ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 6, с. 795–812

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.9

ОБ ИТЕРАТИВНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПРИНЦИПА ЛАГРАНЖА В ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЁННЫМИ СИСТЕМАМИ ВОЛЬТЕРРОВА ТИПА С ОПЕРАТОРНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© 2022 г. В. И. Сумин, М. И. Сумин

Рассматривается итеративная регуляризация классических условий оптимальности – принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина в выпуклой задаче оптимального управления с операторным (т.е. задаваемым оператором с бесконечномерным образом) ограничением-равенством и функциональными ограничениями-неравенствами. Управляемая система задаётся линейным функционально-операторным уравнением второго рода общего вида в пространстве L_2^m, основной оператор правой части уравнения предполагается квазинильпотентным. Целевой минимизируемый функционал задачи сильно выпуклый. Получение регуляризованных условий оптимальности основано на использовании метода итеративной двойственной регуляризации. Основное их предназначение – устойчивое генерирование в рассматриваемой оптимизационной задаче обобщённых минимизирующих последовательностей из минималей регулярного функционала Лагранжа, двойственные переменные для которого генерируются в соответствии с процедурой итеративной регуляризации градиентного подъема в двойственной задаче. Как иллюстрирующий пример рассматривается задача оптимизации для системы уравнений гиперболического типа, частным случаем этой задачи является конкретная обратная задача финального наблюдения.

DOI: 10.31857/S0374064122060073, EDN: CDFMUX

Введение. Статья посвящена итеративной регуляризации принципа Лагранжа в выпуклых задачах оптимального управления распределенными системами вольтеррова типа с операторными ограничениями. Главное назначение предлагаемой регуляризации – “преодоление” связанных с некорректностью классических условий оптимальности (КУО) проблем и устойчивое генерирование обобщённых минимизирующих последовательностей (ОМП), состоящих из минималей регулярного функционала Лагранжа в рассматриваемой оптимизационной задаче, двойственные переменные для которого генерируются в соответствии с процедурой итеративной регуляризации градиентного подъема в двойственной задаче. В работе показано, что “внутренний потенциал” КУО такой, что при соответствующей конструктивной трансформации–регуляризации они эффективно преобразуются в удобные средства решения некорректных оптимизационных задач.

Потребность в регуляризации КУО объясняется свойствами их некорректности, под которыми понимаются их возможные невыполнимость и неустойчивость по возмущению исходных данных. Эти свойства некорректности обусловлены самой природой задач условной оптимизации [1, 2]. Заметим, что о невыполнимости КУО естественно говорить как в случае, когда этот факт строго доказывается (см. пример в [3, с. 260], а также соответствующие примеры в [1, 2]), так и в случае, когда мы не знаем так это или нет (см. ниже обсуждение задачи (P)). Можно утверждать, что проверка на корректность конкретных задач условной оптимизации и оптимального управления, их систем оптимальности представляет собою, как правило, сложную самостоятельную математическую задачу. Поэтому, если мы хотим привлечь КУО непосредственно к решению сложных задач оптимизации, то и “относиться” к ним необходимо как к математическим объектам с заведомо возможными свойствами некорректности (см. работы [4, 5]). Необходимость такого подхода к задачам условной оптимизации и оптимального управления связана ещё и с тем, что сама физическая суть подобных задач, часто возникающих в современном естествознании, обуславливает приближённое задание исходных данных.

Идея регуляризации КУО в задачах условной оптимизации на основе теории двойственности как в неитеративном, так и в итеративном вариантах была относительно недавно предложена в статье [6] (см. также работы [1, 2]), аналогичные вопросы для задач оптимального управления распределёнными системами рассматривались, в частности, в работах [2, 7] (см. также библиографию в них). Отметим, что впервые принцип итеративной регуляризации был предложен для решения монотонных вариационных неравенств в работе [8] (см. также книгу [9] и библиографию в ней), его применение для обоснования процедуры регуляризации метода проекции градиента для задачи математического программирования подробно изложено в [5, гл. 9, § 8]. Об итеративной двойственной регуляризации [6] (см. также [2]) мы говорим тогда, когда принцип итеративной регуляризации применяется для решения задачи, двойственной по отношению к исходной задаче выпуклого программирования.

Данная статья продолжает линию исследований по регуляризации КУО в задачах оптимального управления линейными распределёнными системами работ [10, 11], в которых изучались оптимизационные задачи с функциональными ограничениями. В статье [10] рассматривалась итеративная регуляризация КУО, в [11] – неитеративная. С общей точки зрения рассматриваемая в статье задача оптимального управления представляет собою каноническую задачу выпуклого программирования [3, п. 3.3.1] в гильбертовом пространстве с операторным ограничением-равенством, также в гильбертовом пространстве, и функциональными ограничениями-неравенствами (см. задачу (3) ниже). Главную трудность при работе с такими ограничениями представляет, как известно, операторное равенство. Для пояснения содержательного смысла результатов данной статьи вкратце рассмотрим классическую некорректную задачу поиска нормального решения операторного уравнения первого рода [4, 5, 9], частным случаем которой становится наша базовая задача (3), если в ней отбросить функциональные ограничения и упростить целевой функционал. Речь идет о задаче на условный экстремум

$$(P) \qquad \|u\|^2 \to \inf, \quad \mathcal{G}[u] = h, \quad u \in \mathcal{D} \subseteq Z,$$

где $\mathcal{G} : Z \to H$ – линейный ограниченный оператор, Z, H – гильбертовы пространства, $h \in H$ – заданный элемент, $\mathcal{D}$ – выпуклое замкнутое множество в Z.

Прежде чем говорить о регуляризации принципа Лагранжа (ПЛ) для более специальных задач типа базовой задачи (3) данной статьи, естественно сначала выяснить как этот принцип может быть записан в задаче (P). Случай конечномерного ограничения-равенства, как известно, не вызывает затруднений. В общем случае на пути вывода для задачи (P) принципа Лагранжа возникают существенные трудности, связанные как раз с операторным ограничением-равенством. Так, например, известные подходы к выводу принципа Лагранжа (см. [3, 12]) требуют замкнутости образа оператора $\mathcal{G}$ *). Это требование не выполняется, например, в случае вполне непрерывного оператора $\mathcal{G}$ (см. [14, с. 225, теорема 1]), часто встречающемся в распределённых задачах оптимизации. Подход к выводу для задачи (P) принципа Лагранжа с помощью метода возмущений (см., например, [3, п. 3.3.2]), использующий включение этой задачи в семейство аналогичных задач, зависящих от параметра $p \in H$, вида

$$(P_p) \qquad \|u\|^2 \to \inf, \quad \mathcal{G}[u] = h + p, \quad u \in \mathcal{D} \subseteq Z,$$

предполагает жёсткую связь соотношений принципа Лагранжа с субдифференциальными свойствами функции значений задачи (P_p). Именно, как показано в [1, теорема 2.1; 14, теорема 1.1], этот подход позволяет формально получить невырожденный (регулярный или нерегулярный) принцип Лагранжа в задаче $(P) = (P_0)$ тогда и только тогда, когда имеет место хотя бы одно из двух соотношений: $\partial\beta(0) \neq \varnothing$ или $\partial^\infty\beta(0) \neq \{0\}$, где $\partial\beta(0)$ и $\partial^\infty\beta(0)$ – субдифференциал и асимптотический субдифференциал (в смысле выпуклого анализа) выпуклой полунепрерывной снизу функции значений $\beta(p) \equiv \min\limits_{\substack{u\in\mathcal{D}\\ \mathcal{G}[u]=h+p}} \|u\|^2$, $p \in H$, в нуле. Однако, к сожалению, проверка выполнимости нужных субдифференциальных свойств функции значений представляет собою трудную самостоятельную математическую задачу.

*) Как отмечено в книге [3, п. 3.2.4, с. 260], невыполнение этого условия замкнутости может приводить к тому, что ПЛ вовсе не выполняется, см. также соответствующие примеры в [1, 2].

Наконец, если задача (P) такова, что в ней все же "можно записать" принцип Лагранжа, то "практическое" использование этого принципа (например, при нахождении приближений к решению задачи) неизбежно наталкивается на проблему его неустойчивости [1, 2].

Сказанное выше означает, что регуляризация КУО в задачах условной оптимизации с операторными ограничениями, в известном смысле, гораздо более актуальна по сравнению с регуляризацией в случае функциональных ограничений. Заметим, что задачи с операторными ограничениями-равенствами, например в форме задачи (P), естественным образом возникают при рассмотрении широкого класса представляющих большой интерес обратных задач для распределённых систем (например, обратных задач наблюдения [2]). В то же время, как показано в данной статье, схема регуляризации КУО при операторных ограничениях может быть аналогична схеме регуляризации при функциональных ограничениях.

Как и в [10, 11], в работе используется хорошо известное понятие ОМП – минимизирующего приближённого решения (МПР) [15, гл. III], т.е. последовательности допустимых управлений, значения функционала качества на которых стремятся к нижней грани задачи, а ограничения при этом выполняются лишь "в пределе" (определение МПР см. ниже в пункте 1.3 и в пункте 2.2, определение 2). Центральным в работе и неразрывно связанным с понятием МПР является введённое в [16] понятие МПР-образующего (регуляризирующего) алгоритма для задачи условной оптимизации. Его можно квалифицировать как занимающее промежуточное положение между применяемыми в [5, гл. 9] понятиями регуляризирующих алгоритмов первого типа (сходимость нижних граней [5, гл. 9, § 2, определение 1]) и второго типа (сходимость по аргументу [5, гл. 9, § 6, определение 1]). Это понятие направлено прежде всего на устойчивое построение МПР в задаче условной оптимизации и "жёстко привязано" именно к понятию МПР, органично учитывающему как запросы строгой математической оптимизационной теории [15, гл. IV–VIII], так и потребности инженерной практики [15, гл. III]. Понятие МПР-образующего алгоритма в совокупности с двойственным подходом позволяет получать регуляризованные КУО при весьма общих предположениях об исходных данных задачи. Одновременно с этим оно естественным образом "встраивается" в формулировки регуляризованных КУО.

Выделим основные свойства получаемых в статье результатов. Регуляризованные КУО:

1) формулируются как теоремы существования в исходной задаче МПР, состоящего из минималей функционала Лагранжа, двойственные переменные для которого генерируются в соответствии с процедурой итеративной регуляризации градиентного подъема в двойственной задаче;

2) формулируются для любой задачи рассматриваемого в статье класса задач вне зависимости от свойств задающих ограничения операторов с бесконечномерными образами и субдифференциальных свойств функций значений;

3) могут трактоваться как условия оптимальности, выраженные в секвенциальной форме;

4) выражаются в терминах регулярных классических функций Лагранжа и Гамильтона–Понтрягина;

5) являются секвенциальными обобщениями классических аналогов – своих предельных вариантов, сохраняя общую структуру последних;

6) "преодолевают" свойства некорректности КУО и представляют собою удобные регуляризирующие алгоритмы решения задач оптимизации.

Отличительная черта рассматриваемых в статье линейных функциональных уравнений второго рода – квазинильпотентность основного линейного оператора правой части. Подобным свойством обладают, прежде всего, различного рода вольтерровы операторы*). Поэтому рассматриваемые уравнения можно назвать функциональными уравнениями вольтеррова

*) Начиная с известных работ L. Tonelli (1929) и А.Н. Тихонова (1938), название "вольтерровы операторы" (операторы типа Вольтерры) присваивалось разными авторами различным классам операторов со сходными свойствами (используются также названия: причинные операторы, наследственные операторы и др.); см., например, краткий обзор определений вольтерровых операторов [17, дополнение], а также [11, 18]. В случае линейных операторов эти определения так или иначе связаны со свойством квазинильпотентности: либо это свойство включено в само определение вольтеррова оператора (см., например, [19, с. 10]), либо при естественных условиях следует из этого определения (см., например, определение функционального оператора, "вольтеррова на системе множеств" [20], являющееся многомерным обобщением определения А.Н.Тихонова, и опирающийся на это определение цепочечный признак квазинильпотентности [18, теорема 2]).

типа. К ним естественным образом (обращением главной части) сводятся самые разнообразные начально-краевые задачи для различных уравнений с частными производными (гиперболических, параболических, интегро-дифференциальных систем таких уравнений уравнений с запаздываниями разного рода и др., см., например, разнообразные конкретные примеры в [17, гл. 2], обзоры в [17, 18]). Это позволило в данной статье получить регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина (ПМП) в итерационной форме единообразно для широкого класса распределённых задач оптимизации. Как иллюстрирующий пример рассматривается задача оптимизации для гиперболической системы; частным случаем этой задачи является конкретная обратная задача финального наблюдения. В работе существенным образом используется предложенное нами ранее понятие равностепенной квазинильпотентности семейства операторов (историю вопроса см. в [21]).

Примем следующие обозначения и соглашения: $\mathbb{R}^n$ – пространство n-векторов-столбцов; $\langle\cdot,\cdot\rangle_n$ и $|\cdot|_n$ – евклидовы скалярное произведение и норма в $\mathbb{R}^n$; 0_n – нуль в $\mathbb{R}^n$; векторы, если не оговорено противное, считаются столбцами; $\operatorname{col}\{a,\ldots,b\}$ – вектор-столбец с последовательными частями a, $\ldots$, b; * – знак сопряжения и транспонирования; $\Pi\subset\mathbb{R}^n$ – ограниченное и измеримое по Лебегу множество изменения независимых переменных, элементы которого обозначаем через $t\equiv\{t^1,\ldots,t^n\}$; $L_p(\Pi)$ – лебегово пространство со стандартной нормой $(1\leqslant p\leqslant\infty)$; $L_p^m\equiv L_p^m(\Pi)\equiv(L_p(\Pi))^m$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$; $\|\cdot\|_{p,m}$ – стандартная норма прямого произведения в L_p^m; $\langle\cdot,\cdot\rangle_{2,m}$ – стандартное скалярное произведение в L_2^m; $L_p^{m\times l}\equiv L_p^{m\times l}(\Pi)$ – пространство $(m\times l)$-матриц-функций с элементами из $L_p(\Pi)$; $\|\cdot\|_{p,m\times l}$ – стандартная норма прямого произведения в $L_p^{m\times l}$; H – некоторое гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ и нормой $\|\cdot\|_H$; $\chi_{[\alpha,\beta]}(\xi)\equiv\{1,\xi\in[\alpha,\beta];0,\xi\notin[\alpha,\beta]\}$, $\xi\in\mathbb{R}$, – характеристическая функция отрезка $[\alpha,\beta]$ действительной прямой.

1. Постановка задачи оптимального управления.

1.1. Базовая оптимизационная задача. Пусть заданы: натуральные числа m, s; $c(t)$, $t\in\Pi$, – функция класса L_2^m; $A:L_2^m\to L_2^m$ – *линейный ограниченный оператор* (ЛОО) с нулевым спектральным радиусом; ЛОО $B:L_2^s\to L_2^m$. Рассмотрим функциональное уравнение

$$z(t)=A[z](t)+B[u](t)+c(t),\quad t\in\Pi,\quad z\in L_2^m,\quad u\in L_2^s, \tag{1}$$

где u – управление. Ввиду квазинильпотентности оператора A уравнение (1) имеет для каждого $u(\cdot)\in L_2^s$ единственное в классе L_2^m решение $z(t)$, $t\in\Pi$, и

$$z(t)=S[B[u]+c](t),\quad t\in\Pi,\quad u\in L_2^s, \tag{2}$$

где $S:L_2^m\to L_2^m$ – ЛОО – сумма ряда Неймана:

$$S[y]\equiv\sum_{i=0}^{\infty}A^i[y],\quad y\in L_2^m.$$

Отвечающее управлению $u(\cdot)\in L_2^s$ решение $z(\cdot)$ уравнения (1) обозначим через $z_u(\cdot)$.

Будем считать, что заданы ЛОО $\mathcal{A}:L_2^m\to H$, ЛОО $\mathcal{B}:L_2^s\to H$ и элемент $\mathcal{C}\in H$, а на прямом произведении $L_2^m\times L_2^s$ определены некоторые функционалы $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{J}_1$, $\ldots$, $\mathcal{J}_k$ со свойствами: $\mathcal{J}_0[z,u]\equiv K[z]+M[u]$, $z\in L_2^m$, $u\in L_2^s$, где $K:L_2^m\to\mathbb{R}$ – выпуклый функционал, а $M:L_2^s\to\mathbb{R}$ – сильно выпуклый функционал с постоянной сильной выпуклостью κ; $\mathcal{J}_i[\cdot,\cdot]:L_2^m\times L_2^s\to\mathbb{R}$ – выпуклый функционал $(i=\overline{1,k})$. Использовав (2) как формулу подстановки, зададим на L_2^s функционалы $J_0[u]\equiv\mathcal{J}_0[z_u,u]\equiv K[z_u]+M[u]$, $J_i[u]\equiv\mathcal{J}_i[z_u,u]$ $(i=\overline{1,k})$ и оператор $\mathcal{G}[u]\equiv\mathcal{A}[z_u]+\mathcal{B}[u]$, $u\in L_2^s$. Функционалы $J_i[\cdot]$ $(i=\overline{1,k})$ – выпуклые, $J_0[\cdot]$ – сильно выпуклый. Пусть $\mathcal{D}\subset L_2^s$ – непустое, выпуклое, ограниченное и замкнутое множество. Будем рассматривать задачи оптимизации системы (1) вида

$$J_0[u]\to\min,\quad \mathcal{G}[u]=\mathcal{C},\quad J_1[u]\leqslant0,\ldots,J_k[u]\leqslant0,\quad u\in\mathcal{D}, \tag{3}$$

с операторным ограничением $\mathcal{G}[u]=\mathcal{C}$, функциональными ограничениями $J_i[u]\leqslant0$ $(i=\overline{1,k})$, минимизируемым функционалом $J_0[u]$, множеством допустимых управлений $\mathcal{D}$.

1.2. Точная и приближённые оптимизационные задачи. Задача (3) полностью определяется набором исходных данных $\mathsf{f} \equiv \{A, B, c, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, K, M, \mathcal{J}_i (i = \overline{1,k})\}$. Предположим, что точные данные $\mathsf{f}^0 \equiv \{A^0, B^0, c^0, \mathcal{A}^0, \mathcal{B}^0, \mathcal{C}^0, K^0, M^0, \mathcal{J}_i^0 (i = \overline{1,k})\}$ не известны, но можно оперировать с приближёнными данными $\mathsf{f}^\delta \equiv \{A^\delta, B^\delta, c^\delta, \mathcal{A}^\delta, \mathcal{B}^\delta, \mathcal{C}^\delta, K^\delta, M^\delta, \mathcal{J}_i^\delta (i = \overline{1,k})\}$, где $\delta \in (0, \delta_0]$ – числовой параметр (δ_0 – фиксированное число), характеризующий близость приближённых данных f^δ к точным f^0 в указанном ниже условиями A_1) и A_2) смысле. Итак, при каждом $\delta \in [0, \delta_0]$ существуют квазинильпотентный ЛОО $A^\delta : L_2^m \to L_2^m$; ЛОО $B^\delta : L_2^s \to L_2^m$; $c^\delta(\cdot) \in L_2^m$; ЛОО $\mathcal{A}^\delta : L_2^m \to H$, ЛОО $\mathcal{B}^\delta : L_2^s \to H$, $\mathcal{C}^\delta \in H$; выпуклый функционал $K^\delta[z] : L_2^m \to \mathbb{R}$; сильно выпуклый функционал $M^\delta[u] : L_2^s \to \mathbb{R}$ с постоянной сильной выпуклостью κ; выпуклые функционалы $\mathcal{J}_i^\delta[z,u] : L_2^m \times L_2^s \to \mathbb{R}$ $(i = \overline{0,k})$, причём $\mathcal{J}_0^\delta[z,u] \equiv K^\delta[z] + M^\delta[u]$. Предполагаем, что выполняется условие

Л) функционалы K^δ, M^δ и каждый из функционалов $\mathcal{J}_i^\delta$ $(i = \overline{1,k})$, $\delta \in [0, \delta_0]$, – липшицевы на каждом ограниченном множестве пространств L_2^m, L_2^s и $L_2^m \times L_2^s$ соответственно, причём липшицевость равномерна по параметру $\delta \in [0, \delta_0]$, т.е. соответствующие постоянные Липшица не зависят от $\delta \in [0, \delta_0]$.

Считаем, что данные f^δ, $\delta \in (0, \delta_0]$, и f^0 связаны условиями:

A_1) Существует постоянная $C > 0$ такая, что при любом $\delta \in (0, \delta_0]$ выполняются оценки

$$\|A^\delta - A^0\| \leqslant C\delta, \quad \|B^\delta - B^0\| \leqslant C\delta, \quad \|c^\delta - c^0\|_{2,m} \leqslant C\delta, \quad \|\mathcal{A}^\delta - \mathcal{A}^0\| \leqslant C\delta,$$

$$\|\mathcal{B}^\delta - \mathcal{B}^0\| \leqslant C\delta, \quad \|\mathcal{C}^\delta - \mathcal{C}^0\|_H \leqslant C\delta, \quad |M^\delta[u] - M^0[u]| \leqslant C\delta \quad (u \in \mathcal{D}).$$

A_2) Существует неубывающая функция $N_1(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что для каждого $l > 0$ и любого $\delta \in (0, \delta_0]$ при $\|z(\cdot)\|_{2,m} \leqslant l$, $u \in \mathcal{D}$ выполняются неравенства

$$|K^\delta[z] - K^0[z]| \leqslant N_1(l)\delta, \quad |\mathcal{J}_i^\delta[z,u] - \mathcal{J}_i^0[z,u]| \leqslant N_1(l)\delta \quad (i = \overline{1,k}).$$

Чтобы сформулировать условие A_3), воспользуемся следующим предложенным нами ранее (историю вопроса см. в [21]) понятием равностепенной квазинильпотентности. Пусть $\mathbf{B}$ – банахово пространство, Ξ – некоторое множество, $\{G(\xi)[\,\cdot\,] : \mathbf{B} \to \mathbf{B}\}_{\xi \in \Xi}$ – семейство зависящих от параметра $\xi \in \Xi$ квазинильпотентных ЛОО (напомним, квазинильпотентность ЛОО $G(\xi)[\,\cdot\,] : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ означает, что $\sqrt[k]{\|\{G(\xi)\}^k\|} \to 0$ при $k \to \infty$). Семейство операторов $\{G(\xi)\}_{\xi \in \Xi}$ называем *равностепенно квазинильпотентным*, если $\sup\limits_{\xi \in \Xi} \sqrt[k]{\|\{G(\xi)\}^k\|} \to 0$ при $k \to \infty$.

A_3) Семейство операторов $\{A^\delta : L_2^m \to L_2^m\}_{\delta \in [0, \delta_0]}$ равностепенно квазинильпотентно.

При любом $\delta \in [0, \delta_0]$ управляемое функциональное уравнение

$$z(t) = A^\delta[z](t) + B^\delta[u](t) + c^\delta(t), \quad t \in \Pi, \quad z \in L_2^m, \quad u \in L_2^s, \tag{4}$$

имеет для каждого $u \in L_2^s$ единственное в L_2^m решение $z(t)$, $t \in \Pi$, причём

$$z(t) = S^\delta[B^\delta[u] + c^\delta](t), \quad t \in \Pi, \quad u \in L_2^s, \tag{5}$$

где $S^\delta[y] \equiv \sum_{i=0}^\infty (A^\delta)^i[y]$, $y \in L_2^m$. Отвечающее управлению $u \in L_2^s$ и задаваемое формулой (5) решение $z(\cdot)$ уравнения (4) обозначаем $z_u^\delta(\cdot)$, $\delta \in [0, \delta_0]$. При любом $\delta \in [0, \delta_0]$ имеется задача оптимизации системы (4):

$$(OC^\delta) \qquad J_0^\delta[u] \to \min, \quad \mathcal{G}^\delta[u] = \mathcal{C}^\delta, \quad J_1^\delta[u] \leqslant 0, \quad \ldots, \quad J_k^\delta[u] \leqslant 0, \quad u \in \mathcal{D},$$

где

$$\mathcal{G}^\delta[u] \equiv \mathcal{A}^\delta[z_u^\delta] + \mathcal{B}^\delta[u], \quad J_i^\delta[u] \equiv \mathcal{J}_i^\delta[z_u^\delta, u] \quad (i = \overline{0,k}), \quad u \in L_2^s. \tag{6}$$

Задачу (OC^0) (т.е. задачу (OC^δ) при $\delta = 0$) называем *точной задачей*, а задачи (OC^δ), $\delta \in (0, \delta_0]$, – *приближёнными задачами* оптимального управления.

1.3. МПР и МПР-образующий оператор. Для компактности записи введём обозначение $J^\delta[u] \equiv \{J_1^\delta[u], \ldots, J_k^\delta[u]\}$. Положим

$$\mathcal{D}^{\delta,\epsilon} \equiv \{u \in \mathcal{D} : \|\mathcal{G}^\delta[u] - \mathcal{C}^\delta\|_H \leqslant \epsilon, \quad J_i^\delta[u] \leqslant \epsilon \quad (i = \overline{1,k})\}, \quad \text{где} \quad \delta \in [0, \delta_0], \quad \epsilon \geqslant 0,$$

и пусть $\mathcal{D}^0 \equiv \mathcal{D}^{0,0}$. Определим обобщённую нижнюю грань β задачи (OC^0) как предел $\beta \equiv \beta_{+0} \equiv \lim_{\epsilon \to +0} \beta_\epsilon$, где $\beta_\epsilon \equiv \inf_{u \in \mathcal{D}^{0,\epsilon}} J_0^0[u]$, если $\mathcal{D}^{0,\epsilon} \neq \varnothing$, и $\beta_\epsilon \equiv +\infty$, если $\mathcal{D}^{0,\epsilon} = \varnothing$. Очевидно, что $\beta \leqslant \beta_0$, где $\beta_0 \equiv \inf_{u \in \mathcal{D}^0} J_0^0[u]$ – классическая нижняя грань задачи (OC^0). Так как (OC^0) – выпуклая задача с сильно выпуклым функционалом цели, то она может иметь не более одного оптимального элемента, а $\beta = \beta_0$. Если задача (OC^0) имеет оптимальный элемент (будем обозначать его u^0), то на нём и достигаются грани β и β_0.

Напомним, что последовательность $u^k(\cdot) \in \mathcal{D}$, $k \in \mathbb{N}$, называется МПР задачи (OC^0), если $J_0^0[u^k(\cdot)] \to \beta$ при $k \to \infty$, причём $u^k \in \mathcal{D}^{0,\epsilon^k}$ для некоторой сходящейся к нулю последовательности положительных чисел ϵ^k, $k \in \mathbb{N}$.

Определение 1. Пусть $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $k \in \mathbb{N}$, – сходящаяся к нулю последовательность. Зависящий от δ^k, $k \in \mathbb{N}$, оператор $R(\,\cdot\,, \delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных f^{δ^k} элемент $R(\mathsf{f}^{\delta^k}, \delta^k) \equiv u^{\delta^k} \in \mathcal{D}$, называем *МПР-образующим* в задаче (OC^0), если последовательность u^{δ^k}, $k \in \mathbb{N}$, есть МПР в этой задаче.

2. Эквивалентная задача выпуклого программирования и регуляризация принципа Лагранжа.

2.1. Задача выпуклого программирования. Задача (OC^δ) при любом $\delta \in [0, \delta_0]$ – это задача выпуклого программирования в L_2^s. Запишем её в виде, позволяющем напрямую воспользоваться результатами работ [1, 16] о регуляризации КУО в задачах выпуклого программирования в гильбертовом пространстве. Определим ЛОО $\mathbf{G}^\delta[\,\cdot\,] : L_2^s \to H$ следующей формулой: $\mathbf{G}^\delta[u] \equiv \mathcal{A}^\delta[S^\delta B^\delta[u]] + \mathcal{B}^\delta[u]$, $u \in L_2^s$, $\delta \in [0, \delta_0]$. Для единообразия записи положим $\mathbf{J}_0^\delta[u] \equiv J_0^\delta[u]$, $\mathbf{J}_i^\delta[u] \equiv J_i^\delta[u]$ $(i = \overline{1,k})$, $u \in L_2^s$. Пусть $e^\delta \equiv \mathcal{C}^\delta - \mathcal{A}^\delta S^\delta[c^\delta]$, $\delta \in [0, \delta_0]$. При каждом $\delta \in [0, \delta_0]$ задача выпуклого программирования в L_2^s

$$(P^\delta) \qquad \mathbf{J}_0^\delta[u] \to \min, \quad \mathbf{G}^\delta[u] = e^\delta, \quad \mathbf{J}_i^\delta[u] \leqslant 0 \quad (i = \overline{1,k}), \quad u \in \mathcal{D},$$

эквивалентна задаче (OC^δ), т.е. совпадают множества решений и значения задач. Задачи (P^δ), $\delta \in [0, \delta_0]$, принадлежат классу задач выпуклого программирования в гильбертовом пространстве с сильно выпуклыми функционалами цели, изучавшемуся в [1, 16].

Условие Л) влечёт за собой равномерную по $\delta \in [0, \delta_0]$ липшицевость функционалов $\mathbf{J}_i^\delta$ $(i = \overline{0,k})$ на любом ограниченном множестве в L_2^s: существует неубывающая функция $\mathbf{N}_2(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что при каждом $\delta \in [0, \delta_0]$ и для любого $l > 0$ выполняются оценки

$$|\mathbf{J}_i^\delta[u_1] - \mathbf{J}_i^\delta[u_2]| \leqslant \mathbf{N}_2(l)\|u_1 - u_2\|_{2,s}, \quad u_1, u_2 \in L_2^s, \quad \|u_1\|_{2,s}, \|u_2\|_{2,s} \leqslant l \quad (i = \overline{0,k}).$$

Из условий A_1) и A_3) следует свойство семейства операторов $\{A^\delta\}_{0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0}$.

Лемма 1. *Существует число* $\mathcal{K}$ *такое, что* $\|S^\delta - S^0\| \leqslant \mathcal{K}\|A^\delta - A^0\|$ *при* $0 < \delta \leqslant \delta_0$.

Доказательство. Из условия A_1) следует существование постоянной C_1 такой, что $\|A^\delta\| \leqslant C_1$, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$. Фиксируем любое $\epsilon \in (0, 1)$. В силу условия A_3) найдётся натуральное $N(\epsilon)$ такое, что $\|(A^\delta)^i\| \leqslant \epsilon^i$ при $i \geqslant N(\epsilon)$, $0 \leqslant \delta \leqslant \delta_0$, т.е. при любом $\delta \in (0, \delta_0]$ выполняется $\|S^\delta\| \leqslant \sum_{i=0}^{N(\epsilon)-1} (C_1)^i + \sum_{i=N(\epsilon)}^\infty \epsilon^i$. Зависящее от ϵ число, стоящее в правой части последнего неравенства, обозначим через C_2. Произвольно выберем $z \in L_2^m$. Так как $S^\delta[z] = A^\delta[S^\delta[z]] + z$, $\delta \in (0, \delta_0]$, то $S^0[z] - S^\delta[z] = A^0[S^0[z] - S^\delta[z]] + (A^0 - A^\delta)[S^\delta[z]]$, и поэтому $S^0[z] - S^\delta[z] = S^0[(A^0 - A^\delta)[S^\delta[z]]]$. Следовательно, при любом $\delta \in (0, \delta_0]$ имеем $\|S^\delta - S^0\| \leqslant C_2\|S^0\|\|A^\delta - A^0\|$ и можно выбрать $\mathcal{K} = C_2\|S^0\|$. Лемма доказана.

Из условий A_1)–A_3) простыми выкладками, использовав лемму 1, получаем следующую связь входных данных задачи (P^0) с входными данными задач (P^δ), $\delta \in (0, \delta_0]$:

Лемма 2. *Существует постоянная* Γ, *зависящая лишь от операторов* A^0, B^0, $\mathcal{A}^0$, $\mathcal{B}^0$, *функционалов* K^0, $\mathcal{J}_i^0$ $(i=\overline{1,k})$, *функций* c^0, N_1, *чисел* C, $\mathcal{K}$, δ_0 *и множества* $\mathcal{D}$, *такая, что для каждого* $\delta\in(0,\delta_0]$ *выполняются неравенства*

$$\|\mathbf{G}^\delta-\mathbf{G}^0\|\leqslant\Gamma\delta,\quad \|e^\delta-e^0\|_H\leqslant\Gamma\delta;\quad |\mathbf{J}_i^\delta[u]-\mathbf{J}_i^0[u]|\leqslant\Gamma\delta,\quad u\in\mathcal{D}\quad (i=\overline{0,k}).\tag{7}$$

2.2. МПР и МПР-образующий оператор в задаче выпуклого программирования. Имеем $\mathcal{D}^{\delta,\epsilon}=\{u\in\mathcal{D}:\|\mathbf{G}^\delta[u]-e^\delta\|_H\leqslant\epsilon,\ \mathbf{J}_i^\delta[u]\leqslant\epsilon\ \ (i=\overline{1,k})\}$, $0\leqslant\delta\leqslant\delta_0$, $\epsilon\geqslant0$. Так как обобщённая нижняя грань задачи (P^0) определяется фактически той же формулой, что и обобщённая нижняя грань задачи (OC^0), и эти грани совпадают, то мы сохраним за ней обозначение β. Имеем $\beta\equiv\beta_{+0}\equiv\lim\limits_{\epsilon\to+0}\beta_\epsilon$, $\beta_\epsilon\equiv\inf\limits_{u\in\mathcal{D}^{0,\epsilon}}\mathbf{J}_0^0[u]$, если $\mathcal{D}^{0,\epsilon}\neq\varnothing$; $\beta_\epsilon\equiv+\infty$, если $\mathcal{D}^{0,\epsilon}=\varnothing$. Как уже отмечалось, $\beta\leqslant\beta_0$, где $\beta_0\equiv\inf\limits_{u\in\mathcal{D}^0}\mathbf{J}_0^0[u]$ – классическая нижняя грань задачи (P^0). Так как (P^0) – выпуклая задача с сильно выпуклым целевым функционалом, то она может иметь не более одного оптимального элемента, а $\beta=\beta_0$. Если (P^0) имеет оптимальный элемент (будем обозначать его u^0), то на нём и достигаются грани β и β_0.

Определение 2. Последовательность $\{u^j\}_{j=1}^\infty\subset\mathcal{D}$, для которой существует стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{\epsilon^j\}_{j=1}^\infty$, такая, что $u^j\in\mathcal{D}^{0,\epsilon^j}$ $(j=1,2,\ldots)$ и $\mathbf{J}_0^0[u^j]\to\beta=\inf\limits_{u\in\mathcal{D}^0}\mathbf{J}_0^0[u]$ при $j\to\infty$, называется *МПР задачи* (P^0).

Лемма 3. *В силу ограниченности* $\mathcal{D}$ *существование МПР в задаче* (P^0) *равносильно неравенству* $\beta<+\infty$. *Если* $\beta<+\infty$ *и сильно выпуклый функционал* $\mathbf{J}_0^0$ *является субдифференцируемым (в смысле выпуклого анализа) в точках* $\mathcal{D}$, *то для любого МПР* u^k, $k\in\mathbb{N}$, *в разрешимой единственным образом в этом случае задаче* (P^0) *справедливо предельное соотношение* $u^k\to u^0$, $k\to\infty$.

Доказательство. Пусть $\beta<+\infty$. Так как $\mathbf{J}_0^0$ – непрерывный и сильно выпуклый, то упомянутая последовательность u^k, $k\in\mathbb{N}$, ограничена. Благодаря единственности решения задачи (P^0), слабой полунепрерывности снизу функционалов $\mathbf{J}_0^0[u]$, $\mathbf{J}_i^0[u]$ $(i=\overline{1,k})$, $u\in\mathcal{D}$, а также свойствам ЛОО $\mathbf{G}^0$, элементы u^k при $k\to\infty$ сходятся слабо к решению u^0. Так как $\mathbf{J}_0^0[u^k]\to\mathbf{J}_0^0[u^0]$, $k\to\infty$, то при субдифференцируемости $\mathbf{J}_0^0$ в точках $\mathcal{D}$ имеем сильную сходимость u^k к u^0 при $k\to\infty$. Лемма доказана.

Положим $\mathbf{J}^\delta[u]\equiv\{\mathbf{J}_1^\delta[u],\ldots,\mathbf{J}_k^\delta[u]\}$. Введём для задачи (P^0) понятие МПР-образующего (регуляризирующего) оператора [16], согласованное с понятием МПР. Набором исходных данных задачи (P^δ) является набор $\hat{\mathsf{f}}^\delta\equiv\{\mathbf{J}_0^\delta,\mathbf{J}^\delta,\mathbf{G}^\delta,e^\delta\}$.

Определение 3. Пусть $\delta^k\in(0,\delta_0)$, $k\in\mathbb{N}$, – сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Зависящий от δ^k, $k\in\mathbb{N}$, оператор $R(\,\cdot\,,\cdot\,,\cdot\,,\cdot\,,\delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных $\{\mathbf{J}_0^{\delta^k},\mathbf{J}^{\delta^k},\mathbf{G}^{\delta^k},e^{\delta^k}\}$ элемент $R(\mathbf{J}_0^{\delta^k},\mathbf{J}^{\delta^k},\mathbf{G}^{\delta^k},e^{\delta^k},\delta^k)=u^{\delta^k}\in\mathcal{D}$, называется *МПР-образующим* в задаче (P^0), если последовательность u^{δ^k}, $k\in\mathbb{N}$, есть МПР в этой задаче.

2.3. Двойственная задача. Регулярная функция Лагранжа задачи (P^δ)

$$L^\delta(u,\lambda,\mu)\equiv\mathbf{J}_0^\delta[u]+\langle\lambda,\mathbf{G}^\delta[u]-e^\delta\rangle_H+\langle\mu,\mathbf{J}^\delta[u]\rangle_k,\quad u\in L_2^s,\quad \lambda\in H,\quad \mu\in\mathbb{R}_+^k,\tag{8}$$

при любых $\lambda\in H$, $\mu\in\mathbb{R}_+^k$, $\delta\in(0,\delta_0]$ сильно выпукла и непрерывна как функция переменной u в L_2^s, а следовательно, достигает минимума на ограниченном выпуклом и замкнутом в L_2^s множестве $\mathcal{D}$, причём в единственной точке

$$u^\delta[\lambda,\mu]\equiv\operatorname*{argmin}_{u\in\mathcal{D}}L^\delta(u,\lambda,\mu),\quad \lambda\in H,\quad \mu\in\mathbb{R}_+^k$$

(см., например, [5, гл. 8, § 2, теорема 10]). Двойственной к задаче выпуклого программирования (P^δ) является задача

$$V^\delta(\lambda,\mu)\equiv\min_{u\in\mathcal{D}}L^\delta(u,\lambda,\mu)\to\sup,\quad \lambda\in H,\quad \mu\in\mathbb{R}_+^k.$$

Следующая лемма доказывается так же, как и оценка (2.32) в работе [16].

Лемма 4. *Существует число* $\mathbf{K}>0$, *зависящее лишь от* $\sup\limits_{u\in\mathcal{D}}\|u\|_{2,s}$, *такое, что выполняется неравенство*

$$|V^\delta(\lambda,\mu)-V^0(\lambda,\mu)|\leqslant \mathbf{K}\delta(1+\|\lambda\|_H+\|\mu\|_k),\quad \lambda\in H,\quad \mu\in\mathbb{R}^k_+,\quad \delta\in(0,\delta_0]. \tag{9}$$

2.4. Итеративная двойственная регуляризация. Пусть задача (P^0) имеет решение. Через $\partial V^\delta(\lambda,\mu)$ обозначим супердифференциал (в смысле выпуклого анализа) вогнутого функционала $V^\delta: H\times\mathbb{R}^k_+\to\mathbb{R}$. Вектор $\widetilde{\partial V^\delta}(\lambda,\mu)\equiv\{\mathbf{G}^\delta[u^\delta[\lambda,\mu]]-e^\delta,\mathbf{J}^\delta[u^\delta[\lambda,\mu]]\}$ лежит в $\partial V^\delta(\lambda,\mu)$. Пусть последовательность $\{\bar\lambda^j,\bar\mu^j\}$, $j=0,1,2,\ldots,$ конструируется по итерационному правилу

$$\{\bar\lambda^{j+1},\bar\mu^{j+1}\}=Pr_\Lambda(\{\bar\lambda^j,\bar\mu^j\}+\beta^j\widetilde{\partial V^{\delta^j}}(\bar\lambda^j,\bar\mu^j)-2\beta^j\alpha^j\{\bar\lambda^j,\bar\mu^j\}),\quad j=0,1,2,\ldots,$$
$$\{\bar\lambda^0,\bar\mu^0\}\in\Lambda\equiv H\times\mathbb{R}^k_+, \tag{10}$$

где последовательности δ^j, α^j, β^j, $j\in\mathbb{N}$, удовлетворяют условиям согласования

$$\delta^j\geqslant 0,\quad \alpha^j>0,\quad \beta^j>0,\quad \lim_{j\to\infty}(\delta^j+\alpha^j+\beta^j)=0,$$

$$\frac{\alpha^j}{\alpha^{j+1}}\leqslant C_0,\quad \frac{|\alpha^{j+1}-\alpha^j|}{(\alpha^j)^3\beta^j}\leqslant\tilde C,\quad \frac{\beta^j}{(\alpha^j)^3}\leqslant\tilde C,\quad \frac{\delta^j}{(\alpha^j)^6}\leqslant\tilde C,\quad \sum_{j=1}^\infty\alpha^j\beta^j=+\infty \tag{11}$$

при некоторых положительных $\tilde C$, C_0. Такие последовательности существуют. Можно взять, например, значения $\alpha^j=j^{-1/6}$, $\beta^j=j^{-1/(5/3)}$, $\delta^j=j^{-1}$. Справедлива следующая теорема сходимости метода итеративной двойственной регуляризации [6, теорема 2].

Теорема 1 (итеративная двойственная регуляризация). *Пусть* u^0 *– решение задачи* (P^0) *и выполняются условия согласования (11). Тогда*

$$\alpha^j\|\{\bar\lambda^j,\bar\mu^j\}\|\to 0,\quad \mathbf{J}_0^0[u^{\delta^j}[\bar\lambda^j,\bar\mu^j]]\to\mathbf{J}_0^0[u^0],\quad \mathbf{G}^0[u^{\delta^j}[\bar\lambda^j,\bar\mu^j]]\to e^0\quad \textit{при}\quad j\to\infty$$

и существует стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{\varkappa^j\}_{j=1}^\infty$ *такая, что* $\mathbf{J}_i^0[u^{\delta^j}[\bar\lambda^j,\bar\mu^j]]\leqslant\varkappa^j$ $(i=\overline{1,k})$, $j\in\mathbb{N}$. *При дополнительном условии субдифференцируемости* $\mathbf{J}_0^0$ *(в смысле выпуклого анализа) в точках* $\mathcal{D}$ *справедливо*

$$\|u^{\delta^j}[\bar\lambda^j,\bar\mu^j]-u^0\|_{2,s}\to 0\quad \textit{при}\quad j\to\infty. \tag{12}$$

Другими словами, вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) *задача, алгоритм* $R(\,\cdot\,,\delta^j)$, *задаваемый равенством* $R(\mathbf{J}_0^{\delta^j},\mathbf{J}^{\delta^j},\mathbf{G}^{\delta^j},e^{\delta^j},\delta^j)=u^{\delta^j}[\bar\lambda^j,\bar\mu^j]$ *для каждого набора исходных данных* $\{\mathbf{J}_0^{\delta^j},\mathbf{J}^{\delta^j},\mathbf{G}^{\delta^j},e^{\delta^j}\}$, *удовлетворяющих оценкам (7) при* $\delta=\delta^j$, *является МПР-образующим в смысле определения 3, причём в случае субдифференцируемости* $\mathbf{J}_0^0$ *в точках* $\mathcal{D}$ *имеет место и сильная сходимость (12); если такой субдифференцируемости нет, то, строго говоря, можно гарантировать лишь слабую сходимость* $u^{\delta^j}[\bar\lambda^j,\bar\mu^j]$ *к* u^0 *при* $\delta^j\to 0$, $j\to\infty$. *Кроме того, справедливы соотношения*

$$\langle\bar\mu^j,\mathbf{J}^{\delta^j}[u^{\delta^j}[\bar\lambda^j,\bar\mu^j]]\rangle_k+\langle\bar\lambda^j,\mathbf{G}^{\delta^j}[u^{\delta^j}[\bar\lambda^j,\bar\mu^j]]-e^{\delta^j}\rangle_H\to 0\quad \textit{при}\quad j\to\infty,$$

$$V^0(\bar\lambda^j,\bar\mu^j)\to\sup_{\{\lambda,\mu\}\in H\times\mathbb{R}^k_+}V^0(\lambda,\mu)=\mathbf{J}_0^0[u^0]\quad \textit{при}\quad j\to\infty.$$

Сформулированная теорема может быть дополнена и регуляризирующим правилом останова итерационного процесса (10) в случае, когда ошибка задания исходных данных δ является конечной и не стремится к нулю (см., например, теорему 3 из [6]).

2.5. Регуляризованный итерационный принцип Лагранжа. Теперь сформулируем и докажем регуляризованный принцип Лагранжа в итерационной форме в задаче (P^0).

Теорема 2 (регуляризованный итерационный принцип Лагранжа). *Для существования в задаче (P^0) МПР необходимо и достаточно, чтобы для последовательности $\{\bar\lambda^j,\bar\mu^j\}\in H\times\mathbb{R}^k_+$, $j=0,1,\ldots,$ порождаемой итерационным процессом (10) с условиями согласования (11), выполнялось предельное соотношение*

$$\langle\bar\lambda^j,\mathbf{G}^{\delta^j}[u^{\delta^j}[\bar\lambda^j,\bar\mu^j,]]-e^{\delta^j}\rangle_H+\langle\bar\mu^j,\mathbf{J}^{\delta^j}[u^{\delta^j}[\bar\lambda^j,\bar\mu^j]]\rangle_k\to 0\quad\text{при}\quad j\to\infty \tag{13}$$

и нашлась такая стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{\epsilon^j\}_{j=1}^\infty$, чтобы имело место включение

$$u^{\delta^j}[\bar\lambda^j,\bar\mu^j]\in\mathcal{D}^{\delta^j,\epsilon^j},\quad j=0,1,\ldots \tag{14}$$

В этом случае последовательность $u^{\delta^j}[\bar\lambda^j,\bar\mu^j]$, $j=0,1,\ldots,$ есть МПР задачи (P^0) и вне зависимости от того, разрешима двойственная к (P^0) задача или нет, при субдифференцируемости $\mathbf{J}_0^0$ на $\mathcal{D}$ имеет место сильная сходимость в L_2^s:

$$u^{\delta^j}[\bar\lambda^j,\bar\mu^j]\to u^0\quad\text{при}\quad j\to\infty. \tag{15}$$

Одновременно выполняется и предельное соотношение

$$V^0(\bar\lambda^j,\bar\mu^j)\to\sup_{(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^k_+}V^0(\lambda,\mu)=\mathbf{J}_0^0[u^0]\quad\text{при}\quad j\to\infty. \tag{16}$$

Другими словами, вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (P^0) задача, алгоритм $R(\,\cdot\,,\delta^j)$, задаваемый равенством $R(\mathbf{J}_0^{\delta^j},\mathbf{J}^{\delta^j},\mathbf{G}^{\delta^j},e^{\delta^j},\delta^j)=u^{\delta^j}[\bar\lambda^j,\bar\mu^j]$ для каждого набора исходных данных $\{\mathbf{J}_0^{\delta^j},\mathbf{J}^{\delta^j},\mathbf{G}^{\delta^j},e^{\delta^j}\}$, удовлетворяющих оценкам (7) леммы 2 при $\delta=\delta^j$, является МПР-образующим в смысле определения 3, а в случае субдифференцируемости $\mathbf{J}_0^0$ в точках $\mathcal{D}$ имеет место и сильная сходимость (15). Если же этой субдифференцируемости нет, то, строго говоря, гарантирована лишь слабая сходимость $u^{\delta^j}[\bar\lambda^j,\bar\mu^j]$ к u^0 при $\delta^j\to 0$, $j\to\infty$.

Доказательство. Для доказательства необходимости заметим, что выпуклая задача (P^0), все функционалы которой непрерывны, разрешима в силу существования МПР и ограниченности $\mathcal{D}$. Поэтому соотношения (13), (14), (16) следуют из теоремы 1.

Для доказательства достаточности заметим, что выпуклая задача (P^0), все функционалы которой непрерывны, разрешима благодаря включениям (14) и ограниченности последовательности $u^{\delta^j}[\bar\lambda^j,\bar\mu^j]$, $j=0,1,\ldots$ Следовательно, в силу теоремы 1 последовательность $\{\bar\lambda^j,\bar\mu^j\}$, $j=0,1,\ldots,$ итерационного процесса (10) с условиями согласования (11) удовлетворяет помимо предельных соотношений (13) и включений (14) ещё и предельному соотношению $\mathbf{J}_0^0(u^{\delta^j}[\bar\lambda^j,\bar\mu^j])\to\mathbf{J}_0^0(u^0)$, $j\to\infty$. Поэтому последовательность $u^{\delta^j}[\bar\lambda^j,\bar\mu^j]$, $j=0,1,\ldots,$ является МПР в задаче (P^0), а значит в случае субдифференцируемости $\mathbf{J}_0^0$ на $\mathcal{D}$ она сходится к u^0 в норме L_2^s. Одновременно, ввиду ограниченности $\mathcal{D}$, предельного соотношения $\alpha^j\|\{\bar\lambda^j,\bar\mu^j\}\|\to 0$, $j\to\infty$, теоремы 1, условий согласования (11) и оценки (9), получаем предельное соотношение $V^{\delta^j}(\bar\lambda^j,\bar\mu^j)-V^0(\bar\lambda^j,\bar\mu^j)\to 0$, $j\to\infty$. Так как при этом, в силу доказанной сходимости $\mathbf{J}_0^0(u^{\delta^j}[\bar\lambda^j,\bar\mu^j])\to\mathbf{J}_0^0(u^0)$, $j\to\infty$ и условия (13), имеет место сходимость $V^{\delta^j}(\bar\lambda^j,\bar\mu^j)\to\mathbf{J}_0^0(u^0)$, $j\to\infty$, то справедливо предельное соотношение (16). Теорема доказана.

3. Регуляризация классических условий оптимальности в задачах оптимального управления распределёнными системами.

3.1. Переформулировка теорем о регуляризации в терминах исходной задачи оптимального управления. Функция Лагранжа задачи (OC^δ) равна функции Лагранжа задачи (P^δ) и имеет вид

$$L^\delta(u,\lambda,\mu)\equiv J_0^\delta[u]+\langle\lambda,\mathcal{G}^\delta[u]-\mathcal{C}^\delta\rangle_H+\langle\mu,J^\delta[u]\rangle_k,\quad u\in L_2^s,\quad\lambda\in H,\quad\mu\in\mathbb{R}^k_+,$$

где $J^\delta[u] \equiv \{J_1^\delta[u], \ldots, J_k^\delta[u]\}$. Соответственно двойственная к (OC^δ) задача имеет вид

$$V^\delta(\lambda, \mu) \equiv \min_{u \in \mathcal{D}} L^\delta(u, \lambda, \mu) \to \sup, \quad \lambda \in H, \quad \mu \in \mathbb{R}_+^k$$

(при любых $\delta \in (0, \delta_0]$, $\lambda \in H$, $\mu \in \mathbb{R}_+^k$ функция $L^\delta(\,\cdot\,, \lambda, \mu)$ достигает минимума на $\mathcal{D}$ в единственной точке $u^\delta[\lambda, \mu]$). "Расшифровка" теорем 1 и 2 в терминах задачи оптимального управления (OC^0) приводит соответственно к алгоритму итеративной двойственной регуляризации и регуляризованному принципу Лагранжа в итерационной форме для этой задачи. Пусть последовательность $\{\bar\lambda^j, \bar\mu^j\}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, конструируется по итерационному правилу (10) с $\widetilde{\partial V^\delta}(\lambda, \mu) \equiv \{\mathcal{G}^\delta[u^\delta[\lambda, \mu]] - \mathcal{C}^\delta, J^\delta[u^\delta[\lambda, \mu]]\}$ и с условиями согласования (11).

Теорема 3 (итеративная двойственная регуляризация в задаче оптимального управления (OC^0)). *Пусть u^0 – решение задачи (OC^0) и выполняются условия (11). Тогда*

$$\alpha^j \|\{\bar\lambda^j, \bar\mu^j\}\| \to 0, \quad J_0^0[u^{\delta^j}[\bar\lambda^j, \bar\mu^j]] \to J_0^0[u^0], \quad \mathcal{G}^0[u^{\delta^j}[\bar\lambda^j, \bar\mu^j]] \to \mathcal{C}^0 \quad \text{при} \quad j \to \infty,$$

и существует стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{\varkappa^j\}_{j=1}^\infty$ такая, что $J_i^0[u^{\delta^j}[\bar\lambda^j, \bar\mu^j]] \leqslant \varkappa^j$ $(i = \overline{1, k})$, $j = 1, 2, \ldots$ При дополнительном условии субдифференцируемости J_0^0 (в смысле выпуклого анализа) в точках $\mathcal{D}$ выполняется предельное соотношение

$$\|u^{\delta^j}[\bar\lambda^j, \bar\mu^j] - u^0\|_{2,s} \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{17}$$

Другими словами, вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (OC^0) задача, алгоритм $R(\,\cdot\,, \delta^j)$, задаваемый равенством $R(\mathsf{f}^{\delta^j}, \delta^j) = u^{\delta^j}[\bar\lambda^j, \bar\mu^j]$ для каждого набора исходных данных f^{δ^j}, является МПР-образующим в смысле определения 1, причём в случае субдифференцируемости J_0^0 в точках $\mathcal{D}$ имеет место и сильная сходимость (17); если такой субдифференцируемости нет, то, вообще говоря, гарантирована лишь слабая сходимость $u^{\delta^j}[\bar\lambda^j, \bar\mu^j]$ к u^0 при $\delta^j \to 0$, $j \to \infty$. Кроме того, справедливы предельные соотношения

$$\langle \bar\mu^j, J^{\delta^j}[u^{\delta^j}[\bar\lambda^j, \bar\mu^j]]\rangle_k + \langle \bar\lambda^j, \mathcal{G}^{\delta^j}[u^{\delta^j}[\bar\lambda^j, \bar\mu^j]] - \mathcal{C}^{\delta^j}\rangle_H \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty,$$

$$V^0(\bar\lambda^j, \bar\mu^j) \to \sup_{\{\lambda, \mu\} \in H \times \mathbb{R}_+^k} V^0(\lambda, \mu) = J_0^0[u^0] \quad \text{при} \quad j \to \infty.$$

Теорема 4 (регуляризованный принцип Лагранжа в итерационной форме для задачи (OC^0)). *Для существования МПР в задаче (OC^0) необходимо и достаточно, чтобы для последовательности $\{\bar\lambda^j, \bar\mu^j\} \in H \times \mathbb{R}_+^k$, $j = 0, 1, \ldots$, порождаемой итерационным процессом (10) с $\widetilde{\partial V^\delta}(\lambda, \mu) \equiv \{\mathcal{G}^\delta[u^\delta[\lambda, \mu]] - \mathcal{C}^\delta, J^\delta[u^\delta[\lambda, \mu]]\}$ и с условиями согласования (11), выполнялось предельное соотношение*

$$\langle \bar\lambda^j, \mathcal{G}^{\delta^j}[u^{\delta^j}[\bar\lambda^j, \bar\mu^j]] - \mathcal{C}^{\delta^j}\rangle_H + \langle \bar\mu^j, J^{\delta^j}[u^{\delta^j}[\bar\lambda^j, \bar\mu^j]]\rangle_k \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty,$$

и нашлась стремящаяся к нулю последовательность положительных чисел $\{\epsilon^j\}_{j=1}^\infty$ такая, что $u^{\delta^j}[\bar\lambda^j, \bar\mu^j] \in \mathcal{D}^{\delta^j, \epsilon^j}$, $j = 0, 1, \ldots$ В этом случае последовательность $u^{\delta^j}[\bar\lambda^j, \bar\mu^j]$, $j = 0, 1, \ldots$, есть МПР задачи (OC^0) и независимо от того, разрешима двойственная к (OC^0) задача или нет, при субдифференцируемости J_0^0 на $\mathcal{D}$ имеет место сходимость в L_2^s:

$$u^{\delta^j}[\bar\lambda^j, \bar\mu^j] \to u^0 \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{18}$$

Одновременно и $V^0(\bar\lambda^j, \bar\mu^j) \to \sup\limits_{\{\lambda, \mu\} \in H \times \mathbb{R}_+^k} V^0(\lambda, \mu) = J_0^0[u^0]$ *при* $j \to \infty$. *Другими словами, вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к (OC^0) задача, алгоритм $R(\,\cdot\,, \delta^j)$, задаваемый равенством $R(\mathsf{f}^{\delta^j}, \delta^j) = u^{\delta^j}[\bar\lambda^j, \bar\mu^j]$ для каждого набора исходных* *данных* f^{δ^j}, *является МПР-образующим в смысле определения 1, причём в случае субдифференцируемости* J_0^0 *в точках* $\mathcal{D}$ *имеет место и сильная сходимость (18). Если же такой субдифференцируемости нет, то можно говорить лишь о слабой сходимости* $u^{\delta^j}[\bar\lambda^j,\bar\mu^j]$ *к* u^0 *при* $\delta^j\to 0,\ j\to\infty$.

3.2. О минимизации функции Лагранжа. Ключевой задачей процедуры двойственной регуляризации процесса приближённого решения задачи (OC^0), а также возможного применения регуляризованных КУО для практического решения задач оптимизации является задача минимизации функции (функционала) Лагранжа $L^\delta(u,\lambda,\mu)$, $\{\lambda,\mu\}\in H\times\mathbb{R}^k_+$, задачи (OC^δ)

$$L^\delta(u,\lambda,\mu)\to\min,\quad u\in\mathcal{D}, \tag{19}$$

решение которой мы обозначили через $u^\delta[\lambda,\mu]$. От "качества" решения этой "простейшей" задачи напрямую зависит и "качество" решения исходной задачи (OC^0) на основе регуляризованных КУО. Предположим для упрощения изложения, что при каждом $\delta\in(0,\delta_0]$ функционалы $K^\delta[z]:L_2^m\to\mathbb{R}$, $M^\delta[u]:L_2^s\to\mathbb{R}$, $\mathcal{J}_i^\delta[z,u]:L_2^m\times L_2^s\to\mathbb{R}$ $(i=\overline{1,k})$ дифференцируемы по Фреше. Тогда при каждом $\delta\in(0,\delta_0]$ дифференцируемы по Фреше функционалы $\mathbf{J}_i^\delta[u]:L_2^s\to\to\mathbb{R}$ $(i=\overline{0,k})$ и функционал Лагранжа $L^\delta(u,\lambda,\mu)$. В этом случае решение $u^\delta[\lambda,\mu]$ выпуклой задачи на минимум (19) удовлетворяет критерию минимума

$${L^\delta}'_u(u^\delta[\lambda,\mu],\lambda,\mu)[u-u^\delta[\lambda,\mu]]\geqslant 0,\quad u\in\mathcal{D}, \tag{20}$$

где ${L^\delta}'_u(\bar u,\lambda,\mu)[\,\cdot\,]$ – производная Фреше функционала $L^\delta(u,\lambda,\mu)$ по переменной u в точке $\bar u\in L_2^s$ при фиксированных λ, μ. Пусть $\Psi^\delta[\bar u,\lambda,\mu](\cdot)\in L_2^s$ – функция Рисса линейного непрерывного функционала ${L^\delta}'_u(\bar u,\lambda,\mu)[\,\cdot\,]\in(L_2^s)^*$. Критерий (20) можно записать как

$$\langle\Psi^\delta[u^\delta[\lambda,\mu],\lambda,\mu],u-u^\delta[\lambda,\mu]\rangle_{2,s}\geqslant 0,\quad u\in\mathcal{D}. \tag{21}$$

Найдём представление функции $\Psi^\delta[\bar u,\lambda,\mu](t)$, $t\in\Pi$, в терминах задачи (OC^δ), $\delta>0$, а точнее – в терминах уравнения (4), операторов $\mathcal{A}^\delta$, $\mathcal{B}^\delta$ и функционалов K^δ, M^δ, $\mathcal{J}_i^\delta$ $(i==\overline{1,k})$, $\delta>0$. Непосредственно из (5), (6) и (8) следует, что

$$\begin{gathered}{L^\delta}'_u(\bar u,\lambda,\mu)[v]={K^\delta}'_z(S^\delta B^\delta\bar u+S^\delta c^\delta)S^\delta B^\delta[v]+{M^\delta}'_u(\bar u)[v]+\\+\sum_{i=1}^k\mu_i{\mathcal{J}_i^\delta}'_z(S^\delta B^\delta\bar u+S^\delta c^\delta,\bar u)S^\delta B^\delta[v]+\sum_{i=1}^k\mu_i{\mathcal{J}_i^\delta}'_u(S^\delta B^\delta\bar u+S^\delta c^\delta,\bar u)[v]+\\+\langle\lambda,\mathcal{A}^\delta S^\delta B^\delta[v]+\mathcal{B}^\delta[v]\rangle_H,\quad v\in L_2^s,\quad \bar u\in L_2^s.\end{gathered} \tag{22}$$

Последнее слагаемое в правой части равенства (22) равно $\langle(\mathcal{A}^\delta)^*[\lambda],S^\delta B^\delta[v]\rangle_{2,m}+\langle(\mathcal{B}^\delta)^*[\lambda],v\rangle_{2,s}$.

Пусть $\Gamma^\delta[\bar u](\cdot)\in L_2^m$, $\Upsilon^\delta[\bar u](\cdot)\in L_2^s$, $\Theta_i^\delta[\bar u](\cdot)\in L_2^m$, $\Xi_i^\delta[\bar u](\cdot)\in L_2^s$, $\Lambda^\delta[\lambda](\cdot)\in L_2^m$ – функции Рисса, соответственно, функционалов ${K^\delta}'_z(S^\delta B^\delta\bar u+S^\delta c^\delta)S^\delta\ \in(L_2^m)^*$, ${M^\delta}'_u(\bar u)\ \in(L_2^s)^*$, ${\mathcal{J}_i^\delta}'_z(S^\delta B^\delta\bar u+S^\delta c^\delta,\bar u)S^\delta\ \in(L_2^m)^*$, ${J_i^\delta}'_u(S^\delta B^\delta\bar u+S^\delta c^\delta,\bar u)\in(L_2^s)^*$, $\langle(\mathcal{A}^\delta)^*[\lambda],S^\delta[\,\cdot\,]\rangle_{2,m}\in(L_2^m)^*$ $(i=\overline{1,k})$. Формулу (22) запишем следующим образом:

$${L^\delta}'_u(\bar u,\lambda,\mu)[v]=-\langle\psi^\delta[\bar u,\lambda,\mu],B^\delta[v]\rangle_{2,m}+\langle\phi^\delta[\bar u,\lambda,\mu],v\rangle_{2,s},\quad v\in L_2^s, \tag{23}$$

$$\psi^\delta[\bar u,\lambda,\mu]\equiv-\Gamma^\delta[\bar u]-\sum_{i=1}^k\mu_i\Theta_i^\delta[\bar u]-\Lambda^\delta[\lambda], \tag{24}$$

$$\phi^\delta[\bar u,\lambda,\mu]\equiv\Upsilon^\delta[\bar u]+\sum_{i=1}^k\mu_i\Xi_i^\delta[\bar u]+(\mathcal{B}^\delta)^*[\lambda]. \tag{25}$$

Пусть $\Phi^\delta[\bar{u}](\cdot) \in L_2^m$ и $\Omega_i^\delta[\bar{u}](\cdot) \in L_2^m$ – функции Рисса, соответственно, функционалов

$$K^{\delta\prime}_{\ z}(S^\delta B^\delta \bar{u} + S^\delta c^\delta) \in (L_2^m)^* \quad \text{и} \quad \mathcal{J}^{\delta\prime}_{i\ z}(S^\delta B^\delta \bar{u} + S^\delta c^\delta, \bar{u}) \in (L_2^m)^* \quad (i = \overline{1,k}).$$

По определению сопряжённого оператора имеем

$$\Gamma^\delta[\bar{u}] = (S^\delta)^* \Phi^\delta[\bar{u}], \quad \Theta_i^\delta[\bar{u}] = (S^\delta)^* \Omega_i^\delta[\bar{u}] \quad (i = \overline{1,k}), \quad \Lambda^\delta[\lambda] = (S^\delta)^*[(\mathcal{A}^\delta)^*[\lambda]].$$

Так как $(S^\delta)^* \equiv ((E - A^\delta)^{-1})^* = ((E - A^\delta)^*)^{-1} = (E - (A^\delta)^*)^{-1}$, где E – единичный оператор в L_2^m, то определяемая формулой (24) функция $\psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu]$ есть (единственное в L_2^m) решение уравнения

$$\psi(t) - (A^\delta)^*[\psi](t) = -\Phi^\delta[\bar{u}](t) - \sum_{i=1}^k \mu_i \Omega_i^\delta[\bar{u}](t) - (\mathcal{A}^\delta)^*[\lambda](t), \quad t \in \Pi, \quad \psi \in L_2^m, \tag{26}$$

правая часть которого записана в терминах задачи (OC^δ). Таким образом, из (23) получаем следующее представление производной $L^{\delta\prime}_{\ u}(\bar{u}, \lambda, \mu)$ в терминах этой задачи:

$$L^{\delta\prime}_{\ u}(\bar{u}, \lambda, \mu)[v] = \langle -(B^\delta)^*[\psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu]] + \phi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu], v \rangle_{2,s}, \quad v \in L_2^s. \tag{27}$$

Первый сомножитель правой части (27) и даёт искомое представление

$$\Psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu](t) = -(B^\delta)^*[\psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu]](t) + \phi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu](t), \quad t \in \Pi, \tag{28}$$

где $\psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu]$ – L_2^m-решение (26), $\phi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu]$ задаётся формулой (25), $\bar{u} \in L_2^s$.

3.3. Случай ограниченных управлений. Пусть $\mathcal{D} \equiv \{u(\cdot) \in L_\infty^s : u(t) \in U, \ t \in \Pi\}$, где $U \subset \mathbb{R}^s$ – ограниченное замкнутое и выпуклое множество. В этом случае критерий (21) эквивалентен следующему линеаризованному поточечному принципу максимума.

Лемма 5. *Функция $\bar{u} \in \mathcal{D}$ будет решением задачи (19) тогда и только тогда, когда*

$$\langle \Psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu](t), \bar{u}(t) \rangle_s = \max_{w \in U} \langle \Psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu](t), w \rangle_s \quad \text{при почти всех} \quad t \in \Pi, \tag{29}$$

где $\Psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu]$ задаётся формулой (28), в которой $\psi^\delta[\bar{u}, \lambda, \mu]$ – решение сопряжённого уравнения (26).

Доказательство. Необходимость доказывается простейшим игольчатым варьированием, а достаточность – стандартным применением теоремы А.А. Ляпунова (см. [22, § 2.4, § 8.2]).

Благодаря сильной выпуклости целевого функционала, множество управлений $\bar{u}(\cdot)$ из $\mathcal{D}$, удовлетворяющих (при сформулированных выше дополнительных предположениях дифференцируемости) условию (29), состоит ровно из одного элемента, обозначим его $u_m^\delta[\lambda, \mu]$, и $u_m^\delta[\lambda, \mu] = u^\delta[\lambda, \mu]$, т.е. непосредственно из теоремы 4 и леммы 5 получаем следующий регуляризованный ПМП в итерационной форме для задачи (OC^0).

Теорема 5 (регуляризованный ПМП в итерационной форме для задачи оптимального управления (OC^0)). *При сформулированных выше дополнительных условиях дифференцируемости все утверждения теоремы 4 останутся справедливыми, если в них заменить везде $u^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]$ на $u_m^{\delta^j}[\bar{\lambda}^j, \bar{\mu}^j]$.*

4. Иллюстративный пример: регуляризация условий оптимальности в задаче оптимизации для гиперболической системы. Естественный переход от начально-краевой задачи к эквивалентному ей функциональному уравнению второго рода вольтеррова типа осуществляется с помощью обращения главной части задачи. Разнообразные конкретные примеры начально-краевых задач (для параболических, гиперболических, интегро-дифференциальных уравнений с частными производными и систем таких уравнений, различных уравнений с запаздывающим аргументом и др.), которые допускают эквивалентное описание с помощью функциональных уравнений вольтеррова типа можно найти, например, в [17] (см. также обзоры и библиографию в [17, 21]). Из огромного множества самых различных соответствующих оптимизационных задач для иллюстрации изложенной выше теории выбрана задача оптимального управления, связанная с гиперболической системой дифференциальных уравнений первого порядка (частным случаем этой задачи является некоторая обратная задача финального наблюдения). Запишем для этой задачи те основные конструкции, которые и участвуют в формулировке регуляризованных КУО (формирующая критерий минимума функционала Лагранжа функция, сопряжённое уравнение, ...). Сформулировать с их помощью соответствующие регуляризованные КУО – конкретные реализации теорем 3, 4, 5 – будет совсем не трудно.

Пусть $n = 2$, $\Pi = [0,1] \times [0,1]$; $\xi^i > 0$ $(i = \overline{1,m})$ – заданные числа; $\alpha(\cdot) \in L_\infty^{m\times m}$, $\gamma(\cdot) \in L_\infty^{m\times s}$, $\theta_j(\cdot) \in L_2^m[0,1]$ $(j = 1,2)$ – фиксированные функции. Рассмотрим краевую задачу для управляемой линейной гиперболической системы первого порядка

$$\frac{\partial x^i}{\partial t^1} + \xi^i \frac{\partial x^i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}(t)x^j(t) + \sum_{j=1}^s \gamma_{ij}(t)u^j(t), \quad t \in \Pi, \quad i = \overline{1,m}, \tag{30}$$

$$x(t^1, 0) = \theta_1(t^1), \quad 0 \leqslant t^1 \leqslant 1; \quad x(0, t^2) = \theta_2(t^2), \quad 0 \leqslant t^2 \leqslant 1, \tag{31}$$

где $u(\cdot) \in L_2^s$ – управление. Левую часть i-го уравнения (30) понимаем как полную производную функции $x^i(\cdot)$ по t^1 вдоль характеристики l_i дифференциального выражения этой левой части (уравнение характеристики $l_i = l_i(\bar t)$, проходящей через точку $\bar t = \{\bar t^1, \bar t^2\}$ плоскости $t = \{t^1, t^2\}$, имеет вид $t^2 = \eta^i(\bar t; t^1) \equiv \xi^i(t^1 - \bar t^1) + \bar t^2$); такую производную обозначаем $\partial x^i(\cdot)/\partial l_i$ $(i = \overline{1,m})$. Пусть W – класс функций $x(\cdot)$ из L_2^m, у которых при любом $i = \overline{1,m}$ компонента $x^i(\cdot)$ абсолютно непрерывна вдоль почти каждой в Π характеристики l_i, причём функция $\partial x^i(t)/\partial l_i$, $t \in \Pi$, принадлежит L_2.

Назовём решением задачи (30), (31) при данном $u(\cdot)$ функцию $x(\cdot)$ из W, удовлетворяющую почти всюду граничным условиям (31), i-я компонента которой удовлетворяет i-му уравнению (30) почти всюду (по линейной мере) вдоль почти каждой в Π характеристики l_i, $i = \overline{1,m}$. Приведём задачу (30), (31) к эквивалентному уравнению вида (1), показав тем самым, что каждому $u(\cdot) \in L_2^s$ отвечает единственное решение этой задачи. Введём обозначения: $a_i(\bar t)$ (соответственно $b_i(\bar t)$) – точка из $l_i(\bar t) \bigcap \Pi$, имеющая минимальную (соответственно максимальную) координату t^1; $\Theta^i(t) \equiv \{\theta_2^i(a_i^2(t))$, если $t^2 \geqslant \xi^i t^1$; $\theta_1^i(a_i^1(t))$, если $t^2 < \xi^i t^1\}$, $i = \overline{1,m}$; $\Theta(t) \equiv \operatorname{col}\{\Theta^1(t), \ldots, \Theta^m(t)\}$; $l_i[c,t]$ – направленный отрезок прямой $l_i(t)$ от $c \in l_i(t)$ до t; $\int_{l_i[c,t]} y(\,\cdot\,,\cdot\,)\,dl$ – криволинейный интеграл от функции двух переменных $y(\,\cdot\,,\cdot\,)$, равный определённому интегралу $\int_{c^1}^{t^1} y(\xi, \eta^i(t;\xi))\,d\xi$. Формула

$$x^i(t) = \Theta^i(t) + \int\limits_{l_i[a_i(t),t]} z^i(\,\cdot\,,\cdot\,)\,dl, \quad t \in \Pi, \quad i = \overline{1,m}, \tag{32}$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие между классом L_2^m функций $z(\cdot)$ и классом удовлетворяющих граничным условиям (31) функций $x(\cdot)$ из W. Сделав в задаче (30), (31) замену (32) (это и есть процедура обращения главной части задачи (30), (31)), получим

$$z^i(t) = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}(t)\Sigma_j[z^j](t) + \sum_{j=1}^s \gamma_{ij}(t)u^j(t) + \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}(t)\Theta^j(t), \quad t \in \Pi, \quad i = \overline{1,m},$$

где $\Sigma_j[y](t) \equiv \int\limits_{l_j[a_j(t),t]} y(\cdot)\,dl$, $t \in \Pi$, $j = \overline{1,m}$. Или, в более компактной форме,

$$z(t) = \alpha(t)\Sigma[z](t) + \gamma(t)u(t) + \alpha(t)\Theta(t), \quad t \in \Pi, \tag{33}$$

где $\Sigma[z](t) \equiv \mathrm{col}\,\{\Sigma_1[z^1](t), \ldots, \Sigma_m[z^m](t)\}$. Запишем и формулу (32) более компактно:

$$x(t) = \Theta(t) + \Sigma[z](t), \quad t \in \Pi. \tag{34}$$

Уравнение (33) есть уравнение вида (1), эквивалентное краевой задаче (30), (31). Здесь $A[z](t) \equiv \alpha(t)\Sigma[z](t)$, $z \in L_2^m$, $t \in \Pi$ (квазинильпотентность ЛОО $A : L_2^m \to L_2^m$ легко следует из признака [18, теорема 2]); $B[u](t) \equiv \gamma(t)u(t)$, $u \in L_2^s, t \in \Pi$; $c(t) \equiv \alpha(t)\Theta(t)$, $t \in \Pi$. Если $x(\cdot) \in W$ – решение задачи (30), (31) при некотором $u(\cdot) \in L_2^s$, то связанная с $x(\cdot)$ формулой (34) функция $z(\cdot) \in L_2^m$ есть решение уравнения (33) при том же $u(\cdot)$. И наоборот, если $z(\cdot) \in L_2^m$ есть решение уравнения (33) при данном $u(\cdot) \in L_2^s$, то функция $x(\cdot)$, связанная с $z(\cdot)$ формулой (34), есть решение задачи (30), (31) при этом $u(\cdot)$. Отвечающие управлению $u(\cdot) \in L_2^s$ решения задачи (30), (31) и уравнения (33) обозначим x_u и z_u соответственно.

Пусть заданы выпуклые функции $G_0(y) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $G_i(y, w) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,k}$; функции $P(\cdot) \in L_\infty^{l\times m}[0,1]$, $\pi(\cdot) \in L_2^l[0,1]$, $Q(\,\cdot\,,\cdot) \in L_2^{q\times s}(\Pi \times \Pi)$, $\nu(\cdot) \in L_2^q(\Pi)$. Формулами

$$F_0[x,u] \equiv G_0\biggl(\int\limits_\Pi x(t)\,dt\biggr) + \|u\|_{2,s}^2, \quad F_i[x,u] \equiv G_i\biggl(\int\limits_\Pi x(t)\,dt, \int\limits_\Pi u(t)\,dt\biggr)$$

при $i = \overline{1,k}$ для $x \in W$, $u \in L_2^s$ определены функционалы. Пусть $\mathcal{D}$ – выпуклое ограниченное и замкнутое множество пространства L_2^s. Рассмотрим задачу оптимального управления системой (30), (31) с минимизируемым функционалом цели $F_0[x,u]$ при ограничениях

$$P(t^2)x(1,t^2) = \pi(t^2) \quad (t^2 \in [0,1]), \quad \int\limits_\Pi Q(t,\zeta)u(\zeta)\,d\zeta = \nu(t) \quad (t \in \Pi),$$

$$F_i[x,u] \leqslant 0 \quad (i = \overline{1,k}) \tag{35}$$

и множестве допустимых управлений $\mathcal{D}$ (при $G_0 \equiv 0$ задача является обратной задачей финального наблюдения, см., например, [2]). Эту задачу символически запишем в виде

$$F_0[x_u,u] \to \min, \quad P(t^2)x_u(1,t^2) = \pi(t^2) \quad (t^2 \in [0,1]),$$

$$\int\limits_\Pi Q(t,\zeta)u(\zeta)\,d\zeta = \nu(t) \quad (t \in \Pi), \quad F_i[x_u,u] \leqslant 0 \quad (i = \overline{1,k}), \quad u \in \mathcal{D}. \tag{36}$$

Сделав в задаче (36) замену (34), получим эквивалентную задачу оптимизации управляемой системы (33). При этом минимизируемый функционал принимает вид

$$W_0[z_u,u] \equiv F_0[\Theta + \Sigma[z_u],u], \quad u \in L_2^s,$$

а ограничения (35) преобразуются в ограничения

$$\mathcal{P}[z](t^2) = \pi(t^2) - P(t^2)\Theta(1,t^2) \quad (t^2 \in [0,1]), \quad \mathcal{Q}[u](t) = \nu(t) \quad (t \in \Pi), \quad W_i[z,u] \leqslant 0 \quad (i = \overline{1,k}),$$

где

$$\mathcal{P}[z](t^2) \equiv P(t^2)\Sigma[z](1,t^2) \quad (z \in L_2^m, \ \ t^2 \in [0,1]), \quad \mathcal{Q}[u](t) \equiv \int\limits_\Pi Q(t,\zeta)u(\zeta)\,d\zeta \quad (u \in L_2^s, \ \ t \in \Pi),$$

$$W_i[z,u] \equiv F_i[\Theta + \Sigma[z],u] \quad (z \in L_2^m, \ \ u \in L_2^s, \ \ i = \overline{1,k}).$$

Полученная задача оптимизации управляемой системы (33), эквивалентная задаче (36), это задача вида (3), здесь

$$J_i[u] \equiv \mathcal{J}_i[z_u,u] \equiv W_i[z_u,u] \quad (i = \overline{0,k}), \quad K[z] \equiv G_0\biggl(\int\limits_\Pi (\Theta(t) + \Sigma[z](t))\,dt\biggr),$$

$$M[u] \equiv \|u\|_{2,s}^2, \quad H \equiv L_2^l[0,1] \times L_2^q(\Pi), \quad \mathcal{A}[z](t) \equiv \operatorname{col}\{\mathcal{P}[z](t^2), 0_q\} \quad (z \in L_2^m, \quad t \in \Pi),$$

$$\mathcal{B}[u](t) \equiv \operatorname{col}\{0_l, \mathcal{Q}[u](t)\} \quad (u \in L_2^s, \quad t \in \Pi), \quad \mathcal{C} \equiv \operatorname{col}\{\pi(t^2) - P(t^2)\Theta(1,t^2), \nu(t)\} \quad (t \in \Pi).$$

Пусть $\mathsf{f} \equiv \{\alpha, \gamma, \theta_1, \theta_2, P, \pi, Q, \nu, G_i (i = \overline{0,k})\}$ – входные данные задачи (36), которые подвергаются возмущению, и точный набор $\mathsf{f}^0 \equiv \{\alpha^0, \gamma^0, \theta_1^0, \theta_2^0, P^0, \pi^0, Q^0, \nu^0, G_i^0 (i = \overline{0,k})\}$ нам не известен, но можно оперировать с приближёнными наборами

$$\mathsf{f}^\delta \equiv \{\alpha^\delta, \gamma^\delta, \theta_1^\delta, \theta_2^\delta, P^\delta, \pi^\delta, Q^\delta, \nu^\delta, G_i^\delta (i = \overline{0,k})\} \quad (\delta \in (0, \delta_0])$$

($\delta_0 > 0$ фиксировано), которые связаны с набором f^0 следующими условиями:

Г$_1$) Функции $G_0^\delta(y) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $G_i^\delta(y,w) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,k})$ выпуклы при любом $\delta \in [0, \delta_0]$ и равномерно по $\delta \in [0, \delta_0]$ липшицевы на любом ограниченном множестве *.

Г$_2$) Существует постоянная $\mathbf{C} > 0$ такая, что величины $\|\alpha^\delta - \alpha^0\|_{\infty, m\times m}$, $\|\gamma^\delta - \gamma^0\|_{\infty, m\times s}$, $\|\theta_i^\delta - \theta_i^0\|_{L_2^m[0,1]}$ $(i = \overline{1,m})$, $\|P^\delta - P^0\|_{L_\infty^{l\times m}[0,1]}$, $\|\pi^\delta - \pi^0\|_{L_2^l[0,1]}$, $\|Q^\delta - Q^0\|_{2,q\times s}$, $\|\nu^\delta - \nu^0\|_{2,q}$ при любом $\delta \in (0, \delta_0]$ не превосходят величины $\mathbf{C}\delta$.

Г$_3$) Существует неубывающая функция $\mathbf{N}_1(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что каковы бы ни были $l > 0$ и $\delta \in (0, \delta_0]$ величины $|G_0^\delta(y) - G_0^0(y)|$, $|G_i^\delta(y,w) - G_i^0(y,w)|$ $(i = \overline{1,k})$ при $\|y\|_m, \|w\|_s \leqslant l$ не превосходят величины $\mathbf{N}_1(l)\delta$.

При любом $\delta \in [0, \delta_0]$ имеем управляемую краевую задачу

$$\frac{\partial x^i}{\partial t^1} + \xi^i \frac{\partial x^i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}^\delta(t) x^j(t) + \sum_{j=1}^s \gamma_{ij}^\delta(t) u^j(t), \quad t \in \Pi, \quad i = \overline{1,m}, \tag{37}$$

$$x(t^1, 0) = \theta_1^\delta(t^1), \quad 0 \leqslant t^1 \leqslant 1, \quad x(0, t^2) = \theta_2^\delta(t^2), \quad 0 \leqslant t^2 \leqslant 1, \tag{38}$$

минимизируемый функционал $F_0^\delta[x,u] \equiv G_0^\delta(\int_\Pi x(t)\,dt) + \|u\|_{2,s}^2$, набор ограничений

$$P^\delta(t^2) x(1, t^2) = \pi^\delta(t^2) \quad (t^2 \in [0,1]), \quad \int\limits_\Pi Q^\delta(t,\zeta) u(\zeta)\,d\zeta = \nu^\delta(t) \quad (t \in \Pi),$$

$$F_i^\delta[x,u] \leqslant 0 \quad (i = \overline{1,k}), \tag{39}$$

где $F_i^\delta[x,u] \equiv G_i^\delta(\int_\Pi x(t)\,dt, \int_\Pi u(t)\,dt)$ $(i = \overline{1,k})$, и задачу оптимального управления

$$F_0^\delta[x_u^\delta, u] \to \min, \quad P^\delta(t^2) x_u^\delta(1, t^2) = \pi^\delta(t^2) \quad (t^2 \in [0,1]),$$

$$\int\limits_\Pi Q^\delta(t,\zeta) u(\zeta)\,d\zeta = \nu^\delta(t) \quad (t \in \Pi), \quad F_i^\delta[x_u^\delta, u] \leqslant 0 \quad (i = \overline{1,k}), \quad u \in \mathcal{D}, \tag{40}$$

где $x_u^\delta(\cdot)$ – отвечающее управлению $u(\cdot)$ решение граничной задачи (37), (38).

Положим $\Theta^{\delta i}(t) \equiv \{\theta_2^{\delta i}(a_i^2(t)), t^2 \geqslant \xi^i t^1; \theta_1^{\delta i}(a_i^1(t)), t^2 < \xi^i t^1\}$, $t \in \Pi$, $i = \overline{1,m}$. Сделав в задаче (40) замену $x(t) = \Theta^\delta(t) + \Sigma[z](t)$, $\Theta^\delta(t) \equiv \operatorname{col}\{\Theta^{\delta 1}(t), \ldots, \Theta^{\delta m}(t)\}$, $t \in \Pi$, получим эквивалентную задачу оптимизации управляемой системы

$$z(t) = \alpha^\delta(t)\Sigma[z](t) + \gamma^\delta(t)u(t) + \alpha^\delta(t)\Theta^\delta(t), \quad t \in \Pi. \tag{41}$$

При этом ограничения (39) преобразуются в ограничения

$$\mathcal{P}^\delta[z](t^2) = \pi^\delta(t^2) - P^\delta(t^2)\Theta^\delta(1, t^2) \quad (t^2 \in [0,1]), \quad \mathcal{Q}^\delta[u](t) = \nu^\delta(t) \quad (t \in \Pi),$$

*Условие Г$_1$ выполняется, в частности, если при каждом $i = \overline{0,k}$ функции G_i^δ $(\delta \in [0, \delta_0])$ выпуклы и равномерно по $\delta \in [0, \delta_0]$ ограничены на любом ограниченном множестве (см., например, [23, теорема 8.2]).

$$W_i^\delta[z,u] \leqslant 0 \quad (i=\overline{1,k}),$$

где $\mathcal{P}^\delta[z](t^2) \equiv P^\delta(t^2)\Sigma[z](1,t^2)$ $(z \in L_2^m,\ t^2 \in [0,1])$, $\mathcal{Q}^\delta[u](t) \equiv \int_\Pi Q^\delta(t,\zeta)u(\zeta)\,d\zeta$ $(u \in L_2^s,$ $t \in \Pi)$, $W_i^\delta[z,u] \equiv F_i^\delta[\Theta^\delta + \Sigma[z],u]$ $(z \in L_2^m,\ u \in L_2^s,\ i=\overline{1,k})$. Эту задачу оптимизации системы (41) запишем в виде (z_u^δ – решение уравнения (41), отвечающее управлению u)

$$W_0^\delta[z_u^\delta,u] \to \min, \quad \mathcal{P}^\delta[z_u^\delta](t^2) = \pi^\delta(t^2) - P^\delta(t^2)\Theta^\delta(1,t^2) \quad (t^2 \in [0,1]),$$

$$\mathcal{Q}^\delta[u](t) = \nu^\delta(t) \quad (t \in \Pi), \quad W_i^\delta[z_u^\delta,u] \leqslant 0 \quad (i=\overline{1,k}), \quad u \in \mathcal{D}, \tag{42}$$

где $W_0^\delta[z,u] \equiv F_0^\delta[\Theta^\delta + \Sigma[z],u]$. Приняв $A^\delta[z](t) \equiv \alpha^\delta(t)\Sigma[z](t)$, $t \in \Pi$, $z \in L_2^m$; $B^\delta[u](t) \equiv$ $\equiv \gamma^\delta(t)u(t)$, $t \in \Pi$, $u \in L_2^s$; $c^\delta(t) \equiv \alpha^\delta(t)\Theta^\delta(t)$, $t \in \Pi$, записываем (41) в форме (4).

Таким образом, задача (42) имеет вид (OC^δ), здесь

$$J_i^\delta[u] \equiv \mathcal{J}_i^\delta[z_u^\delta,u] \equiv W_i^\delta[z_u^\delta,u] \quad (i=\overline{0,k}), \quad K^\delta[z] \equiv G_0^\delta\biggl(\int\limits_\Pi (\Theta^\delta(t) + \Sigma[z](t))\,dt\biggr),$$

$$M^\delta \equiv M, \quad H \equiv L_2^l[0,1] \times L_2^q, \quad \mathcal{A}^\delta[z](t) \equiv \operatorname{col}\{\mathcal{P}^\delta[z](t^2), 0_q\} \quad (z \in L_2^m,\ t \in \Pi),$$

$$\mathcal{B}^\delta[u](t) \equiv \operatorname{col}\{0_l, \mathcal{Q}^\delta[u](t)\} \quad (u \in L_2^s,\ t \in \Pi), \quad \mathcal{C}^\delta \equiv \operatorname{col}\{\pi^\delta(t^2) - P^\delta(t^2)\Theta^\delta(1,t^2), \nu^\delta(t)\} \quad (t \in \Pi).$$

При сделанных относительно семейства задач (40), $\delta \in [0,\delta_0]$, предположениях семейство задач (42), $\delta \in [0,\delta_0]$, обладает свойствами Л), A_1), A_2), A_3). Действительно, свойство Л) – прямое следствие предположений $\Gamma_1)-\Gamma_3)$, а неравенства A_1) получаются элементарными выкладками из Γ_2). Чтобы доказать A_2), оценим величину

$$|J_i^\delta[z,u] - J_i^0[z,u]| \equiv |W_i^\delta[z,u] - W_i^0[z,u]|$$

при произвольных $u \in \mathcal{D}$, $l > 0$ и $z \in L_2^m$ таких, что $\|z\|_{2,m} \leqslant l$, для $i \in \{1,2,\ldots,k\}$, $\delta \in (0,\delta_0]$. Она не превосходит суммы

$$|F_i^\delta[\Theta^\delta + \Sigma[z],u] - F_i^0[\Theta^\delta + \Sigma[z],u]| + |F_i^0[\Theta^\delta + \Sigma[z],u] - F_i^0[\Theta + \Sigma[z],u]|. \tag{43}$$

Вследствие Γ_2) справедлива оценка

$$\biggl\|\int\limits_\Pi (\Theta^\delta + \Sigma[z])dt\biggr\|_m \leqslant \varrho\cdot(2\mathbf{C}\delta_0 + \|\theta_1^0\|_{L_2^m[0,1]} + \|\theta_2^0\|_{L_2^m[0,1]}) + l\cdot\|\Sigma\|, \tag{44}$$

где $\|\Sigma\|$ – норма ЛОО $\Sigma : L_2^m \to L_2^m$, $\varrho \equiv \varrho(\xi^1,\ldots,\xi^m)$ – постоянная, зависящая от чисел $\xi^i (i=\overline{1,m})$. Из (44) и Γ_3) следует, что первое слагаемое в (43) не превосходит величины $\delta\cdot\mathbf{N}_1(\max\{\sigma, \max\limits_{u\in\mathcal{D}}\|u\|_{2,s}\})$, где $\sigma \equiv \sigma(\xi_1,\ldots,\xi_m,\mathbf{C},\delta_0,\theta_1^0,\theta_2^0,l)$ – правая часть (44). Так как функция G_i^0 липшицева на любом ограниченном множестве, то существует неубывающая функция $\mu(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такая, что выполняется неравенство

$$|G_i^0(y_1,w_1) - G_i^0(y_2,w_2)| \leqslant \mu(\mathbf{l})(\|y_1 - y_2\|_m + \|w_1 - w_2\|_s),$$

если $\|y_1\|_m \leqslant \mathbf{l}$, $\|y_2\|_m \leqslant \mathbf{l}$, $\|w_1\|_s \leqslant \mathbf{l}$, $\|w_2\|_s \leqslant \mathbf{l}$ $(i=\overline{1,k})$. Ввиду (44) второе слагаемое правой части (43) не больше произведения $\mu(\max\{\sigma, \max\limits_{u\in\mathcal{D}}\|u\|_{2,s}\})\cdot\|\int_\Pi(\Theta^\delta - \Theta^0)\,dt\|_m$, второй сомножитель которого не превосходит числа $2\mathbf{C}\delta\cdot\varrho(\xi^1,\ldots,\xi^m)$. Таким образом, неравенства условия A_2) для функционалов $\mathcal{J}_1^\delta$, $\ldots$, $\mathcal{J}_k^\delta$, $0 < \delta \leqslant \delta_0$, выполняются с функцией

$$N_1(l) \equiv 2\mathbf{C}\cdot\varrho(\xi^1,\ldots,\xi^m)\cdot\mu(\max\{\sigma(\xi_1,\ldots,\xi_m,\mathbf{C},\delta_0,\theta_1^0,\theta_2^0,l),l\}), \quad l > 0.$$

Аналогичные выкладки можно провести и для K^δ, $0 < \delta \leqslant \delta_0$. Выполнение условия A_3) легко проверить, пользуясь цепочечным признаком равностепенной квазинильпотентности [21, теорема 2].

Предположив дополнительно, что функции G_i^δ, $i = \overline{0,k}$, $0 < \delta \leqslant \delta_0$, непрерывно дифференцируемы, можем выписать для данного примера критерий решения задачи (19). Сопряжённый к оператору $\Sigma : L_2^m \to L_2^m$ оператор $\Sigma^* : L_2^m \to L_2^m$ имеет вид

$$\Sigma^*[z] \equiv \mathrm{col}\,\{\Sigma_1^*[z^1], \ldots, \Sigma_m^*[z^m]\},$$

где

$$\Sigma_j^*[y](t) \equiv \int\limits_{l_j[t,b_j(t)]} y(\cdot)\, dl, \quad t \in \Pi, \quad j = \overline{1,m}.$$

Положим $\varkappa_\delta(\bar u) \equiv \int_\Pi x_{\bar u}^\delta(\zeta)\, d\zeta$, $\varkappa(\bar u) \equiv \int_\Pi \bar u(\zeta)\, d\zeta$. Непосредственным вычислением получим

$$\Phi^\delta[\bar u](t) \equiv \Sigma^*[\{G_0^{\delta\prime}(\varkappa_\delta(\bar u))\}^*](t), \quad \Upsilon^\delta[\bar u](t) \equiv 2\bar u(t),$$

$$\Omega_i^\delta[\bar u](t) \equiv \Sigma^*[\{G_{iy}^{\delta}{}'(\varkappa_\delta(\bar u), \varkappa(\bar u))\}^*](t) \quad (i = \overline{1,k}),$$

$$\Xi_i^\delta[\bar u](t) \equiv \{G_{iw}^{\delta}{}'(\varkappa_\delta(\bar u), \varkappa(\bar u))\}^* \quad (i = \overline{1,k}), \quad t \in \Pi.$$

Приняв для $\lambda \in H \equiv L_2^l[0,1] \times L_2^q$ двухкомпонентное обозначение $\lambda \equiv \mathrm{col}\,\{\omega, \varpi\}$, $\omega \in L_2^l[0,1]$, $\varpi \in L_2^q$, находим

$$(\mathcal{A}^\delta)^*[\lambda](t) = \{\chi_{[(1/\xi^i)(t^2+\xi^i-1),1]}(t^1)\mathcal{M}_i[(P^\delta(\cdot))^*\omega(\cdot)](t)\}_{i=1}^m \quad (\lambda \in H, \quad t \in \Pi),$$

$$(\mathcal{B}^\delta)^*[\lambda](t) = \int\limits_\Pi (Q^\delta(\zeta,t))^*\varpi(\zeta)\, d\zeta \quad (\lambda \in H, \quad t \in \Pi),$$

где $\mathcal{M}_i[y]$ – оператор преобразования функции (одной переменной) $y(\cdot)$ в функцию (двух переменных)

$$\mathcal{M}_i[y](t) \equiv y(t^2 - \xi^i(t^1 - 1)), \quad t \in \Pi, \quad i = \overline{1,m}.$$

Уравнение (26) имеет вид

$$\psi(t) - \Sigma^*[\alpha^{\delta *}\psi](t) = -\Sigma^*\left[\left\{G_0^{\delta\prime}(\varkappa_\delta(\bar u)) + \sum_{j=1}^k \mu_j G_{jy}^{\delta}{}'(\varkappa_\delta(\bar u), \varkappa(\bar u))\right\}^*\right](t) - (\mathcal{A}^\delta)^*[\lambda](t), \quad t \in \Pi,$$

его решение принадлежит классу W. Это уравнение эквивалентно краевой задаче

$$\frac{\partial \psi^i}{\partial t^1} + \xi^i \frac{\partial \psi^i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^m \alpha_{ji}^\delta(t)\psi^j(t) + G_{0y^i}^{\delta}{}'(\varkappa_\delta(\bar u)) + \sum_{j=1}^k \mu_j G_{jy^i}^{\delta}{}'(\varkappa_\delta(\bar u), \varkappa(\bar u)), \quad t \in \Pi, \quad i = \overline{1,m};$$

$$\psi(t^1, 1) = 0_m, \quad 0 \leqslant t^1 \leqslant 1; \quad \psi(1, t^2) = -(P^\delta(t^2))^*\omega(t^2), \quad 0 \leqslant t^2 \leqslant 1,$$

основные уравнения которой получаются из него дифференцированием вдоль характеристик, краевые условия – соответствующими подстановками независимых переменных.

Заключение. Предложен регуляризованный принцип Лагранжа в итерационной форме в выпуклой задаче оптимального управления с операторными ограничениями для управляемой системы, задаваемой линейным функционально-операторным уравнением второго рода общего вида в пространстве L_2^m, основной оператор правой части уравнения предполагается квазинильпотентным.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 20-01-00199_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сумин М.И.* Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2011. Т. 51. № 9. С. 1594–1615.
2. *Сумин М.И.* Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 279–296.
3. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М., 1979.
4. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М., 1986.
5. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации: в 2-х кн. М., 2011.
6. *Сумин М.И.* Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2007. Т. 47. № 4. С. 602–625.
7. *Сумин М.И.* Регуляризация принципа максимума Понтрягина в выпуклой задаче оптимального граничного управления для параболического уравнения с операторным ограничением-равенством // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27. № 2. С. 221–237.
8. *Бакушинский А.Б.* Методы решения монотонных вариационных неравенств, основанные на принципе итеративной регуляризации // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1977. Т. 17. № 6. С. 1350–1362.
9. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Итеративные методы решения некорректных задач. М., 1989.
10. *Сумин В.И., Сумин М.И.* Регуляризованные классические условия оптимальности в итерационной форме для выпуклых задач оптимизации распределённых систем вольтеррова типа // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2021. Т. 31. Вып. 2. С. 265–284.
11. *Сумин В.И., Сумин М.И.* Регуляризация классических условий оптимальности в задачах оптимального управления линейными распределёнными системами вольтеррова типа // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2022. Т. 62. № 1. С. 45–70.
12. *Аваков Е.Р., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* О принципе Лагранжа в задачах на экстремум при наличии ограничений // Успехи мат. наук. 2013. Т. 68. Вып. 3(411). С. 5–38.
13. *Сумин М.И.* Недифференциальные теоремы Куна–Таккера в задачах на условный экстремум и субдифференциалы негладкого анализа // Вестн. рос. ун-тов. Математика. 2020. Т. 25. Вып. 131. С. 307–330.
14. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М., 1980.
15. *Сумин М.И.* О регуляризации классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимального управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26. № 2. С. 252–269.
16. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М., 1977.
17. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и её приложения. М., 1967.
18. *Сумин В.И.* Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределёнными системами // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305. № 5. С. 1056–1059.
19. *Сумин В.И., Чернов А.В.* Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 10. С. 1402–1411.
20. *Сумин В.И.* Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределёнными системами. Нижний Новгород, 1992.
21. *Сумин В.И.* Управляемые вольтерровы функциональные уравнения и принцип сжимающих отображений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 262–278.
22. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М., 1974.
23. *Дмитрук А.В.* Выпуклый анализ. Элементарный вводный курс: учеб. пособие. М., 2012.

Тамбовский государственный университет
имени Г.Р. Державина
Нижегородский государственный университет
имени Н.И. Лобачевского

Поступила в редакцию 27.12.2021 г.
После доработки 27.12.2021 г.
Принята к публикации 25.05.2022 г.