и асимптотическая устойчивость периодического решения с внутренним переходным слоем в задаче со слабой линейной адвекцией // Модел. и анализ информ. систем. 2018. Т. 25. № 1. С. 125–132.
8. *Нефедов Н.Н., Божевольнов Ю.В.* Движение фронта в параболической задаче реакция–диффузия // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2010. Т. 50. № 2. С. 276–285.
9. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М., 1990.
10. *Нефедов Н.Н.* Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакция–диффузия–адвекция: теория и применение // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2021. Т. 61. № 22. С. 2074–2094.
11. *Fife C.P., Hsiao L.* The generation and propogation of internal layers // Nonlin. Anal., Theory, Methods and Appl. 1998. V. 12. № 1. P. 19–41.

12. *Нефедов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых сингулярно возмущённых задач в частных производных // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 4. С. 719–722.
13. *Sattinger D.H.* Monotone methods in elliptic and parabolic boundary value problems // Indiana Univ. Math. J. 1972. V. 21. № 11. P. 979–1001.
14. *Pao C.V.* Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. New York, 1992.
15. *Гараева А.Я., Сидорова А.Э., Твердислов В.А., Левашова Н.Т.* Модель предпосылок видообразования в представлениях теорий перколяций и самоорганизованной критичности // Биофизика. 2020. Т. 65. № 5. С. 932–948.
16. *Budyko M.I.* The effect of solar radiation variations on the climate of the Earth // Tellus. 1968. V. 21. № 5. P. 611–619.
17. *Diaz J. I.* Mathematical analysis of some diffusive energy balance models in climatology mathematics // Climate and Environment. 1993. P. 28–56.
18. *Volpert A.I., Volpert V.A.* Traveling-wave solutions of parabolic systems with discontinuous nonlinear terms // Nonlin. Anal., Theory, Methods and Appl. 2002. V. 49. № 1. P. 113–139.
19. *Нефедов Н.Н., Никулин Е.И., Орлов А.О.* О периодическом внутреннем слое в задаче реакция–диффузия с источником модульно-кубичного типа // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2020. Т. 60. № 9. С. 1513–1532.
20. *Павленко В. Н.* Сильные решения периодических параболических задач с разрывными нелинейностями // Дифференц. уравнения 2016. Т. 52. № 4. С. 528–539.


Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 31.01.2022 г.
После доработки 31.01.2022 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.