ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 6, с. 777–794

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.226

ОЦЕНКИ ЛОКАЛЬНО-ПЕРИОДИЧЕСКОГО УСРЕДНЕНИЯ ЗАДАЧИ РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОБОБЩЁННОГО УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ

© 2022 г. М. М. Сиражудинов, С. П. Джамалудинова

Метод усреднения дифференциальных операторов, основанный на асимптотическом разложении по малому параметру, широко используется в математике и физике. Он позволяет помимо теоремы усреднения получать оценки разности точного решения и его приближений. Настоящая работа посвящена оценкам погрешности усреднения обобщённого уравнения Бельтрами с локально-периодическими коэффициентами.

DOI: 10.31857/S0374064122060061, EDN: CDDWLR

Теория G-сходимости и усреднения дифференциальных операторов бурно развивается с семидесятых годов прошлого столетия. Этот раздел дифференциальных уравнений имеет многочисленные приложения в различных областях физики и механики сплошных сред (см. [1] и библиографию в ней). Операторные оценки погрешности классических задач усреднения хорошо изучены В.В. Жиковым, М.Ш. Бирманом, Т.А. Суслиной и их учениками (см., например, [2, 3]).

Операторным оценкам погрешности усреднения эллиптических операторов второго порядка дивергентного вида с локально-периодическими коэффициентами посвящены работы [4–6]. Термин "операторные оценки усреднения" был предложен В.В. Жиковым в статье [7].

Данная работа посвящена оценкам погрешности усреднения задачи Римана–Гильберта для обобщённого уравнения Бельтрами с локально-периодическими коэффициентами:

$$A_\varepsilon w_\varepsilon \equiv \partial_{\bar z} w_\varepsilon + \mu(x,\varepsilon^{-1}x)\partial_z w_\varepsilon + \nu(x,\varepsilon^{-1}x)\partial_{\bar z}\overline{w}_\varepsilon = f \in L_2(Q;\mathbb{C}),$$

$$w_\varepsilon \in W_0(Q) = \left\{ w \in W_2^1(Q;\mathbb{C}) : \operatorname{Re} w|_{\partial Q} = 0,\ \ \int\limits_Q \operatorname{Im} w\, dx = 0 \right\},$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Это уравнение является недивергентным, поэтому полученные оценки погрешности усреднения, естественно, отличаются от оценок для дивергентных операторов.

Отметим, что оценки погрешности классического усреднения (порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$) задачи Римана–Гильберта для обобщённых уравнений Бельтрами с периодическими коэффициентами получены в работах [8, 9]. Оценки погрешности усреднения (порядка $O(\varepsilon)$) периодической задачи для таких уравнений приводятся в работе [10].

Оценки усреднения порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$ задачи Римана–Гильберта для уравнения Бельтрами с локально-периодическим коэффициентом получены в статье [11]. Переход от уравнения Бельтрами к обобщённому уравнению Бельтрами вызывает определённые трудности. Дело в том, что уравнение Бельтрами является $\mathbb{C}$-линейным уравнением, а обобщённое уравнение Бельтрами – $\mathbb{R}$-линейным уравнением. Поэтому методы изучения вопросов усреднения для обобщённого уравнения значительно сложнее, чем для уравнения Бельтрами.

В работе получены операторные оценки погрешности усреднения порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$ задачи Римана–Гильберта для обобщённого уравнения Бельтрами с локально-периодическими коэффициентами $\mu(x,\varepsilon^{-1}x)$, $\nu(x,\varepsilon^{-1}x)$. Функции $\mu(x,y)$, $\nu(x,y)$ – измеримые ограниченные функции, удовлетворяющие условию эллиптичности

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{(x,y)\in Q\times\square} (|\mu(x,y)| + |\nu(x,y)|) \leqslant k_0 < 1.$$

Кроме того, $\mu(x,y)$ и $\nu(x,y)$, как функции x, равномерно непрерывны по Липшицу, а как функции y – периодические. Эти оценки получены как в пространствах Соболева, так и в пространствах Лебега.

Обозначения. $Q \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная односвязная область плоскости, $\overline{Q}$ – замыкание области Q, запись $Q_1 \Subset Q$ означает, что замыкание $\overline{Q}_1$ – компакт из Q.

$\partial_{\bar z} = 2^{-1}(\mathscr{D}_1 + i\mathscr{D}_2)$, $\partial_z = 2^{-1}(\mathscr{D}_1 - i\mathscr{D}_2)$, $\mathscr{D}_j = \mathscr{D}_{x_j} = \partial/\partial x_j$, $j = 1,2$, i – мнимая единица. $L_2(Q;\mathbb{C})$ – пространство Лебега комплекснозначных квадратично суммируемых функций над полем действительных чисел. Скалярное произведение в $L_2(Q;\mathbb{C})$ даётся равенством $(u,v)_{L_2(Q;\mathbb{C})} = \operatorname{Re}\int_Q u\bar v\,dx$, $u,v \in L_2(Q;\mathbb{C})$, где $\bar v$ – комплексно-сопряжённая к v функция. Соответствие $L_2(Q;\mathbb{C}) \ni u = u_1 + iu_2 \mapsto (u_1,u_2) = U \in (L_2(Q))^2$ есть изоморфизм, причём $(U,V)_{(L_2(Q))^2} = (u,v)_{L_2(Q;\mathbb{C})}$. Все пространства, используемые в работе, если не оговорено противное, являются пространствами над полем действительных чисел.

$W_p^k(Q;\mathbb{C})$ – пространство Соболева комплекснозначных функций. $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q;\mathbb{C})$ – подпространство $W_2^1(Q;\mathbb{C})$, состоящее из элементов с нулевыми следами на границе.

$\square$ – (ячейка периодов) квадрат со сторонами, параллельными осям координат, с длиной стороны равной T.

Периодической будем называть функцию периода T по каждой переменной. Среднее значение периодической функции w обозначим символом $\langle w\rangle$, т.е.

$$\langle w\rangle = T^{-2}\int\limits_{\square} w(x)\,dx = |\square|^{-1}\int\limits_{\square} w(x)\,dx.$$

Пусть $w(x,y)$ – периодическая по y функция, тогда $\langle w(x,\cdot)\rangle_y$ – среднее значение по y. $L_p(\square;\mathbb{C})$, $W_p^1(\square;\mathbb{C})$, $p \geqslant 1$, – пространства Лебега и Соболева периодических функций. Скалярное произведение в $L_2(\square;\mathbb{C})$ задаёт равенство $(u,v)_{L_2(\square;\mathbb{C})} = \operatorname{Re}\langle u\bar v\rangle$, $u,v \in L_2(\square;\mathbb{C})$.

$\rightharpoonup$ – знак слабой сходимости в соответствующем пространстве.

Пусть Ω – произвольная подобласть плоскости $\mathbb{R}^2$, $g(x,y)$ $(x \in \overline{\Omega},\ y \in \mathbb{R}^2)$ – непрерывная по $x \in \overline{\Omega}$ периодическая по y функция такая, что $g(x,y)$ для любого $x \in \overline{\Omega}$ как функция переменной y принадлежит $L_p(\square;\mathbb{C})$, $p \geqslant 1$, и пусть семейство $\{g^\varepsilon\}$, $\{g^\varepsilon\} = \{g(x,\varepsilon^{-1}x)\}$, ограничено в $L_p(\Omega_1;\mathbb{C})$. Тогда $g(x,\varepsilon^{-1}x) \rightharpoonup \langle g(x,\cdot)\rangle_y$ в пространстве $L_p(\Omega_1;\mathbb{C})$ при $\varepsilon \to 0$, где Ω_1 – произвольная ограниченная подобласть области Ω.

$W_0(Q)$ – подпространство $W_2^1(Q;\mathbb{C})$, элементы которого удовлетворяют соотношениям

$$\operatorname{Re} w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q;\mathbb{C}), \qquad \int\limits_Q \operatorname{Im} w\,dx = 0.$$

В случае, когда это не вызывает вопросов, как уравнение, так и оператор соответствующей краевой задачи обозначаем одним и тем же символом.

1. Формулировка результатов.

1.1. Задача Римана–Гильберта. В ограниченной односвязной области Q с кусочно-гладкой границей рассмотрим задачу Римана–Гильберта (Р–Г) для обобщённого уравнения Бельтрами

$$Aw \equiv \partial_{\bar z} w + \mu\partial_z w + \nu\partial_{\bar z}\overline{w} = f \in L_2(Q;\mathbb{C}), \quad w \in W_0(Q), \tag{1}$$

где коэффициенты $\mu = \mu(x)$, $\nu = \nu(x)$ – измеримые ограниченные комплекснозначные функции, удовлетворяющие условию эллиптичности

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{x\in Q}(|\mu(x)| + |\nu(x)|) \leqslant k_0 < 1, \tag{2}$$

$k_0 > 0$ – постоянная (*константа эллиптичности*).

Как известно, имеет место

Теорема 1 (см. [12, 13]). *Задача Римана–Гильберта (1), (2) (Р–Г) однозначно разрешима для любой правой части f из $L_2(Q;\mathbb{C})$, причём имеют место априорные оценки*

$$(1-k_0)\|\partial_{\bar z}w\|^2_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leqslant \mathrm{Re}\int\limits_Q Aw\cdot\overline{\partial_{\bar z}w}\,dx, \quad w\in W_0(Q),$$

$$(1-k_0)\|\partial_{\bar z}w\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leqslant \|Aw\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leqslant (1+k_0)\|\partial_{\bar z}w\|_{L_2(Q;\mathbb{C})}, \quad w\in W_0(Q). \tag{3}$$

Выражение $\|w\|_{W_0(Q)} = \|\partial_{\bar z}w\|_{L_2(Q;\mathbb{C})}$, $w\in W_0(Q)$, задаёт в подпространстве $W_0(Q)$ норму, эквивалентную норме исходного пространства $W_2^1(Q;\mathbb{C})$ (см. [12, 13]), поэтому имеют место оценки

$$c_1\|w\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})} \leqslant \|Aw\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leqslant c_2\|w\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})}, \tag{4}$$

где c_1, $c_2>0$ – постоянные, зависящие только от постоянной эллиптичности k_0 и области Q.

Теорема 2. *Пусть $w\in W_2^1(Q;\mathbb{C})$ – решение уравнения (1), коэффициенты $\mu=\mu(x)$, $\nu=\nu(x)$ которого равномерно непрерывны по Липшицу в $\overline{Q}$, т.е. выполняется неравенство*

$$|\varphi(x')-\varphi(x)| \leqslant L|x'-x|, \quad x,x'\in\overline{Q}, \quad \varphi\in\{\mu,\nu\},$$

где $L>0$ – постоянная. И пусть $f\in W_2^1(Q;\mathbb{C})$, тогда $w\in W^2_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ и в любой компактной подобласти $Q_1\Subset Q$ имеет место оценка

$$\|w\|_{W_2^2(Q_1;\mathbb{C})} \leqslant c(\|f\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})} + \|w\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})}), \tag{5}$$

где $c>0$ – постоянная, зависящая только от k_0, L и $\mathrm{dist}\,(Q_1,\partial Q)$.

Пусть дополнительно граница ∂Q принадлежит классу C^2 и w принадлежит $W_0(Q)$, тогда w принадлежит $W_0(Q)\bigcap W_2^2(Q;\mathbb{C})$ и имеет место оценка

$$\|w\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})} \leqslant c\|f\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})}, \tag{6}$$

где $c>0$ – постоянная, зависящая только от k_0, L и Q.

Доказательство теоремы 2 см. ниже в п. 2.

1.2. *G*-сходимость. Обозначим через $A(k_0)$ множество обобщённых операторов Бельтрами (1), $\tilde A(k_0)$ – подмножество $A(k_0)$ операторов Бельтрами ((1) с $\nu=0$).

Определение 1. Считаем, что последовательность операторов $\{A_k\}$ из класса $A(k_0)$ G-сходится в области Q к оператору $A\in A(k_0)$ (и будем писать $A_k\xrightarrow{G}A$), если для любого $f\in$ $\in L_2(Q;\mathbb{C})$ последовательность $\{w_k\}$ решений задачи Р–Г: $A_kw_k=f$, $w_k\in W_0(Q)$, сходится в $L_2(Q;\mathbb{C})$. Сходимость в $L_2(Q;\mathbb{C})$ можно заменить на слабую сходимость в $W_2^1(Q;\mathbb{C})$ к решению задачи Р–Г: $Aw=f$, $w\in W_0(Q)$. Эквивалентность полученных при этом определений следует из оценок (4) и компактности вложения $W_2^1(Q;\mathbb{C})\subset L_2(Q;\mathbb{C})$.

G-предел определён единственным образом и классы $A(k_0)$, $\tilde A(k_0)$ G-компактны (см. [12]).

G-сходимость обладает следующим свойством *сходимости "произвольных" решений*: пусть $A_k\xrightarrow{G}A$, $w_k\rightharpoonup w$ в $W_2^1(Q;\mathbb{C})$, $f_k\to f$ в $L_2(Q;\mathbb{C})$, $A_kw_k=f_k$, тогда $Aw=f$ (см. [12]).

1.3. Понятие усреднения. Рассмотрим задачу Р–Г с малым параметром $\varepsilon>0$:

$$A_\varepsilon w_\varepsilon \equiv \partial_{\bar z}w_\varepsilon + \mu^\varepsilon\partial_z w_\varepsilon + \nu^\varepsilon\partial_{\bar z}\overline{w}_\varepsilon = f\in L_2(Q;\mathbb{C}), \quad w_\varepsilon\in W_0(Q). \tag{7}$$

Всюду в работе коэффициенты $\mu^\varepsilon=\mu^\varepsilon(x)$, $\nu^\varepsilon=\nu^\varepsilon(x)$ – измеримые ограниченные функции, имеющие локально-периодическую структуру:

$$\mu^\varepsilon(x)=\mu(x,\varepsilon^{-1}x), \quad \nu^\varepsilon(x)=\nu(x,\varepsilon^{-1}x),$$

т.е. функции $\mu(x,y)$, $\nu(x,y)$ периодические по второй переменной y (периодичность по первой переменной x не требуется). Кроме того, функции $\mu(x,y)$, $\nu(x,y)$ равномерно непрерывны по Липшицу по первой переменной x, т.е. справедлива оценка

$$|\varphi(x',y)-\varphi(x,y)| \leqslant L|x'-x|, \quad x,x'\in\overline{Q}, \quad \text{п.в.} \quad y\in\square, \quad \varphi\in\{\mu,\nu\}, \tag{8}$$

где $L>0$ – постоянная, и $\mu(x,y)$, $\nu(x,y)$ удовлетворяют условию эллиптичности

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{(x,y)\in\overline{Q}\times\square}(|\mu(x,y)|+|\nu(x,y)|)\leqslant k_0<1. \tag{9}$$

Очевидно, что оператор A_ε принадлежит классу $A(k_0)$.

Определение 2. Будем считать, что семейство $\{A_\varepsilon\}$ операторов краевой задачи (7) допускает усреднение, если $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A\in A(k_0)$ при $\varepsilon\to 0$.

В вопросах усреднения важную роль играет ядро оператора $\mathcal{A}^*$, сопряжённого оператору периодической по $y=(y_1,y_2)$ задачи

$$\mathcal{A}w\equiv\partial_{\overline{\xi}}w+\mu(x,y)\partial_\xi w+\nu(x,y)\partial_{\overline{\xi}}\overline{w}=f\in L_2(\square;\mathbb{C}), \quad w(x,\cdot\,)\in W_2^1(\square;\mathbb{C}), \tag{10}$$

где $x\in\overline{Q}$ играет роль параметра,

$$\partial_{\bar\xi}=2^{-1}\bigg(\frac{\partial}{\partial y_1}+i\frac{\partial}{\partial y_2}\bigg), \quad \partial_\xi=2^{-1}\bigg(\frac{\partial}{\partial y_1}-i\frac{\partial}{\partial y_2}\bigg).$$

Сформулируем в виде теоремы результаты по периодической задаче из работы [14], необходимые в дальнейшем.

Теорема 3. *Пусть* $x\in\overline{Q}$, *тогда справедливы следующие утверждения.*

1. Для периодической задачи имеют место оценки

$$c_1\langle|\partial_{\bar\xi}w(x,\cdot\,)|^2\rangle_y\leqslant\operatorname{Re}\langle\mathcal{A}w(x,\cdot\,)\cdot\overline{\partial_{\bar\xi}w(x,\cdot\,)}\rangle_y, \quad w(x,\cdot\,)\in W_2^1(\square;\mathbb{C}), \tag{11}$$

$$c_1\langle|\partial_{\bar\xi}w(x,\cdot\,)|^2\rangle_y^{1/2}\leqslant\langle|\mathcal{A}w(x,\cdot\,)|^2\rangle_y^{1/2}\leqslant c_2\langle|\partial_{\bar\xi}w(x,\cdot\,)|^2\rangle_y^{1/2}, \quad w(x,\cdot\,)\in W_2^1(\square;\mathbb{C}), \tag{12}$$

где $c_1=1-k_0$, $c_2=1+k_0$. *Первое из этих неравенств будем называть "неравенством острого угла".*

2. Периодическая задача (10) фредгольмова.

3. Ядра $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^*$ *и* $\operatorname{Ker}\mathcal{A}(=\mathbb{C})$ *– двумерные подпространства пространств* $L_2(\square;\mathbb{C})$ *и* $W_2^1(\square;\mathbb{C})$ *соответственно (напомним, что наши пространства – пространства над полем* $\mathbb{R}$*), причём один из базисов* $\{p_1,p_2\}$ *ядра* $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^*$ *обладает свойствами*

$$\langle p_1(x,\cdot\,)\rangle_y=1, \quad \langle p_2(x,\cdot\,)\rangle_y=i. \tag{13}$$

В случае оператора Бельтрами ($\nu=0$) *имеем* $p_2=ip_1$.

Пусть $w=w(y)$, $w=w_1+iw_2\in W_2^1(\square;\mathbb{C})$, тогда имеют место равенства

$$\langle|\partial_{\bar\xi}w|^2\rangle_y=\langle|\partial_\xi w|^2\rangle_y=4^{-1}\sum_{j=1}^2\langle|\nabla w_j|^2\rangle_y. \tag{14}$$

Справедливость равенств (14) достаточно проверить для гладких периодических $w=w_1+ {}+iw_2\in C^2(\square;\mathbb{C})$. Легко видеть, что имеет место равенство

$$\langle|\partial_{\bar\xi}w|^2\rangle_y=4^{-1}\sum_{j=1}^2\langle|\nabla w_j|^2\rangle_y+$$
$$+2^{-1}|\square|^{-1}\int\limits_\square(\mathscr{D}_{y_2}w_1\mathscr{D}_{y_1}w_2-\mathscr{D}_{y_1}w_1\mathscr{D}_{y_2}w_2)\,dy, \quad w\in C^2(\square;\mathbb{C}). \tag{15}$$

(Аналогичное равенство, со знаком минус перед вторым слагаемым справа, имеет место и для $\langle|\partial_\xi w|^2\rangle_y$.) Второе слагаемое справа в (15) равно нулю, в чем можно убедиться, перебросив производные с w_1 на w_2 с учётом периодичности. (При этом граничный интеграл равен нулю, так как нормали к противоположным сторонам ячейки периодов противоположно направлены.) Отсюда вытекают равенства (14).

1.4. Задача на ячейке периодов. Для применения асимптотических методов при получении оценок погрешности усреднения уравнения (7) нам потребуются периодические решения следующей задачи на ячейке периодов:

$$\mathcal{A}N_j \equiv \partial_{\bar\xi} N_j(x,y) + \mu(x,y)\partial_\xi N_j(x,y) + \nu(x,y)\partial_{\bar\xi}\overline{N_j(x,y)} = \chi_j(x,y),$$
$$N_j(x,\cdot\,) \in W_2^1(\square;\mathbb{C}), \quad \langle N_j(x,\cdot\,)\rangle_y = 0, \quad j = 1;2, \tag{16}$$

где $x \in \overline{Q}$ выступает в роли параметра, $\square$ – квадрат периодов со стороной T,

$$\begin{aligned}\chi_1(x,y) &= 2^{-1}(\mu^0(x) + \nu^0(x) - \mu(x,y) - \nu(x,y)),\\ \chi_2(x,y) &= 2^{-1}i(\mu^0(x) - \nu^0(x) - \mu(x,y) + \nu(x,y)).\end{aligned} \tag{17}$$

Здесь и всюду далее $\mu^0(x)$, $\nu^0(x)$ – функции, определённые формулами

$$\mu^0(x) = \langle \mu(x,\cdot\,)\mathscr{Q}(x,\cdot\,) + \overline{\nu(x,\cdot\,)}\mathscr{P}(x,\cdot\,)\rangle_y, \quad \nu^0(x) = \langle\overline{\mu(x,\cdot\,)}\mathscr{P}(x,\cdot\,) + \nu(x,\cdot\,)\mathscr{Q}(x,\cdot\,)\rangle_y, \tag{18}$$

где
$$\mathscr{P}(x,y) = 2^{-1}(p_1(x,y) + ip_2(x,y)), \quad \mathscr{Q}(x,y) = 2^{-1}(\overline{p_1(x,y)} + i\overline{p_2(x,y)})$$

(p_1, p_2 – базисные векторы из теоремы 3, $\overline{p_1}$, $\overline{p_2}$ – комплексно-сопряжённые функции p_1, p_2).

В случае уравнения Бельтрами $(\nu = 0)$ имеем $\mu^0(x) = \langle\mu(x,\cdot\,)\overline{p_1(x,\cdot\,)}\rangle_y$, $\nu^0 = 0$.

Теорема 4. *Для каждого $x \in \overline{Q}$ задача (16) однозначно разрешима.*

Действительно, согласно теореме 3 для разрешимости задачи необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x \in \overline{Q}$ функции $\chi_1(x,y)$, $\chi_2(x,y)$ как функции y были ортогональны базисным векторам p_1 и p_2 из ядра оператора $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^*$. Это легко проверить, использовав равенства (13). Единственность решения следует из неравенства острого угла (11) ввиду неравенства Пуанкаре.

В случае уравнения Бельтрами имеем $\nu = 0$, $\nu^0 = 0$, следовательно, $\chi_2 = i\chi_1$. Значит, $N_2 = iN_1$.

1.5. Свойства решений задачи на ячейке.

Свойство 1. *Пусть N_j, $j = 1,2$, – решение задачи (16), тогда отображение $\overline{Q} \ni x \mapsto$ $\mapsto N_j(x,\cdot\,) \in W_2^1(\square;\mathbb{C})$ ограничено, причём имеет место оценка*

$$\|N_j(x,\cdot\,)\|_{W_2^1(\square;\mathbb{C})} \leqslant c, \quad x \in \overline{Q}, \quad j = 1,2, \tag{19}$$

где $c > 0$ – постоянная, определяемая только по постоянной эллиптичности k_0.

Следствие 1. *Функции $\mu^0(x)$, $\nu^0(x)$, $x \in \overline{Q}$, определённые формулами (18), ограничены постоянной, зависящей только от постоянной эллиптичности k_0.*

Свойство 2. *Найдётся число $q > 2$ (показатель повышенной суммируемости), зависящее только от постоянной эллиптичности k_0, такое, что решения N_j, $j = 1,2$, принадлежат $W_q^1(\square;\mathbb{C})$ и имеют место неравенства*

$$\|N_j(x,\cdot\,)\|_{C^\alpha(\overline{\square};\mathbb{C})} \leqslant c, \quad \|N_j(x,\cdot\,)\|_{W_r^1(\square;\mathbb{C})} \leqslant c, \quad j = 1,2, \quad \text{для всех} \quad x \in \overline{Q}, \tag{20}$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0, $2 < r \leqslant q$, $\alpha = (r-2)/r$.

Свойство 3. *Пусть* N_j, $j = 1, 2$, *– решение задачи (16), тогда отображение* $\overline{Q} \ni x \mapsto N_j(x, \cdot\,) \in W_2^1(\square; \mathbb{C})$ *липшицево, т.е. справедлива оценка*

$$\|N_j(x, \cdot\,) - N_j(x', \cdot\,)\|_{W_2^1(\square;\mathbb{C})} \leqslant c|x - x'|, \quad x, x' \in \overline{Q}, \tag{21}$$

где $c > 0$ *– постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности* k_0 *и постоянной Липшица* L.

Следствие 2. *Функции* $\mu^0(x)$ *и* $\nu^0(x)$, *определённые формулами (18), равномерно непрерывны по Липшицу в замыкании* $\overline{Q}$, *т.е.*

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leqslant L_1|x - x'|, \quad x, x' \in \overline{Q}, \quad \varphi \in \{\mu^0, \nu^0\},$$

где $L_1 > 0$ *– постоянная, зависящая только от* k_0 *и* L.

Свойство 4. *Пусть* $q > 2$ *– показатель повышенной суммируемости из свойства 2 и пусть* $2 < r \leqslant q$. *Тогда отображение* $\overline{Q} \ni x \mapsto N_j(x, \cdot\,) \in W_r^1(\square; \mathbb{C})$, $j = 1, 2$, *липшицево:*

$$\|N_j(x, \cdot\,) - N_j(x', \cdot\,)\|_{W_r^1(\square;\mathbb{C})} \leqslant c|x - x'|, \quad x, x' \in \overline{Q}, \quad j = 1, 2, \tag{22}$$

где $c > 0$ *– постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности* k_0 *и постоянной Липшица* L.

Следствие 3. *Решение* $N_j = N_j(x, y)$, $j = 1, 2$, *задачи (16) непрерывно в* $\overline{Q} \times \overline{\square}$, *липшицево по* x *в* $\overline{Q}$ *и гёльдерово по* y *в* $\overline{\square}$ *с показателем* $\alpha = (r - 2)/r$ $(2 < r \leqslant q$, $q > 2$ *– показатель повышенной суммируемости), т.е. для любых* $x, x' \in \overline{Q}$, $y, y' \in \overline{\square}$ *имеем*

$$|N_j(x, y) - N_j(x', y')| \leqslant c_0|x - x'| + c_1|y - y'|^{\alpha}, \quad j = 1, 2, \tag{23}$$

где c_0, $c_1 > 0$ *– постоянные, зависящие только от* k_0 *и* L.

Кроме того, производные

$$\mathscr{D}_{x_l} N_j(x, y) = \partial N_j(x, y)/\partial x_l, \quad j, l = 1, 2,$$

принадлежат пространству $L_\infty(Q \times \square; \mathbb{C})$ *и имеют место оценки*

$$\|N_j\|_{L_\infty(Q\times\square;\mathbb{C})} \leqslant c_0, \quad \|\mathscr{D}_{x_l} N_j(x, y)\|_{L_\infty(Q\times\square;\mathbb{C})} \leqslant c_1, \tag{24}$$

где c_0, $c_1 > 0$ *– постоянные:* c_0 *– зависит только от* k_0, c_1 *– от* k_0 *и* L.

1.6. Вспомогательные утверждения. Пусть Q – ограниченная гладкая (класса C^2) область плоскости. Тогда справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть* $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(x, y) \in \operatorname{Lip}(\overline{Q}, L_r(\square; \mathbb{C}))$, $1 < r < 2$ *(т.е.* $\mathfrak{a}$ *периодична по* y *и равномерно непрерывна по Липшицу как функция* $x \in \overline{Q}$ *со значениями в* $L_r(\square; \mathbb{C})$*),* $\mathfrak{a}(x, y) \geqslant 0$ $(x \in \overline{Q}$, $y \in \square)$ *и пусть* $\mathfrak{a}^\varepsilon(x) = \mathfrak{a}(x, \varepsilon^{-1}x)$, $x \in \overline{Q}$. *Тогда для любого* $w \in W_2^1(Q; \mathbb{C})$ *имеют место неравенства*

$$\int\limits_Q \mathfrak{a}^\varepsilon(x)|w|^2\,dx \leqslant c(\|w\|^2_{L_2(Q;\mathbb{C})} + \varepsilon^2\|w\|^2_{W_2^1(Q;\mathbb{C})}), \tag{25}$$

$$\int\limits_{Q\bigcap Q_\varepsilon} \mathfrak{a}^\varepsilon(x)|w|^2\,dx \leqslant c\varepsilon\|w\|^2_{W_2^1(Q;\mathbb{C})} \tag{26}$$

для всех достаточно малых ε, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0(Q)$, *где* Q_ε *–* ε*-окрестность границы* ∂Q, *постоянная* $c > 0$ *зависит только от области* Q *и* $\max\limits_{x\in\overline{Q}} \|\mathfrak{a}(x, \cdot\,)\|_{L_r(\square;\mathbb{C})}$.

Доказательство леммы 1 см. в п. 4.

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная односвязная область с гладкой (класса C^2) границей, коэффициенты уравнения (7) – локально-периодические функции, удовлетворяющие соотношениям (8), (9) и пусть $w^0 \in W_2^2(Q;\mathbb{C}) \bigcap W_0(Q)$, $f = A_0 w^0$, где $A_0 w^0 \equiv \partial_{\bar z} w^0 + \mu^0(x)\partial_z w^0 + \nu^0(x)\partial_{\bar z}\overline{w^0}$ (коэффициенты $\mu^0(x)$, $\nu^0(x)$ определены формулами (18)),

$$w_1^\varepsilon(x) = w^0(x) + \varepsilon(N(x,y)\partial_z w^0(x) + M(x,y)\partial_{\bar z}\overline{w^0(x)}), \quad y = \varepsilon^{-1}x, \tag{27}$$

где $N(x,y) = N_1(x,y) - iN_2(x,y)$, $M(x,y) = N_1(x,y) + iN_2(x,y)$, N_1 и N_2 – периодические решения задачи на ячейке (см. теорему 4). Легко видеть, что имеет место равенство

$$A_\varepsilon w_1^\varepsilon = f + \varepsilon r_\varepsilon, \tag{28}$$

где

$$\begin{aligned} r_\varepsilon = N(x,y)(\partial^2_{\bar z z} w^0(x) + \mu(x,y)\partial^2_{zz} w^0(x)) + \nu(x,y)\overline{N(x,y)}\partial^2_{\bar z \bar z}\overline{w^0(x)} + \\ + M(x,y)(\partial^2_{\bar z \bar z}\overline{w^0(x)} + \mu(x,y)\partial^2_{z\bar z}\overline{w^0(x)}) + \nu(x,y)\overline{M(x,y)}\partial^2_{\bar z z} w^0(x) + \\ + \partial_z\overline{w^0(x)}(\partial_{\bar z}\overline{N(x,y)} + \mu(x,y)\partial_z N(x,y)) + \nu(x,y)\partial_{\bar z}\overline{N(x,y)}\partial_{\bar z}\overline{w^0(x)} + \\ + \partial_{\bar z}\overline{w^0(x)}(\partial_{\bar z} M(x,y) + \mu(x,y)\partial_z M(x,y)) + \nu(x,y)\partial_{\bar z}\overline{M(x,y)}\partial_z w^0(x), \quad y = \varepsilon^{-1}x. \end{aligned} \tag{29}$$

Справедлива

Лемма 2. *Невязка (29) r_ε ограничена в $L_2(Q;\mathbb{C})$, причём*

$$\|r_\varepsilon\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leqslant c\|w^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}, \tag{30}$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0 и постоянной Липшица L. А также имеют место следующие оценки:

$$\|A_\varepsilon w_1^\varepsilon - A_0 w^0\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leqslant c\varepsilon\|w^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}, \quad \|A_\varepsilon w_1^\varepsilon - A_\varepsilon w_\varepsilon\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leqslant c\varepsilon\|w^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}, \tag{31}$$

$$\|w_1^\varepsilon - w^0\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leqslant c\varepsilon\|w^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}, \quad w_1^\varepsilon \rightharpoonup w^0 \quad \textit{в} \quad W_2^1(Q;\mathbb{C}) \quad \textit{при} \quad \varepsilon \to 0, \tag{32}$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0 и L, w_ε – решение задачи Римана–Гильберта (7), функция w_1^ε определена в формуле (27).

1.7. Усреднение и оценки погрешности усреднения. Справедлива следующая

Теорема 5 (об усреднении). *Для семейства $\{A_\varepsilon\}$ операторов краевой задачи Римана–Гильберта (7) имеет место усреднение, причём коэффициенты усреднённого оператора A_0, $A_0 w \equiv \partial_{\bar z} w + \mu^0(x)\partial_z w + \nu^0(x)\partial_{\bar z}\overline{w}$, $w \in W_0(Q)$, – равномерно непрерывные по Липшицу в $\overline{Q}$ функции и определяются равенствами (18).*

Сформулируем основные утверждения работы. В качестве первого приближения к решению w_ε задачи Римана–Гильберта для обобщённого уравнения Бельтрами (7) с локально-периодическими коэффициентами по аналогии с первым приближением к решению задачи Римана–Гильберта для обобщённого уравнения Бельтрами (см. [15]) с периодическими коэффициентами возьмём функцию (27):

$$w_1^\varepsilon(x) = w^0(x) + \varepsilon(N(x,y)\partial_z w^0(x) + M(x,y)\partial_{\bar z}\overline{w^0(x)}),$$

где теперь w^0 – решение усреднённой задачи

$$A_0 w \equiv \partial_{\bar z} w + \mu^0(x)\partial_z w + \nu^0(x)\partial_{\bar z}\overline{w} = f \in W_2^1(Q;\mathbb{C}), \quad w \in W_0(Q).$$

Заметим, что $w^0 \in W_2^2(Q;\mathbb{C}) \bigcap W_0(Q)$ ввиду теоремы 2, так как $f \in W_2^1(Q;\mathbb{C})$.

Теорема 6 (оценки погрешности усреднения). *Пусть Q – ограниченная односвязная область с гладкой (класса C^2) границей и пусть правая часть f задачи Р–Г (7) принадлежит пространству $W_2^1(Q;\mathbb{C})$, тогда для малых ε, $\varepsilon \leqslant \varepsilon(Q)$, имеют место оценки*

$$\|w_\varepsilon - w_1^\varepsilon\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})} \leqslant c\sqrt{\varepsilon}\|f\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})}, \quad \|w_\varepsilon - w^0\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leqslant c\sqrt{\varepsilon}\|f\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})}, \tag{33}$$

где $c > 0$ *– постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности* k_0, *постоянной Липшица* L *и области* Q.

Доказательство теоремы 6 см. в п. 5.2.

Теорема 7 (операторные оценки усреднения). *Справедливы следующие операторные оценки усреднения задачи Римана–Гильберта (7):*

$$\|(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})\partial_{\overline{z}}^{-1}\|_{L_2(Q;\mathbb{C})\to L_2(Q;\mathbb{C})} \leqslant c\sqrt{\varepsilon}, \quad \|A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1}\|_{W_0(Q)\to L_2(Q;\mathbb{C})} \leqslant c\sqrt{\varepsilon}, \tag{34}$$

$$\|(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})\partial_{\overline{z}}^{-1} - \varepsilon(N^\varepsilon\partial_z A_0^{-1}\partial_{\overline{z}}^{-1} + M^\varepsilon\partial_{\overline{z}}\overline{A_0^{-1}\partial_{\overline{z}}^{-1}})\|_{L_2(Q;\mathbb{C})\to W_2^1(Q;\mathbb{C})} \leqslant c\sqrt{\varepsilon}, \tag{35}$$

$$\|A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1} - \varepsilon(N^\varepsilon\partial_z A_0^{-1} + M^\varepsilon\partial_{\overline{z}}\overline{A_0^{-1}})\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})\to W_2^1(Q;\mathbb{C})} \leqslant c\sqrt{\varepsilon}, \tag{36}$$

где $c > 0$ *– постоянная из (33);* $\partial_{\overline{z}}^{-1}$ *– оператор, обратный к оператору краевой задачи (7) для уравнения Коши–Римана;* $\overline{A_0^{-1}\partial_{\overline{z}}^{-1}}$ *– оператор, определённый равенством*

$$\overline{A_0^{-1}\partial_{\overline{z}}^{-1}}v = \overline{A_0^{-1}\partial_{\overline{z}}^{-1}v},$$

аналогичный смысл имеет и оператор $\overline{A_0^{-1}}$. *Здесь*

$$N^\varepsilon = N_1(x, \varepsilon^{-1}x) - iN_2(x, \varepsilon^{-1}x), \quad M^\varepsilon = N_1(x, \varepsilon^{-1}x) + iN_2(x, \varepsilon^{-1}x),$$

$N_1(x,y)$, $N_2(x,y)$ *– решения задачи на ячейке (см. теорему 4);* A_ε^{-1}, A_0^{-1} *– операторы, обратные к операторам соответствующих задач Римана–Гильберта.*

В случае оператора Бельтрами ($\nu = 0$) ввиду теоремы 4 имеем $N^\varepsilon = 2N_1^\varepsilon$, $M^\varepsilon = 0$. Следовательно, корректоры в (35), (36) упрощаются и мы имеем более простые оценки.

2. Доказательство теоремы 2. Пусть в уравнении (1)

$$w = u + iv, \quad \mu = a + ib, \quad \nu = c + id, \quad f = f_1 + if_2.$$

Тогда уравнение (1), выделив действительную и мнимую части, легко представить в виде системы двух действительных уравнений:

$$\begin{gathered} -\mathscr{D}_{x_2}v + J^{-1}(|1+\mu|^2 - |\nu|^2)\mathscr{D}_{x_1}u + 2J^{-1}(b-d)\mathscr{D}_{x_2}u = F_1, \\ \mathscr{D}_{x_1}v + 2J^{-1}(b+d)\mathscr{D}_{x_1}u + J^{-1}(|1-\mu|^2 - |\nu|^2)\mathscr{D}_{x_2}u = F_2, \end{gathered} \tag{37}$$

где

$$J = |1-\nu|^2 - |\mu|^2, \quad F_1 = 2J^{-1}((1+a-c)f_1 + (b-d)f_2), \quad F_2 = 2J^{-1}((b+d)f_1 + (1-a-c)f_2).$$

Система (37) – равномерно эллиптическая система. (Действительно, записав её в матричной форме с искомым вектором $(u,v)^{\text{т}}$, получим, что условием эллиптичности будет положительная определённость следующей квадратичной (относительно $\xi = (\xi_1, \xi_2)$) формы:

$$K(x,\xi) = J^{-1}(|1+\mu|^2 - |\nu|^2)\xi_1^2 + 4J^{-1}b\xi_1\xi_2 + J^{-1}(|1-\mu|^2 - |\nu|^2)\xi_2^2. \tag{38}$$

Заметим, что имеют место неравенства

$$\left(\frac{1-k_0}{1+k_0}\right)^2|\xi|^2 \leqslant K(x,\xi) \leqslant \left(\frac{1+k_0}{1-k_0}\right)^2|\xi|^2, \quad \text{п.в.} \;\; x \in Q,$$

где $k_0 > 0$ – постоянная эллиптичности. Это и означает, что система (37) равномерно эллиптическая.) По условию $u = \operatorname{Re} w$ принадлежит пространству $W_2^1(Q;\mathbb{C})$, и из системы (37) вытекает, что u удовлетворяет эллиптическому уравнению второго порядка

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}(x)\nabla u) - 2\mathscr{D}_{x_1}d\mathscr{D}_{x_2}u + 2\mathscr{D}_{x_2}d\mathscr{D}_{x_1}u = g, \tag{39}$$

где $\mathbf{a}(x)$ – матрица квадратичной формы (38),

$$g = \mathscr{D}_{x_1}F_1 + \mathscr{D}_{x_2}F_2 = 2\mathscr{D}_{x_1}(J^{-1}((1+a-c)f_1 + (b-d)f_2)) + 2\mathscr{D}_{x_2}(J^{-1}((b+d)f_1 + (1-a-c)f_2)).$$

Коэффициенты μ и ν уравнения (1) – ограниченные липшицевы функции, поэтому из свойств таких функций следует липшицевость коэффициентов матрицы $\mathbf{a}(x) = \{a_{jl}(x)\}$ и коэффициентов при f_1 и f_2 в (37), причём коэффициенты Липшица зависят только от k_0 и L. Кроме того, коэффициенты $\mathscr{D}_{x_1}d$, $\mathscr{D}_{x_2}d$ по теореме Радемахера–Степанова ограничены постоянной L. Функции f_1, f_2 принадлежат пространству $W_2^1(Q)$, поэтому с учётом теоремы Радемахера–Степанова получим

$$\|g\|_{L_2(Q)} \leqslant c(\|f_1\|_{W_2^1(Q)} + \|f_2\|_{W_2^1(Q)}),$$

где постоянная $c > 0$ зависит только от k_0 и L. Отсюда, согласно [16, гл. 8, теорема 8.8], имеем: для любой компактной подобласти $Q_1 \Subset Q$ функция u принадлежит пространству $W_2^2(Q_1)$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^2(Q_1)} \leqslant c(\|g\|_{L_2(Q)} + \|u\|_{W_2^1(Q)}), \tag{40}$$

где $c > 0$ – постоянная, определяемая только по L, k_0 и $\operatorname{dist}(Q_1, \partial Q)$. Отсюда, ввиду $g = \mathscr{D}_{x_1}F_1 + \mathscr{D}_{x_2}F_2$ (см. (39)), получим

$$\|u\|_{W_2^2(Q_1)} \leqslant c(\|f\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})} + \|u\|_{W_2^1(Q)}) \leqslant c_1(\|f\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})} + \|w\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})}), \tag{41}$$

где c, $c_1 > 0$ – постоянные, аналогичные постоянной в (40).

Перейдём теперь к оценке $v = \operatorname{Im} w$. По доказанному $u \in W_2^2(Q_1)$, следовательно, из равенств (37) ввиду (41) получим оценки вторых производных v:

$$\|\mathscr{D}_{x_j}\mathscr{D}_{x_l}v\|_{W_2^2(Q_1)} \leqslant c(\|f\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})} + \|u\|_{W_2^1(Q)}), \quad j,l = 1,2, \tag{42}$$

где $c > 0$ – постоянная, такая же, как и выше. Отсюда вытекает оценка

$$\|v\|_{W_2^2(Q_1)} \leqslant c(\|f\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})} + \|u\|_{W_2^1(Q)} + \|v\|_{W_2^1(Q)}) \leqslant c_1(\|f\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})} + \|w\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})}).$$

Из этой оценки и оценки (41) получим (5). Первая часть теоремы 2 доказана.

Перейдём к доказательству второй части. Теперь $w \in W_0(Q)$, следовательно, $u \in \mathring{W}_2^1(Q;\mathbb{C})$ и u является решением задачи Дирихле для уравнения (39). Тогда, как известно (см. [16, гл. 8, теорема 8.12]), имеет место оценка (40) с $Q_1 = Q$. Отсюда, рассуждая как и выше, получаем

$$\|u\|_{W_2^2(Q)} \leqslant c(\|f\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})} + \|w\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})}).$$

Здесь второе слагаемое справа можно опустить ввиду (4). Следовательно, имеет место (6). Теорема 2 доказана.

3. Доказательства свойств решения задачи на ячейке.

3.1. Доказательство свойства 1. Очевидно, что

$$\langle \mu^0 \overline{\partial_{\bar\xi} N_j}\rangle_y = \langle \nu^0\, \overline{\partial_{\bar\xi} N_j}\rangle_y = 0, \quad j = 1,2,$$

так как μ^0 и ν^0 зависят только от x и среднее от производных по y равно нулю. Поэтому, согласно неравенству острого угла (11), равенствам (16), (17) и условию эллиптичности (9), получим

$$(1-k_0)\langle|\partial_{\bar\xi_j}N_j|^2\rangle_y \leqslant \operatorname{Re}\langle\chi_j\overline{\partial_{\bar\xi_j}N_j}\rangle_y = \operatorname{Re}\langle-(\mu+\delta\nu)\overline{\partial_{\bar\xi_j}N_j}\rangle_y \leqslant k_0\langle|\partial_{\bar\xi}N_j|^2\rangle_y^{1/2},$$

где $\delta = 1$ при $j = 1$, $\delta = -1$ при $j = 2$. Следовательно, $\langle|\partial_{\bar\xi}N_j|^2\rangle_y^{1/2} \leqslant k_0/(1-k_0)$. Значит, ввиду неравенства Пуанкаре и (14) получим (19). Свойство 1 доказано.

3.1. Доказательство следствия 1. Согласно (17) имеем

$$\chi_1 - i\chi_2 = \mu^0(x) - \mu(x,y).$$

Следовательно, ввиду уравнения (16) имеем

$$\mathcal{A}N_1(x,y) - i\mathcal{A}N_2(x,y) + \mu(x,y) = \mu^0(x), \quad (x,y) \in Q \times \square.$$

Отсюда и из очевидного равенства $|\mu^0(x)| = \langle|\mu^0(x)|^2\rangle_y^{1/2}$ ввиду условия эллиптичности (9), неравенства (19) и равенств (14) имеем

$$|\mu^0(x)| \leqslant 2(1+k_0)\langle|\partial_{\bar\xi}N(x,\cdot)|^2\rangle_y^{1/2} + k_0 \leqslant 2(1+k_0)c + k_0, \quad x \in \overline{Q}.$$

Значит, $|\mu^0(x)| \leqslant c_1$, $x \in \overline{Q}$, где $c_1 > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0.

Аналогично, использовав $\chi_1 + i\chi_2 = \nu^0(x) - \nu(x,y)$, получим такую же оценку для $\nu^0(x)$. Следствие 1 доказано.

3.3. Доказательство свойства 2. Ввиду следствия 1 и условия эллиптичности (9) имеем $\mu^0(x) - \mu(x,y) \in L_\infty(Q\times\square;\mathbb{C})$. Отсюда, согласно [14, теорема 5], следует справедливость утверждений свойства 2.

3.4. Доказательство свойства 3. Покажем справедливость (21) для N_1 (для N_2 доказательство аналогичное). Подставив N_1 в уравнение (16) с $j=1$, получим равенство. Запишем его для x и $x' = x+h$, принадлежащих $\overline{Q}$, и отнимем из второго первое, тогда имеем

$$\partial_{\bar\xi}\Delta_h N_1(x,y) + \mu(x+h,y)\partial_\xi\Delta_h N_1(x,y) + \nu(x+h,y)\partial_{\bar\xi}\overline{\Delta_h N_1(x,y)} = F_h(x,y), \tag{43}$$

где

$$\Delta_h N_1(x,y) = N_1(x+h,y) - N_1(x,y), \quad F_h(x,y) = -\Delta_h\mu(x,y)\partial_\xi N_1(x,y) - \Delta_h\nu(x,y)\partial_{\bar\xi}\overline{N_1(x,y)} +$$

$$+\,2^{-1}(\Delta_h\mu^0(x) + \Delta_h\nu^0(x)) - 2^{-1}(\Delta_h\mu(x,y) - \Delta_h\nu(x,y)),$$
$$\Delta_h\mu^0(x) = \mu^0(x+h) - \mu^0(x), \quad \Delta_h\nu^0(x) = \nu^0(x+h) - \nu^0(x).$$

Применив неравенство острого угла к равенству (43), получим

$$(1-k_0)\langle|\partial_{\bar\xi}\Delta_h N_1(x,\cdot)|^2\rangle_y \leqslant \operatorname{Re}\langle\widetilde{F}_h(x,\cdot)\overline{\partial_{\bar\xi}\Delta_h N_1(x,\cdot)}\rangle_y \leqslant \langle|\widetilde{F}_h(x,\cdot)\overline{\partial_{\bar\xi}\Delta_h N_1(x,\cdot)}|\rangle_y, \tag{44}$$

где $\widetilde{F}_h$ есть F_h без третьего слагаемого (третье слагаемое в F_h, обозначим его через J, не зависит от y, поэтому $\langle J\overline{\partial_{\bar\xi}\Delta_h N_1(x,\cdot)}\rangle_y = 0$). Воспользовавшись неравенством Гёльдера из (44), получим

$$\|\partial_{\bar\xi}\Delta_h N_1(x,\cdot)\|_{L_2(\square;\mathbb{C})} \leqslant (1-k_0)^{-1}\|\widetilde{F}_h(x,\cdot\|_{L_2(\square;\mathbb{C})}.$$

Отсюда, ввиду (8) и (19), вытекает $\|\partial_{\bar\xi}\Delta_h N(x,\cdot)\|_{L_2(\square;\mathbb{C})} \leqslant c|h|$, где $c>0$ – постоянная, зависящая только от k_0 и L. Отсюда и неравенства Пуанкаре следует (21). Свойство 3 доказано.

3.5. Доказательство следствия 2. Докажем липшицевость $\mu^0(x)$ (доказательство для ν^0 аналогичное). Ввиду независимости $\mu^0(x)$, $\nu^0(x)$ от y и оценки (8) имеем

$$|\Delta_h\mu^0(x)| = \langle|\Delta_h\mu^0(x)|^2\rangle_y^{1/2} \leqslant \langle|\Delta_h\mu^0(x) - \Delta_h\mu(x,\cdot)|^2\rangle_y^{1/2} + \langle|\Delta_h\mu(x,\cdot)|^2\rangle_y^{1/2} \leqslant J(x) + L|h|,$$

где $J(x) = \langle|\Delta_h\mu^0(x) - \Delta_h\mu(x,\cdot)|^2\rangle_y^{1/2}$, $x, x' = x+h \in \overline{Q}$. Поэтому достаточно доказать липшицевость функции $J(x)$. Согласно (17)

$$\chi_1 - i\chi_2 = \mu^0(x) - \mu(x,y),$$

значит с учётом уравнения (16) получим

$$\Delta_h(\mu^0(x)-\mu(x,y))=\Delta_h\mathcal{A}N_1-i\Delta_h\mathcal{A}N_2=$$

$$=\partial_{\bar\xi}\Delta_hN_1(x,y)+\mu(x+h,y)\partial_\xi\Delta_hN_1(x,y)+\nu(x+h,y)\partial_{\bar\xi}\overline{\Delta_hN_1(x,y)}+$$

$$+\Delta_h\mu(x,y)\partial_\xi N_1(x,y)+\Delta_h\nu(x,y)\partial_{\bar\xi}\overline{N_1(x,y)}-$$

$$-i\partial_{\bar\xi}\Delta_hN_2(x,y)-i\mu(x+h,y)\partial_\xi\Delta_hN_2(x,y)-i\nu(x+h,y)\partial_{\bar\xi}\overline{\Delta_hN_2(x,y)}-$$

$$-i\Delta_h\mu(x,y)\partial_\xi N_2(x,y)-i\Delta_h\nu(x,y)\partial_{\bar a\xi}\overline{N_2(x,y)}\equiv J_2(x,y)+J_3(x,y)+J_4(x,y)+J_5(x,y),\quad(45)$$

где $J_k(x,y)$, $k=2,\ldots,5$, – k-я строка формулы (45), $\Delta_hg(x,y)=g(x+h,y)-g(x,y)$.

Оценим $L_2(\square;\mathbb{C})$-норму $J_k(x,y)$ как функции от y. Ввиду априорной оценки (12) и неравенства (21) для J_2 и J_4 имеем $\|J_k\|_{L_2(\square;\mathbb{C})}\leqslant c|h|$, где $c>0$ – постоянная, зависящая только от k_0 и L. Аналогичные оценки получим и для J_3, J_5, при этом надо учесть липшицевость коэффициентов μ, ν и оценку (19) из свойства 1. Из этих оценок и (45) следует $J\leqslant ch$, где постоянная $c>0$ зависит только k_0, L. Следствие 2 доказано.

3.6. Доказательство свойства 4. Для периодической задачи

$$\mathcal{A}w\equiv\partial_{\bar\xi}w+\mu(x,y)\partial_\xi w+\nu(x,y)\partial_{\bar\xi}\overline{w}=f\in L_r(\square;\mathbb{C}),$$

$$w(x,\cdot\,)\in W_r^1(\square;\mathbb{C}),\quad\langle w(x,\cdot\,)\rangle_y=0$$

справедлива априорная оценка (см. [14], п. 3)

$$c\sum_{j=1}^2\|\mathscr{D}_{y_j}w(x,\cdot\,)\|_{L_r(\square;\mathbb{C})}\leqslant\|\mathcal{A}w\|_{L_r(\square;\mathbb{C})},\quad w(x,\cdot\,)\in W_r^1(\square;\mathbb{C}),\tag{46}$$

где $c>0$ – постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0. Теперь, рассуждая аналогично свойству 3, применив неравенство (46) вместо неравенства острого угла, с учётом липшицевости коэффициентов $\mu^0(x)$, $\nu^0(x)$ получим (22). Свойство 4 доказано.

3.7. Доказательство следствия 3. Из ограниченности вложения $W_r^1(\square;\mathbb{C})\subset C^\alpha(\overline{\square};\mathbb{C})$, ввиду свойства 2 (см. (20)), получим

$$|N_j(x,y')-N_j(x,y)|\leqslant c_0|y'-y|^\alpha,\quad x\in\overline{Q},\quad y',y\in\overline{\square},\quad j=1,2,$$

где $c_0>0$ – постоянная, зависящая только от k_0. Аналогично из свойства 4 (см. (22)) имеем

$$|N_j(x',y)-N_j(x,y)|\leqslant c_1|x'-x|,\quad x',x\in\overline{Q},\quad y\in\overline{\square},\tag{47}$$

где $c_1>0$ – постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0 и постоянной Липшица L. Из этих неравенств вытекает (23) и непрерывность функции $N_j(x,y)$ в $\overline{Q}\times\overline{\square}$.

Докажем вторую часть следствия. Первая из оценок (24) следует из (20) согласно свойству 4 ввиду вложения

$$W_r^1(\square;\mathbb{C})\subset C^\alpha(\overline{\square};\mathbb{C}),\quad\alpha=(r-2)/r.$$

Из оценки (47) с учётом теоремы Радемахера–Степанова следует оценка производных

$$|\mathscr{D}_{x_l}N_j(x,y)|\leqslant c_1,$$

п.в. $x\in Q$, $y\in\square$, $j,l=1,2$, где $c_1>0$ – постоянная из (47). Ввиду равномерности этой оценки относительно x и y получим

$$\|\mathscr{D}_{x_l}N_j\|_{L_\infty(Q\times\square;\mathbb{C})}\leqslant c_1,\quad j,l=1,2.$$

Следствие 3 доказано.

4. Доказательства лемм.

4.1. Доказательство леммы 1. Введём в рассмотрение вспомогательную область $Q_0 \supset \supset \overline{Q}$, Q_0 – гладкая (класса C^2) ограниченная область, построенная следующим образом. Из-за гладкости границы ∂Q найдётся достаточно малое положительное число δ такое, что конец внешней нормали $n(x)$ к границе ∂Q в точке x с длиной $|n(x)| = \delta$ при полном обходе границы опишет гладкую кривую Γ без самопересечений. Объединение $\overline{Q}$ и области между ∂Q и Γ даёт нам Q_0.

Функцию $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(x,y)$ продолжим в замыкание Q_0 по формуле

$$\widetilde{\mathfrak{a}} = \widetilde{\mathfrak{a}}(x,y) = \begin{cases} \mathfrak{a}(x,y) & \text{при} \;\; x \in \overline{Q}, \quad y \in \square, \\ \mathfrak{a}(t,y) & \text{при} \;\; x \in \overline{Q}_0 \setminus Q, \quad y \in \square, \end{cases} \tag{48}$$

где $t \in \partial Q$ – начало внешней нормали, проходящей через точку $x \in \overline{Q}_0 \setminus Q$. Легко видеть, что $\widetilde{\mathfrak{a}} = \widetilde{\mathfrak{a}}(x,y) \in \mathrm{Lip}\,(\overline{Q}_0, L_r(\square;\mathbb{C}))$, $1 < r < 2$, с той же постоянной Липшица, что и у функции $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(x,y)$.

Рассмотрим периодическую задачу

$$\Delta_y \mathfrak{b}(x,y) \equiv \mathrm{div}_y \nabla_y \mathfrak{b}(x,y) = \widetilde{\mathfrak{a}}(x,y) - \langle \widetilde{\mathfrak{a}}(x,\cdot)\rangle_y \in L_r(\square;\mathbb{C}),$$
$$b \in W_r^2(\square;\mathbb{C}), \quad \langle \mathfrak{b}(x,\cdot)\rangle_y = 0, \tag{49}$$

где $x \in \overline{Q}_0$ играет роль параметра, $\Delta_y = \dfrac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y_2^2}$ – оператор Лапласа. Эта задача однозначно разрешима согласно теории эллиптических операторов, так как среднее значение (по y) правой части равно нулю. Следовательно, для любого $x \in \overline{Q}_0$ вектор-функция $\mathfrak{B}(x,y) = \nabla_y \mathfrak{b}(x,y)$ принадлежит $W_r^1(\square;\mathbb{C})$, к тому же выполняется оценка

$$\|\mathfrak{B}(x,\cdot)\|_{W_r^1(\square;\mathbb{C})} \leqslant 2\max_{x \in \overline{Q}_0} \|\widetilde{\mathfrak{a}}(x,\cdot)\|_{L_r(\square;\mathbb{C})}, \tag{50}$$

значит, по теореме вложения, $\mathfrak{B}(x,y)$ принадлежит $L_m(\square;\mathbb{C})$, $m = 2r/(2-r)$. Ввиду того, что $1 < r < 2$, имеем $m > 2$. Отсюда и (49) получим разложение

$$\widetilde{\mathfrak{a}}(x,y) = \langle \widetilde{\mathfrak{a}}(x,\cdot)\rangle_y + \mathrm{div}_y \mathfrak{B}(x,y), \quad x \in \overline{Q}_0, \tag{51}$$

где $\mathfrak{B}(x,y)$, как функция от y, принадлежит пространству $L_m(\square;\mathbb{C})$ для каждого $x \in \overline{Q}_0$. Отметим, что как $\mathfrak{b}(x,y)$, так и $\mathfrak{B}(x,y)$ периодические по y, равномерно непрерывные по Липшицу по переменной $x \in \overline{Q}_0$ функции со значениями в $W_r^2(\square;\mathbb{C})$ и $L_m(\square;\mathbb{C})$, соответственно, т.е.

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(x,y) \in \mathrm{Lip}\,(\overline{Q}_0, W_r^2(\square;\mathbb{C})), \quad \mathfrak{B}(x,y) \in \mathrm{Lip}\,(\overline{Q}_0, L_m(\square;\mathbb{C})).$$

Доказывается это аналогично свойству 3 решения задачи на ячейке.

Сначала докажем неравенство (25) для функций из $\mathring{W}_2^1(Q_0;\mathbb{C})$. Справедливость (25) достаточно проверить для функций из единичного шара

$$B = \{w \in \mathring{W}_2^1(Q_0;\mathbb{C}) : \|w\|_{W_2^1(Q_0;\mathbb{C})} \leqslant 1\}. \tag{52}$$

Из (51) следует

$$\mathfrak{a}^\varepsilon(x) = \mathfrak{a}(x, \varepsilon^{-1}x) = \langle \mathfrak{a}(x,\cdot)\rangle_y + \varepsilon\, \mathrm{div}_2 \mathfrak{B}(x, \varepsilon^{-1}x) = \langle \mathfrak{a}(x,\cdot)\rangle_y + \varepsilon\, \mathrm{div}_2 \mathfrak{B}^\varepsilon(x), \quad x \in \overline{Q}_0.$$

Здесь $\mathfrak{B}(x,y)$ – функция двух групп переменных x_1, x_2 и y_1, y_2, поэтому $\mathrm{div}_2 \mathfrak{B}(x,\varepsilon^{-1}x)$ у нас означает дивергенцию по иксам из второй группы переменных. Согласно этим равенствам (интегрируя по частям) имеем

$$\int\limits_{Q_0} \mathfrak{a}^\varepsilon(x)|w(x)|^2\,dx = \int\limits_{Q_0} \langle \mathfrak{a}(x,\cdot)\rangle_y |w(x)|^2\,dx + \varepsilon \int\limits_{Q_0} \sum_{j=1}^{2} (w_j(x))^2\, \mathrm{div}_2 \mathfrak{B}^\varepsilon(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{Q_0} \langle \mathfrak{a}(x,\cdot)\rangle_y |w(x)|^2\,dx - 2\varepsilon\sum_{j=1}^{2}\int\limits_{Q_0} w_j(x)\mathfrak{B}^\varepsilon(x)\cdot\nabla w_j(x)\,dx \leqslant \int\limits_{Q_0}\langle \mathfrak{a}(x,\cdot)\rangle_y |w(x)|^2\,dx +$$

$$+\int\limits_{Q_0}|\mathfrak{B}^\varepsilon(x)|^2|w(x)|^2\,dx + \varepsilon^2\int\limits_{Q_0}(|\nabla w_1(x)|^2+|\nabla w_2(x)|^2)\,dx, \tag{53}$$

где $w_1 = \operatorname{Re} w$, $w_2 = \operatorname{Im} w$.

Очевидно, что $|\mathfrak{B}(x,y)|^2 \in \operatorname{Lip}(\overline{Q}_0, L_{m/2}(\square;\mathbb{C}))$, поэтому по свойству среднего значения имеем слабую сходимость $|\mathfrak{B}(x,\varepsilon^{-1}x)|^2 \rightharpoonup \langle|\mathfrak{B}(x,\cdot)|^2\rangle_y$ в $L_{m/2}(Q_0;\mathbb{C})$ при $\varepsilon\to 0$, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{Q_0}|\mathfrak{B}^\varepsilon(x)|^2|w(x)|^2\,dx = \int\limits_{Q_0}\langle|\mathfrak{B}(x,\cdot)|^2\rangle_y|w(x)|^2\,dx, \quad w\in B. \tag{54}$$

Как известно, вложение $W_2^1(Q_0;\mathbb{C})\subset L_q(Q_0;\mathbb{C})$ компактно для любого $q\geqslant 1$. Отсюда, ввиду (52) и произвольности q, вытекает, что множество $\widetilde{B} = \{\varphi = w^2 : w\in B\}$ компактно в $L_{m'}(Q_0;\mathbb{C})$, где $m' = m/(m-2)$ – сопряжённый показатель для $m/2$. Сходимость (54) на компакте $\widetilde{B}$ равномерная. Равномерность легко получить привлечением конечных ϵ-сетей для компакта $\widetilde{B}$. Тогда из (50) и (54) получим оценку

$$\int\limits_{Q_0}|\mathfrak{B}^\varepsilon(x)|^2|w(x)|^2\,dx \leqslant \Big(\max_{x\in\overline{Q}_0}\langle|\mathfrak{B}(x,\cdot)|^2\rangle_y + 1\Big)\int\limits_{Q_0}|w(x)|^2\,dx, \quad w\in B, \tag{55}$$

для достаточно малых ε, $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0(Q_0)$. Ввиду ограниченности вложений $L_m(\square;\mathbb{C})\subset L_2(\square;\mathbb{C})$ и $W_r^1(\square;\mathbb{C})\subset L_m(\square;\mathbb{C})$, с учётом (50) имеем

$$\langle|\mathfrak{B}(x,\cdot)|^2\rangle_y^{1/2} \leqslant \langle|\mathfrak{B}(x,\cdot)|^m\rangle_y^{1/m} \leqslant c\|\mathfrak{B}(x,\cdot)\|_{W_r^1(\square;\mathbb{C})} \leqslant c\max_{x\in\overline{Q}_0}\|\widetilde{\mathfrak{a}}(x,\cdot)\|_{L_r(\square;\mathbb{C})}, \quad x\in\overline{Q}_0,$$

где $c>0$ – постоянная. Отсюда и формул (53), (55) получим

$$\int\limits_{Q_0}\mathfrak{a}^\varepsilon|w(x)|^2\,dx \leqslant C\bigg(\int\limits_{Q_0}|w(x)|^2\,dx + \varepsilon^2\int\limits_{Q_0}\sum_{j=1}^{2}(|w_j(x)|^2+|\nabla w_j(x)|^2)\,dx\bigg), \tag{56}$$

где $C>0$ – постоянная, $C = (c+1)\max\limits_{x\in\overline{Q}_0}\|\mathfrak{a}(x,\cdot)\|_{L_r(\square;\mathbb{C})}$. Следовательно, неравенство (25) для функций из $\mathring{W}_2^1(Q_0;\mathbb{C})$ доказано.

Как известно (см. [16, гл. 7, теорема 7.25]), существует оператор продолжения

$$J : W_2^1(Q;\mathbb{C}) \to \mathring{W}_2^1(Q_0;\mathbb{C})$$

такой, что

$$\|Jw\|_{\mathring{W}_2^1(Q_0;\mathbb{C})} \leqslant c\|w\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})}, \quad \|Jw\|_{L_2(Q_0;\mathbb{C})} \leqslant c\|w\|_{L_2(Q;\mathbb{C})},$$

где $c>0$ – постоянная, зависящая только от Q и Q_0. Этих неравенств продолжения достаточно для получения (25) из (56) для любого $w\in W_2^1(Q;\mathbb{C})$, при этом надо учесть, что из построения (48) продолжения $\widetilde{\mathfrak{a}}$ следует

$$\max_{x\in\overline{Q}_0}\|\widetilde{\mathfrak{a}}\|_{L_r(\square;\mathbb{C})} = \max_{x\in\overline{Q}}\|\mathfrak{a}\|_{L_r(\square;\mathbb{C})}.$$

Теперь перейдём к доказательству неравенства (26). Введём в рассмотрение семейство $\{\vartheta^\varepsilon(x)\}$ вещественных гладких срезающих функций, удовлетворяющих условиям

$$1^\circ)\ 0\leqslant\vartheta^\varepsilon\leqslant 1;\quad 2^\circ)\ \vartheta^\varepsilon|_{Q_{\varepsilon/2}} = 1;\quad 3^\circ)\ \vartheta^\varepsilon = 0\ \text{ вне }\ Q_\varepsilon;\quad 4^\circ)\ \varepsilon|\nabla\vartheta^\varepsilon|\leqslant M, \tag{57}$$

где $M>0$ – постоянная, Q_h, $h=\varepsilon/2$, – h-окрестность границы ∂Q. Использовав свойства срезающих функций $\{\vartheta^{2\varepsilon}(x)\}$ и оценку (25), получим

$$\int\limits_{Q_\varepsilon\bigcap Q}\mathfrak{a}^\varepsilon|w|^2\,dx\leqslant\int\limits_{Q_{2\varepsilon}\bigcap Q}\mathfrak{a}^\varepsilon(\vartheta^{2\varepsilon}|w|)^2\,dx\leqslant c\biggl(\int\limits_{Q_{2\varepsilon}\bigcap Q}(\vartheta^{2\varepsilon}|w|)^2\,dx+\varepsilon^2\int\limits_{Q_{2\varepsilon}\bigcap Q}(\vartheta^{2\varepsilon}|w|)^2\,dx+$$

$$+\int\limits_{Q_{2\varepsilon}\bigcap Q}(\varepsilon|\nabla(\vartheta^{2\varepsilon}w_1)|)^2\,dx+\int\limits_{Q_{2\varepsilon}\bigcap Q}(\varepsilon|\nabla(\vartheta^{2\varepsilon}w_2)|)^2\,dx\biggr),$$

где $w_1+iw_2=w$. Отсюда, так как

$$(\varepsilon|\nabla(\vartheta^{2\varepsilon}v)|)^2=((\varepsilon|\nabla\vartheta^{2\varepsilon}|)|v|+\varepsilon\vartheta^{2\varepsilon}|\nabla v|)^2\leqslant 2(((\varepsilon|\nabla\vartheta^{2\varepsilon}|)v)^2+(\varepsilon\vartheta^{2\varepsilon}|\nabla v|)^2),$$

имеем

$$\int\limits_{Q_\varepsilon\bigcap Q}\mathfrak{a}^\varepsilon|w|^2\,dx\leqslant c(1+\varepsilon^2+2M^2)\int\limits_{Q_{2\varepsilon}\bigcap Q}|w|^2\,dx+\varepsilon^2\int\limits_Q(|\nabla w_1|^2+|\nabla w_2|^2)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant 2c(1+M^2)\int\limits_{Q_{2\varepsilon}\bigcap Q}|w|^2\,dx+c\varepsilon\int\limits_Q(|\nabla w_1|^2+|\nabla w_2|^2)\,dx.$$

Применим к первому интегралу справа известное неравенство для следа (см. [17; гл. 1, § 1, п. 2])

$$\int\limits_{Q_{2\varepsilon}\bigcap Q}|w|^2\,dx\leqslant c\varepsilon\|w\|^2_{W_2^1(Q;\mathbb{C})},\tag{58}$$

где $c>0$ – постоянная, не зависящая от w и ε, в результате получим неравенство (26). Лемма 1 доказана.

4.2. Доказательство леммы 2. Ввиду $f=A_0w^0$, равенств (27) и (28) имеем

$$A_\varepsilon(w_1^\varepsilon-w_\varepsilon)=\varepsilon r_\varepsilon,\tag{59}$$

где невязка r_ε определена в (29). Согласно следствию 3 $N(x,y)$ и $\partial_{\bar z}N(x,y)$ ограничены постоянной, зависящей только от постоянной эллиптичности k_0 и постоянной Липшица L, поэтому для невязки имеет место оценка (30). Отсюда и из (28), (59) с учётом $A_\varepsilon w_\varepsilon=f==A_0w^0$ получим оба неравенства (31). Докажем соотношения (32). Первое из них следует из (27), ввиду ограниченности N_j, $j=1,2$:

$$\|w_1^\varepsilon-w^0\|_{L_2(Q;\mathbb{C})}\leqslant\varepsilon c\|\partial_zw^0\|_{L_2(Q;\mathbb{C})}\leqslant\varepsilon c\|w^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})},\tag{60}$$

где $c>0$ – постоянная, зависящая только от k_0 и L. Теперь рассмотрим разность

$$\mathscr{D}_{x_l}w_1^\varepsilon(x)-\mathscr{D}_{x_l}w^0(x)=\mathscr{D}_{y_l}N(x,y)\partial_zw^0(x)+\mathscr{D}_{y_l}M(x,y)\partial_{\bar z}\overline{w^0(x)}+$$

$$+\varepsilon\mathscr{D}_{x_l}N(x,y)\partial_zw^0(x)+\varepsilon\mathscr{D}_{x_l}M(x,y)\partial_{\bar z}\overline{w^0(x)}+\varepsilon N(x,y)\partial_z\mathscr{D}_{x_l}w^0(x)+\varepsilon M(x,y)\mathscr{D}_{x_l}\partial_{\bar z}\overline{w^0(x)},$$

где $l=1,2$, $N=N_1-iN_2$, $M=N_1+iN_2$, N_1, N_2 – решения задачи на ячейке (см. теорему 4). Здесь последние четыре слагаемых справа оцениваются, как и выше, с учётом ограниченности $N_j(x,y)$, $j=1,2$, и их производных (следствие 3). Оценки первых двух слагаемых получим применив формулу (25) из леммы 1, где $\mathfrak{a}(x,y)=|\mathscr{D}_{y_l}N_j(x,y)|^2\in\operatorname{Lip}(\overline{Q},L_{q/2}(\square;\mathbb{C}))$, $q>2$, – показатель повышенной суммируемости, $w=\partial_zw^0$. В результате

$$\|\mathscr{D}_{x_j}w_1^\varepsilon-\mathscr{D}_{x_j}w^0(x)\|_{L_2(Q;\mathbb{C})}\leqslant c\|w^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})},$$

где $c>0$ – постоянная, зависящая только от k_0 и L. Отсюда и из формулы (60) следует слабая сходимость $w_1^\varepsilon\rightharpoonup w^0$ при $\varepsilon\to0$. Лемма доказана.

5. Доказательства теорем 5, 6 и 7.

5.1. Доказательство теоремы 5 об усреднении. Напомним, что класс $A(k_0;Q)$ G-компактен и семейство $\{A_\varepsilon\}$ – подмножество $A(k_0;Q)$. Пусть $\widehat{A}$ – произвольная G-предельная точка семейства $\{A_\varepsilon,\}$ т.е. $A_{\varepsilon_k} \overset{G}{\to} \widehat{A}$ в области Q при $\varepsilon_k \to 0$, где $\{\varepsilon_k\}$ – подпоследовательность $\{\varepsilon\}$. И пусть w^0 – произвольный элемент из $W_2^2(Q;\mathbb{C})\bigcap W_0(Q)$. Тогда, ввиду ограниченности и липшицевости коэффициентов μ^0 и ν^0, получим $f = A_0 w^0 \in W_2^1(Q;\mathbb{C})$. Рассмотрим функцию (27):

$$w_1^\varepsilon(x) = w^0(x) + \varepsilon(N(x,y)\partial_z w^0(x) + M(x,y)\partial_{\bar z}\overline{w^0(x)}), \quad y = \varepsilon^{-1}x,$$

где $N(x,y)$, $M(x,y)$ те же, что и в лемме 2. По лемме 2 $w_1^{\varepsilon_k} \rightharpoonup w^0$ в $W_2^1(Q;\mathbb{C})$ и $f_{\varepsilon_k} = A_0 w^0 + \varepsilon_k r_{\varepsilon_k} \to A_0 w^0$ в $L_2(Q;\mathbb{C})$ при $\varepsilon_k \to 0$. Отсюда в силу свойства сходимости произвольных решений (см. п. 1.2) при $\varepsilon_k \to 0$ получим $\widehat{A} w^0 = A_0 w^0$ для любого $w^0 \in W_2^2(Q;\mathbb{C})\bigcap W_0(Q)$. Значит, $A_0 = \widehat{A} \in A(k_0;Q)$, так как множество $W_2^2(Q;\mathbb{C})\bigcap W_0(Q)$ всюду плотно в $W_0(Q)$. Следовательно, ввиду произвольности G-предельной точки $\widehat{A}$, отсюда вытекает G-сходимость $A_\varepsilon \overset{G}{\to} A_0$ при $\varepsilon \to 0$. Теорема 5 доказана.

5.2. Доказательство теоремы 6. Теперь приступим к доказательству оценки разности между точным решением w_ε задачи Римана–Гильберта (7) и первым приближением (27) – w_1^ε.

Пусть w^0 – решение усреднённой задачи Римана–Гильберта для усреднённого уравнения из теоремы 5, и пусть $w^0 \in W_2^2(Q;\mathbb{C})\bigcap W_0(Q)$. Для того чтобы обеспечить такую гладкость w^0 (см. теорему 2), нам достаточно взять в задаче Римана–Гильберта правую часть f из пространства $W_2^1(Q;\mathbb{C})$.

Первое приближение (27): w_1^ε не принадлежит пространству $W_0(Q)$ из-за того, что корректор $\varepsilon(N(x,y)\partial_z w^0(x) + M(x,y)\partial_{\bar z} w^0(x))$ $(N(x,y) = N_1(x,y) - iN_2(x,y)$, $M(x,y) = N_1(x,y) + iN_2(x,y)$, N_1 и N_2 – периодические решения задачи на ячейке) не удовлетворяет граничному условию. Это вызывает некоторые затруднения при оценке разности $w_\varepsilon - w_1^\varepsilon$, поэтому введём в рассмотрение подправленное первое приближение $\omega_1^\varepsilon(x)$:

$$\omega_1^\varepsilon(x) = w^0(x) + \varepsilon(1-\vartheta^\varepsilon(x))(N(x,y)\partial_z w^0(x) + M(x,y)\partial_{\bar z}\overline{w^0(x)}) - i\varepsilon|Q|^{-1}c_\varepsilon, \quad y = \varepsilon^{-1}x, \tag{61}$$

где $\{\vartheta^\varepsilon(x)\}$ – семейство, определённое формулой (57), $|Q|$ – площадь области Q, $c_\varepsilon \in \mathbb{R}$ – действительное число, определённое формулой

$$c_\varepsilon = \int\limits_Q (1-\vartheta^\varepsilon(x))\,\mathrm{Im}\,(N(x,y)\partial_z w^0(x) + M(x,y)\partial_{\bar z}\overline{w^0(x)})\,dx, \quad y = \varepsilon^{-1}x.$$

Очевидно, что семейство $\{c_\varepsilon\}$ равномерно ограничено и ввиду (24) имеем $|c_\varepsilon| \leqslant c\|w^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}$, где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0 и L. Так как $w^0 \in W_2^2(Q;\mathbb{C})\bigcap W_0(Q)$, согласно (61) и свойству $2^\circ)$ семейства (57) получим $\omega_1^\varepsilon(x) \in W_0(Q)$.

Подправленное первое приближение (61), ввиду (27), можно представить в следующем виде:

$$\omega_1^\varepsilon = w_1^\varepsilon(x) - \varepsilon\vartheta^\varepsilon(x)(N(x,y)\partial_z w^0(x) + M(x,y)\partial_{\bar z}\overline{w^0(x)}) - i\varepsilon|Q|^{-1}c_\varepsilon.$$

Оценим разность двух приближений

$$w_1^\varepsilon(x) - \omega_1^\varepsilon(x) = \varepsilon\vartheta^\varepsilon(x)(N(x,y)\partial_z w^0(x) + M(x,y)\partial_{\bar z}\overline{w^0(x)}) + i\varepsilon|Q|^{-1}c_\varepsilon. \tag{62}$$

Имеем

$$\begin{gathered}\mathscr{D}_{x_j}(w_1^\varepsilon(x) - \omega_1^\varepsilon(x)) = \varepsilon\mathscr{D}_{x_j}\vartheta^\varepsilon(x)(N(x,y)\partial_z w^0(x) + M(x,y)\partial_{\bar z}\overline{w^0(x)}) + \\ + \vartheta^\varepsilon(x)(\mathscr{D}_{y_j}N(x,y)\partial_z w^0(x) + \mathscr{D}_{y_j}M(x,y)\partial_{\bar z}\overline{w^0(x)}) + \\ + \varepsilon\vartheta^\varepsilon(x)(N(x,y)\mathscr{D}_{x_j}\partial_z w^0(x) + M(x,y)\mathscr{D}_{x_j}\partial_{\bar z}\overline{w^0(x)}) + \\ + \varepsilon\vartheta^\varepsilon(x)(\mathscr{D}_{x_j}N(x,y)\partial_z w^0(x) + \mathscr{D}_{x_j}M(x,y)\partial_{\bar z}\overline{w^0(x)}) \equiv \mathfrak{U}_1^\varepsilon + \mathfrak{U}_2^\varepsilon + \mathfrak{U}_3^\varepsilon + \mathfrak{U}_4^\varepsilon,\end{gathered} \tag{63}$$

где $\mathscr{D}_{x_j} = \partial/\partial x_j$, $\mathscr{D}_{y_j} = \partial/\partial y_j$, $j = 1, 2$. Здесь каждое слагаемое справа согласно свойству 3°) семейства (57) ϑ^ε равно нулю вне ε-окрестности границы. С учётом свойств 1°), 4°) функций ϑ^ε, ограниченности их решений и производных задачи на ячейке (24), свойств (58) следов, легко получим

$$\|\mathfrak{U}_1^\varepsilon\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leqslant c\biggl(\int\limits_{Q_\varepsilon} |\partial_z w^0(x)|^2\,dx\biggr)^{1/2} \leqslant c\sqrt{\varepsilon}\|w^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})},$$

$$\|\mathfrak{U}_3^\varepsilon\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leqslant c\varepsilon\|w^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}, \quad \|\mathfrak{U}_4^\varepsilon\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leqslant c\varepsilon\|w^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}, \tag{64}$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0, L и Q.

Аналогично, применив вместо (58) неравенство (26), где $\mathfrak{a}(x,y) = |\mathscr{D}_{y_j} N_l(x,y)|^2$, $j,l = 1,2$, ввиду свойства 4 принадлежит пространству $\mathrm{Lip}\,(\overline{Q}, L_r(\square,\mathbb{C}))$, $r = q/2$, $q > 2$, – показатель повышенной суммируемости из свойства 2, а $w(x) = \partial_z w^0(x)$, получим

$$\|\mathfrak{U}_2^\varepsilon\|_{L_2(Q,\mathbb{C})} \leqslant c\sqrt{\varepsilon}\|w^0\|_{W_2^2(Q,\mathbb{C})}, \tag{65}$$

где $c > 0$ – постоянная, $c = \mathrm{const}(k_0, L, Q)$.

Из оценок (64), (65) в силу (63) следует

$$\|\mathscr{D}_{x_j}(w_1^\varepsilon(x) - \omega_1^\varepsilon(x))\|_{L_2(Q,\mathbb{C})} \leqslant c\sqrt{\varepsilon}\|w^0\|_{W_2^2(Q,\mathbb{C})}, \quad j = 1,2, \tag{66}$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0, L и Q. Кроме того, из (62), свойства 1°) семейства $\{\vartheta^\varepsilon\}$ и (24) следует оценка

$$\|w_1^\varepsilon(x) - \omega_1^\varepsilon(x)\|_{L_2(Q)} \leqslant c\varepsilon\|w^0\|_{W_2^2(Q,\mathbb{C})}. \tag{67}$$

Из соотношений (66), (67) имеем

$$\|w_1^\varepsilon(x) - \omega_1^\varepsilon(x)\|_{W_2^1(Q)} \leqslant c\sqrt{\varepsilon}\|w^0\|_{W_2^2(Q,\mathbb{C})}, \tag{68}$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0, L и Q.

Теперь найдём L_2-оценку функции $f_\varepsilon := A_\varepsilon(w_\varepsilon - \omega_1^\varepsilon)$. Согласно (28) запишем

$$f_\varepsilon = A_\varepsilon(w_\varepsilon - \omega_1^\varepsilon) + A_\varepsilon(w_1^\varepsilon - \omega_1^\varepsilon) = -\varepsilon r_\varepsilon + \partial_{\bar z}(w_1^\varepsilon - \omega_1^\varepsilon) + \mu(y)\partial_z(w_1^\varepsilon - \omega_1^\varepsilon) + \nu(y)\partial_{\bar z}(\overline{w}_1^\varepsilon - \overline{\omega}_1^\varepsilon).$$

Отсюда и из L_2-оценок производных (66) с учётом (3), (27), (30) получим следующие оценки:

$$\|f_\varepsilon\|_{L_2(Q,\mathbb{C})} \leqslant \|A_\varepsilon(w_\varepsilon - \omega_1^\varepsilon)\|_{L_2(Q,\mathbb{C})} + \|A_\varepsilon(w_1^\varepsilon - \omega_1^\varepsilon)\|_{L_2(Q,\mathbb{C})} \leqslant c\sqrt{\varepsilon}\|w^0\|_{W_2^2(Q,\mathbb{C})}, \tag{69}$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0, L и Q.

Заметим, что разность $w = w_\varepsilon - \omega_1^\varepsilon$ является решением задачи Римана–Гильберта

$$\partial_{\bar z} w + \mu^\varepsilon \partial_z w + \nu^\varepsilon \partial_z \overline{w} = f_\varepsilon, \quad w \in W_0(Q),$$

которое принадлежит пространству $W_0(Q)$. Поэтому из (3) и (69) вытекает неравенство

$$\|w_\varepsilon - \omega_1^\varepsilon\|_{W_2^1(Q,\mathbb{C})} \leqslant c\sqrt{\varepsilon}\|w^0\|_{W_2^2(Q,\mathbb{C})}. \tag{70}$$

Из оценок (68), (70) следует оценка разности $w_\varepsilon - \omega_1^\varepsilon$ между точным решением и первым приближением

$$\|w_\varepsilon - w_1^\varepsilon\|_{W_2^1(Q,\mathbb{C})} \leqslant c\sqrt{\varepsilon}\|w^0\|_{W_2^2(Q,\mathbb{C})} \tag{71}$$

с постоянной $c>0$, зависящей только от k_0, L и Q. Отсюда, из оценки (60) и из леммы 2 получим следующую оценку:

$$\|w_\varepsilon - w^0\|_{L_2(Q,\mathbb{C})} \leqslant c\sqrt{\varepsilon}\|w^0\|_{W_2^2(Q,\mathbb{C})} \tag{72}$$

с постоянной $c>0$, зависящей только от k_0, L и Q.

Заметим, что w^0 – решение усреднённой эллиптической задачи, поэтому, согласно теореме 2, получим

$$\|w^0\|_{W_2^2(Q,\mathbb{C})} \leqslant c\|f\|_{W_2^1(Q,\mathbb{C})}$$

с постоянной $c>0$, зависящей только от k_0, L и Q. Следовательно, из оценок (71), (72) вытекают оценки (33). Теорема 6 доказана.

5.3. Доказательство теоремы 7. Пусть правая часть уравнения (7) f принадлежит пространству $W_0(Q) \subset W_2^1(Q,\mathbb{C})$, тогда, ввиду того что $\|f\|_{W_0(Q)} = \|\partial_{\overline{z}} f\|_{L_2(Q,\mathbb{C})}$ задаёт в $W_0(Q)$ норму, эквивалентную норме пространства $W_2^1(Q,\mathbb{C})$, из оценок (33) получим

$$\|w_\varepsilon - w^0\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leqslant c\sqrt{\varepsilon}\|\partial_{\overline{z}} f\|_{L_2(Q;\mathbb{C})}, \tag{73}$$

$$\|w_\varepsilon - w_1^\varepsilon\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})} \leqslant c\sqrt{\varepsilon}\|\partial_{\overline{z}} f\|_{L_2(Q;\mathbb{C})}. \tag{74}$$

(Здесь и ниже $c>0$ – постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0, постоянной Липшица L и области Q.)

Так как w_ε, w^0 – решения краевых задач Римана–Гильберта, имеем

$$w_\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} f, \quad w^0 = A_0^{-1} f.$$

Следовательно, ввиду (73), получим

$$\|(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})f\|_{L_2(Q,\mathbb{C})} \leqslant c\sqrt{\varepsilon}\|\partial_{\overline{z}} f\|_{L_2(Q,\mathbb{C})}, \quad f \in W_0(Q).$$

Отсюда, так как отображение $\partial_{\overline{z}} : W_0(Q) \to L_2(Q,\mathbb{C})$ есть изоморфизм, имеем

$$\|(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})\partial_{\overline{z}}^{-1} g\|_{L_2(Q,\mathbb{C})} \leqslant c\sqrt{\varepsilon}\|g\|_{L_2(Q,\mathbb{C})}, \quad g \in L_2(Q,\mathbb{C}).$$

Следовательно,

$$\|(A_\varepsilon^{-1} - A_0^{-1})\partial_{\overline{z}}^{-1}\|_{L_2(Q,\mathbb{C}) \to L_2(Q,\mathbb{C})} \leqslant c\sqrt{\varepsilon}.$$

Значит первая из оценок (34) доказана.

В силу того, что имеет место вложение $W_0(Q) \subset L_2(Q,\mathbb{C})$, операторы A_ε^{-1}, A_0^{-1} можно рассматривать как операторы, действующие из $W_0(Q)$ в $L_2(Q,\mathbb{C})$, тогда из оценки (73) получим вторую из оценок (34).

Аналогично, использовав (74), получим оценки (35) и (36). Теорема 7 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жиков В.В, Козлов С.М., Олейник О.А.* Усреднение дифференциальных операторов. М., 1993.
2. *Жиков В.В., Пастухова С.Е.* Об операторных оценках в теории усреднения // Успехи мат. наук. 2016. Т. 71. № 3. С. 27–122.
3. *Бирман М.Ш., Суслина Т.А.* Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения // Алгебра и анализ. 2003. Т. 15. № 5. С. 1–108.
4. *Борисов Д.И.* Асимптотики решений эллиптических систем с быстро осциллирующими коэффициентами // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20. № 2. С. 19–42.
5. *Сеник Н.Н.* Об усреднении несамосопряжённых локально-периодических эллиптических операторов // Функц. анализ и его прил. 2017. Т. 51. № 2. С. 92–96.
6. *Пастухова С.Е., Тихомиров Р.Н.* Операторные оценки повторного и локально-периодического усреднения // Докл. РАН. 2007. Т. 415. № 3. С. 304–309.

7. *Жиков В.В.* Об операторных оценках в теории усреднения // Докл. РАН. 2005. Т. 403. № 3. С. 305–308.
8. *Сиражудинов М.М.* Асимптотический метод усреднения обобщенных операторов Бельтрами // Мат. сб. 2017. Т. 208. № 4. С. 87–110.
9. *Сиражудинов М.М.* Операторные оценки усреднения обобщенных уравнений Бельтрами // Дагестанск. электрон. мат. изв. 2017. Вып. 7. С. 40–46.
10. *Сиражудинов М.М., Тихомирова С.В.* Оценки погрешности усреднения периодической задачи для обобщённого уравнения Бельтрами // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1651–1659.
11. *Сиражудинов М.М., Джамалудинова С.П.* Оценки погрешности усреднения задачи Римана–Гильберта для уравнения Бельтрами с локально-периодическим коэффициентом // Вестн. Дагестанск. гос. ун-та. Сер. 1. Естеств. науки. 2021. Т. 36. № 4. С. 23–38.
12. *Сиражудинов М.М.* О G-сходимости и усреднении обобщённых операторов Бельтрами // Мат. сб. 2008. Т. 199. № 5. С. 124–155.
13. *Сиражудинов М.М.* О краевой задаче Римана–Гильберта (L_2-теория) // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 1. С. 64–73.
14. *Сиражудинов М.М.* О периодических решениях одной эллиптической системы первого порядка // Мат. заметки. 1990. Т. 48. № 5. С. 153–155.
15. *Сиражудинов М.М.* Асимптотический метод усреднения обобщенных операторов Бельтрами // Мат. сб. 2017. Т. 208. № 4. С. 87–110.
16. *Гильбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М., 1989.
17. *Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л.* Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. М., 1987.

Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН, г. Махачкала,
Дагестанский государственный университет, г. Махачкала

Поступила в редакцию 12.01.2022 г.
После доработки 12.01.2022 г.
Принята к публикации 25.05.2022 г.