

УДК 519.622

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЗАДАЧ КОШИ, РЕШЕНИЕ КОТОРЫХ ИМЕЕТ ПОЛЮСЫ ЦЕЛОГО ПОРЯДКА НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

© 2022 г. А. А. Белов, Н. Н. Калиткин

Предложен эффективный метод решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с кратными полюсами целого порядка, который позволяет проводить сквозной расчёт через полюс как для единичного полюса, так и в случае цепочки полюсов. В методе используется специальный алгоритм нахождения кратности каждого полюса. По этой кратности определяется обобщённая инверсная функция, для которой K -кратный полюс исходной функции является простым нулём. Расчёт такого нуля не представляет трудности, поэтому предложенный метод позволяет получать высокую точность даже вблизи полюсов. После прохождения этого нуля возобновляется расчёт исходной функции. Применение данного метода на последовательности полюсов даёт возможность найти численное решение одновременно с апостериорной оценкой его погрешности. Метод проиллюстрирован на тестовых примерах.

DOI: 10.31857/S0374064122060085, EDN: CDFTQQ

Введение. Существует немало задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которых имеют особые точки. Эти особые точки могут быть полюсами, в том числе кратными. Кроме того, при численном расчёте серьёзную проблему представляют точки, в которых обращается в нуль первая производная или одновременно несколько последовательных производных, начиная с первой. Столь же проблематичны точки, в которых сама функция конечна, но обращается в бесконечность её первая производная и, возможно, несколько последующих. Подавляющее большинство таких задач являются нелинейными. Много подобных задач возникает в квантовой механике. Другими примерами являются гамма-функция, эллиптические интегралы и др. В таких решениях особые точки оказываются, как правило, не единственными, а образуют последовательности.

Такие задачи, за редкими исключениями, не решаются в элементарных функциях. Решения многих задач являются специальными функциями математической физики. Для практического применения они требуют тщательного исследования их свойств, но даже в этом случае решение редко удаётся довести до числа. Положение усугубляется тем, что каждый узкий класс задач требует введения своей специальной функции. Это большое поле деятельности для математиков, однако практический выход для решения прикладных задач оказывается зачастую недостаточным. Поэтому необходима разработка универсальных численных методов, позволяющих единообразно решать задачи Коши с самыми разными типами особенностей. Численные методы должны находить не только приближённое решение, но и одновременно конструктивную оценку его погрешности. При этом желательно иметь не мажорантные интервальные оценки (которые могут быть сильно завышенными), а асимптотически точные.

Данная работа посвящена построению таких методов. Для простейших случаев (например, для полюсов кратности $K = 1$) предложен метод инверсной функции. Для полюсов целого порядка $K \geq 1$ разработан алгоритм, который для каждого полюса определяет его кратность, и строится обобщённая инверсная функция, ориентированная на прохождение данного полюса. В обоих случаях решение продолжается за полюс. Это позволяет вычислить решение, содержащее цепочку полюсов с произвольными целыми кратностями.

Эти методы позволяют не только находить решение, но и оценивать погрешность решения. Для этого расчёты проводятся на последовательности равномерных сеток, сгущающихся вдвое. К решениям на каждой паре соседних сеток применяется метод Ричардсона, дающий асимптотически точное значение погрешности.

1. Задачи с разрушением решения. Задачи с полюсами можно разделить на две категории.

1.1. Решение с единственной сингулярностью. Первая категория включает задачи для уравнений в частных производных и обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающие реальные физические процессы. Примерами являются различные режимы горения термоядерных мишеней, процессы пробоя в полупроводниках, задачи нелинейной лазерной оптики и акустики, гравитационный коллапс и др. В некоторый момент времени в решении возникает сингулярность. В ряде случаев (например, если сингулярность является полюсом целого порядка) возможно формально-математическое продолжение решения за полюс. Однако это не имеет практического смысла, поскольку с физической точки зрения в момент сингулярности исходное уравнение перестаёт описывать физическое явление. Поэтому в задачах данного типа ставится вопрос о расчёте решения вплоть до ближайшей сингулярности и численном исследовании последней. В литературе рассмотрены многие подобные задачи. Наиболее хорошо изучены задачи, сводящиеся к параболическому уравнению с нелинейной правой частью и в некоторых случаях – с нелинейным пространственным оператором (см., например, [1]).

Для расчёта таких задач обычно используют разностные схемы. Однако вблизи сингулярности решение разностных уравнений быстро теряет точность. Чтобы преодолеть эту трудность, предлагались разные подходы, основанные на адаптивном сетке к решению по мере приближения к сингулярности. Примерами таких подходов являются метод масштабирования [2], метод движущихся сеток [3], выбор очередного шага по времени по норме численного решения на текущем временном слое [4] и ряд других. Отметим также работы [5, 6], в которых для некоторых конкретных задач было найдено преобразование, которое переводит решение в несингулярное.

Наиболее универсальным является подход, основанный на методе сгущения сеток. Он применим как к системам обыкновенных дифференциальных уравнений, так и к уравнениям в частных производных. Подробная методология такого подхода изложена в монографии [7]. Вкратце приведём её.

Пусть исходная задача описывается нестационарным уравнением в частных производных. Вводится пространственная сетка, а пространственные операторы заменяются разностными соотношениями. Тогда задача сводится к задаче Коши для системы большого числа обыкновенных дифференциальных уравнений. Интегрирование такой системы по времени проводится с помощью некоторой независимой схемы, не связанной с пространственной схемой.

Неограниченное нарастание численного решения такой системы при приближении к некоторому моменту времени трактуется как сингулярность численного решения. Для расчёта положения сингулярности используются специальные процедуры (см. работы [8–10]). Затем одновременно проводится сгущение шагов по пространству и времени. Число обыкновенных дифференциальных уравнений при этом соответственно увеличивается. Снова проводится численный расчёт и определяется его момент сингулярности. Такое сгущение сеток проводится столько раз, сколько позволяют вычислительные мощности.

Последовательность полученных решений и моментов их сингулярностей, согласно теоремам Рябенского–Филиппова, стремится к точному решению и его моменту разрушения. Этот метод позволил единообразно решить ряд различных задач. Дальнейшее усовершенствование метода предполагает переход от временной переменной t к длине дуги интегральной кривой l в многомерном пространстве [11, 12]. Это позволяет ещё повысить надёжность метода, рассчитывать момент разрушения с хорошей точностью и во многих случаях определять его тип.

Метод сгущения сеток имеет строгое теоретическое обоснование в работах Л.Ф. Ричардсона [13], В.С. Рябенского и А.Ф. Филиппова [14], П. Лакса [15]. Поскольку данный метод важен для дальнейшего изложения, кратко напомним смысл этих работ.

Л.Ф. Ричардсон (см. [13]) обратил внимание, что погрешность вычисления квадратур обычно имеет вид Ch^p , где h – шаг сетки, p – порядок точности разностной формулы. Поэтому если сгущать сетку в q раз и сравнивать численные расчёты на двух сетках, то по разности этих расчётов нетрудно вычислить асимптотически точную оценку погрешности расчёта на каждой сетке. Позднее этот метод применялся рядом исследователей к решению дифферен-

циальных уравнений (там обычно удобно брать $q = 2$ для поточечного сравнения решений на соседних сетках).

В книге [14] для разностных схем сформулированы четыре фундаментальные теоремы. Для упрощения приведём их наглядные, но нестрогие формулировки.

Теорема. *Из аппроксимации и устойчивости следует сходимость.*

Эта теорема доказана для произвольных нелинейных схем.

Теорема. *Для линейных разностных схем порядок сходимости равен порядку аппроксимации.*

Теорема. *Для линейных задач с достаточно гладкими решениями применим метод Рунге-Кутты.*

Теорема. *Пусть разностная схема устойчива и аппроксимирует исходную задачу, а при сгущении сеток численное решение сходится к предельной функции. Тогда точная задача имеет решение, которым является данная предельная функция.*

К аналогичным выводам пришел П. Лакс [15]. По-видимому, только совокупность описанных теорем позволяет строить методы, в которых одновременно вычисляются решение и его асимптотически точная величина погрешности.

1.2. Решение с цепочкой сингулярностей. Существует вторая категория задач, которые не описывают реальный физический процесс, а являются вспомогательными математическими проблемами. Примерами являются уравнения специальных функций (гипергеометрическая функция, эллиптические функции, цилиндрические функции, гамма-функция и т.д.). Решение таких задач может иметь множественные сингулярности. Эти функции широко используются в математической физике, причём в конкретных приложениях требуются значения специальной функции не только до ближайшего полюса, но и между парой соседних полюсов. Поэтому в таких задачах требуется не только рассчитать решение вплоть до ближайшей сингулярности, но и продолжить решение за неё и рассчитать последующие сингулярности.

Для составления таблиц специальных функций [16] и для стандартных программ прямого расчёта [17] широко применяют численные методы. Стандартные схемы (например, схемы Рунге-Кутты) позволяют рассчитать гладкие участки решения с хорошей точностью. Однако вблизи сингулярности ошибка таких схем катастрофически нарастает. Прямое продолжение решения за полюс, как правило, невозможно. Поэтому решение продолжается за полюс какими-то искусственными приёмами. Прохождение ряда полюсов представляет ещё большую проблему и требует разработки специальных процедур. Насколько известно, универсальные численные методы, единообразно решающие широкие классы таких задач, отсутствуют. Настоящая работа посвящена построению общих методов решения подобных задач.

2. Расчёт задач с сингулярностями.

2.1. Продолжение за полюс. Решения задач Коши с сингулярностями выходят за рамки известных теорем о разрешимости. Сначала определим, что понимается под продолжением решения за полюс. Для наглядности рассмотрим задачу Коши для одного автономного обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ)

$$du/dt = f(u), \quad t > 0; \quad u(0) = u_0. \quad (2.1)$$

Случай систем рассматривается аналогично. Неавтономные задачи сводятся к системе ОДУ с помощью процедур автономизации.

Пусть решение (2.1) имеет произвольное число изолированных особых точек на вещественной оси. Будем считать, что функция $u(t)$ аналитична в некоторых проколотых окрестностях этих точек. Тогда можно использовать классическую классификацию особых точек по Пенлеве [18]. Напомним, что особая точка t_* называется полюсом, если при обходе вокруг этой точки значение $u(t)$ не меняется и решение представимо рядом Пуизе (см. работы [19, 20]):

$$u(t) = a_{-m}(t - t_*)^{-m} + \dots + a_{-1}(t - t_*)^{-1} + a_0 + \dots$$

В остальной части комплексной плоскости t будем предполагать, что решение имеет столько непрерывных производных, сколько требуется для конкретной схемы интегрирования ОДУ.

В реальных задачах положение полюсов неизвестно априори. Точку ближайшего полюса обозначим через $t = t_*$.

Перейдём к комплексным значениям аргумента t . Тогда полюс на вещественной оси можно обойти по контуру на комплексной плоскости и, вернувшись на вещественную ось, продолжить решение. При этом не возникает никаких особенностей. Такой подход позволяет продолжить решение через любое число полюсов. Однако на практике такой подход неконструктивен, так как требует существенно более трудоемкого численного интегрирования в комплексной плоскости.

Правее точки $t = t_*$ формально существует бесконечно много точных решений дифференциального уравнения (2.1). Какое из них соответствует начальному условию u_0 ? При сделанных предположениях относительно точного решения применима классическая процедура аналитического продолжения. Наличие полюса первого порядка в точке t_* означает, что точное решение разлагается в этой точке в следующий ряд Пуизе с остаточным членом в форме Пеано:

$$u = \frac{a_{-1}}{t - t_*} + \sum_{p=0}^{P+1} a_p (t - t_*)^p + o((t - t_*)^{P+1}). \quad (2.2)$$

Коэффициенты a_p этого ряда зависят от начального условия u_0 . Ряд (2.2) справедлив в проколоте круге, радиус которого определяется положением ближайшей сингулярности либо точки, в которой нарушается гладкость решения. Поэтому при $t > t_*$ он выбирает то же самое решение дифференциального уравнения (2.1), что и при $t < t_*$. Именно оно соответствует начальному условию u_0 . Аналогично осуществляется продолжение решения за последующие полюсы.

Заметим, что описанная процедура продолжения применима к задачам, в которых решение имеет полюсы либо существенно особые точки (при этом предполагается, что все особые точки являются изолированными). В этом случае ряд (2.2) содержит только целые степени $(t - t_*)$. Если особая точка является точкой ветвления, то для продолжения нужно выбрать одну из ветвей. При этом ряд (2.2) будет содержать дробные степени.

2.2. Трудности. Напомним типичные трудности, встречающиеся при численном решении подобных задач. Рассмотрим любую явную схему. Пусть для упрощения шаг τ является постоянным. Формально численное решение существует на каждом шаге $t_n = N\tau$. Однако вблизи первого полюса значения $u(t_n)$ быстро нарастают и происходит переполнение. При использовании переменного шага τ_n , уменьшающегося в соответствии с ростом решения, описанная картина сохраняется.

Если взять неявную схему, то описанная картина сохраняется. Кроме того, возникает ещё одна трудность. Решение на новом шаге находится из нелинейного алгебраического уравнения. Для конечного временного шага τ_n это уравнение может не иметь вещественного решения. В обоих случаях расчёт положения полюса затруднён и продолжение решения по той же схеме невозможно.

3. Метод инверсной функции. Рассмотрим сначала задачу для одного ОДУ. Случай систем будет рассмотрен далее.

3.1. Инверсная функция. Введём инверсную функцию $v(t) = [u(t)]^{-1}$. Из (2.1) следует, что эта функция удовлетворяет уравнению

$$dv/dt = \varphi(v), \quad \varphi(v) = -v^2 f(v^{-1}). \quad (3.1)$$

Это уравнение будем называть инверсным. Все полюсы функции $u(t)$ становятся нулями функции $v(t)$ и, наоборот, нули функции $u(t)$ становятся полюсами функции $v(t)$.

Выберем точку $\tilde{t} \in (0, t_*)$ такую, что на отрезке $t \in (\tilde{t}, t_*)$ точное решение $u(t)$ сохраняет знак. Для уравнения (3.1) выберем начальное условие $v(\tilde{t}) = 1/u(\tilde{t})$. Инверсное уравнение с таким начальным условием будем называть инверсной задачей. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть решение $u(t)$ задачи (2.1) обращается в бесконечность в точке t_* , аналитично в проколоте окрестности этой точки и имеет $P+1$ непрерывную производную

вне указанной окрестности. Особая точка t_* является полюсом первого порядка тогда и только тогда, когда $f(u)/u^2$ имеет конечный ненулевой предел при $u \rightarrow \infty$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $u(t)$ – некоторое решение дифференциального уравнения в задаче (2.1), имеющее полюс первого порядка в точке t_* . Тогда функция $u(t)$ представима рядом Пуанкаре (2.2). Продифференцировав его, получим ряд Пуанкаре для сложной функции $f(u(t))$:

$$f(u(t)) = \frac{du}{dt} = -\frac{a_{-1}}{(t-t_*)^2} + \sum_{p=1}^{P+1} pa_p(t-t_*)^{p-1} + o((t-t_*)^P). \tag{3.2}$$

Найдём разложение в ряд Пуанкаре для отношения f/u^2 :

$$\frac{f(u(t))}{u(t)^2} = \sum_{p=0}^P b_p(t-t_*)^p + o((t-t_*)^P),$$

$$b_0 = -1/a_{-1}, \quad b_1 = 2a_0/a_{-1}^2, \quad b_2 = 3(a_1a_{-1} - a_0^2)/a_{-1}^3, \dots \tag{3.3}$$

Разложения (2.2), (3.2), (3.3) справедливы в некоторой малой окрестности точки t_* . Однако $t \rightarrow t_*$ как раз соответствует $u \rightarrow \infty$. Из (3.3) непосредственно видно, что в этом случае отношение $f/u^2 \rightarrow -1/a_{-1}$. Необходимость доказана.

Достаточность. Сделаем формальную замену неизвестной функции $u = 1/v$. Новая функция удовлетворяет инверсному уравнению (3.1), причём $\varphi(v) = -v^2f(v^{-1}) \rightarrow C \neq 0$. Это означает, что при любом $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что при достаточно малом $|v| < \delta$ выполнено неравенство

$$C - \varepsilon < |\varphi(v)| < C + \varepsilon. \tag{3.4}$$

Выберем ε так, что $|\varepsilon| < C$. Тогда величины $C + \varepsilon$ и $C - \varepsilon$ имеют одинаковый знак, следовательно, в указанной окрестности dv/dt остаётся знакоопределённой. Если функция $u(t)$ обращается в бесконечность в точке t_* , то в этой точке $v(t)$ обращается в нуль. Из неравенств (3.4) следует, что этот нуль может быть только простым. Тогда в точке t_* функция $u(t)$ имеет полюс первого порядка. Теорема доказана.

Замечание 1. В доказательстве необходимости коэффициенты ряда (2.2) могут быть произвольными. Иными словами, рассматривается не одна интегральная кривая, а семейство интегральных кривых, имеющих полюс в точке t_* . Это семейство интегральных кривых можно трактовать как окрестность точного решения задачи (2.1).

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $f(u)/u^2 \rightarrow C \neq 0$ при $u \rightarrow \infty$. Тогда найдётся такая окрестность особой точки t_* и окрестность начального условия u_0 , в которых решение $v(t)$ инверсной задачи существует, единственно и равномерно непрерывно зависит от начального условия u_0 .

Доказательство. 1. Из условий теоремы следует, что в указанной окрестности $\varphi(v)$ непрерывна и ограничена, причём $\varphi(v) \rightarrow -C$ при $v \rightarrow 0$. Тогда, согласно классическим теоремам [21], решение инверсной задачи $v(t)$ существует и единственно.

2. Покажем, что оно равномерно непрерывно зависит от начального условия u_0 . Расчёт исходной задачи ведётся до момента \tilde{t} , который является начальным для инверсной задачи. Согласно условиям на гладкость правой части f решение $u(t)$ на отрезке $(0, \tilde{t})$, и в частности его значение $u(\tilde{t})$, равномерно непрерывно зависит от u_0 .

Покажем, что φ_v непрерывна. Из условий теоремы следует, что решение $u(t)$ задачи (2.1) имеет полюс первого порядка на отрезке интегрирования. Рассмотрим семейство интегральных кривых, задаваемых рядом (2.2) с произвольными коэффициентами a_p , $-1 \leq p \leq P + 1$. Найдём соответствующее семейство интегральных кривых инверсного уравнения (3.1):

$$v(t) = \frac{1}{u(t)} = \sum_{p=1}^{P+1} c_p(t-t_*)^p + o((t-t_*)^{P+1}), \tag{3.5}$$

$$c_1 = 1/a_{-1}, \quad c_2 = -a_0/a_{-1}^2, \quad c_3 = (a_0^2 - a_1 a_{-1})/a_{-1}^3, \quad \dots \quad (3.6)$$

В силу произвольности коэффициентов a_i равенства (3.5), (3.6) задают не конкретное решение инверсной задачи, а некоторую его окрестность. Дифференцированием нетрудно найти

$$\varphi(v(t)) = \frac{dv}{dt} = \sum_{p=1}^P p c_p (t - t_*)^{p-1} + o((t - t_*)^P). \quad (3.7)$$

Вычислим φ_v из (3.5) и (3.7) как производную параметрической функции

$$\begin{aligned} \varphi_v(v(t)) &= \frac{\varphi_t(v(t))}{v_t(t)} = \left[\sum_{p=2}^{P-1} c_p p (p-1) (t - t_*)^{p-2} \right] \left[\sum_{p=2}^P c_p p (t - t_*)^{p-1} \right]^{-1} = \\ &= \sum_{p=0}^{P-1} d_p (t - t_*)^p + o((t - t_*)^{P-1}), \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$d_0 = -2a_0/a_1, \quad d_1 = 2(a_0^2 - 3a_1 a_{-1})/a_{-1}^2, \quad d_2 = 2(3a_0 a_1 a_{-1} - a_0^3 - 6a_2 a_{-1}^2)/a_{-1}^3, \quad \dots \quad (3.9)$$

В силу оценки (3.4) $\varphi(v)$ не обращается в нуль в некоторой окрестности $v = 0$. Поэтому φ_v непрерывна и ряд (3.8) сходится.

Таким образом, согласно классическим теоремам [21], решение инверсной задачи (3.1) равномерно непрерывно зависит от начального условия $v(t)$. Последнее равномерно непрерывно зависит от u_0 . Это завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. Построенная функция $v(t)$ является решением инверсного уравнения (3.1) как при $t < t_*$, так и при $t > t_*$. Тем самым она однозначно определяет продолжение решения $u(t)$ за полюс по правилу $u(t) = [v(t)]^{-1}$.

Следствие 2. После прохождения полюса необходимо вернуться от инверсной задачи к исходной. Обозначим точку перехода через \tilde{T} . Примем эту точку за начальную для функции $u(t)$, зададим в ней начальное значение $u(\tilde{T}) = [v(\tilde{T})]^{-1}$ и продолжим расчёт исходного уравнения при $t > \tilde{T}$. Согласно доказанным теоремам значение $u(\tilde{T})$ зависит от u_0 равномерно непрерывно. Поэтому то же справедливо для всего решения $u(t)$ при $t > \tilde{T}$.

Тем самым, если исходная задача (2.1) имеет не один полюс, а последовательность полюсов, то к каждому из них применимы теоремы 1 и 2.

Следствие 3. Из следствия 2 непосредственно вытекает, что метод инверсной функции применим к задачам с последовательностями полюсов первого порядка.

Следствие 4. Условия гладкости в теоремах 1 и 2 обеспечивают применимость разностных схем порядка точности до P -го и нахождение асимптотически точного значения погрешности по методу Рундсона.

Замечание 2. Проведённые доказательства являются локальными, т.е. относятся к некоторой окрестности точки t_* . Если точка \tilde{t} оказалась слишком далеко от точки t_* , то её необходимо передвинуть в сторону t_* .

Алгоритм. В численном расчёте нахождение окрестностей точки t_* , указанных в теоремах 1 и 2, достаточно проблематично. Будем использовать следующий более простой алгоритм.

Выберем некоторую равномерную сетку $t_n = n\tau$, $n = \overline{0, N}$. Здесь $\tau = T/N$ – шаг сетки. Введём некоторое пороговое значение $U > 0$. Будем вести на этой сетке расчёт задачи (2.1) по некоторой явной схеме до тех пор, пока для очередного сеточного значения u_n не выполнится условие $|u_n| > U$. Обозначим этот номер узла через n^* . Далее с этого момента численно решаем задачу (3.1) на той же сетке, выбирая в качестве начального условия $v_{n^*} = 1/u_{n^*}$. При этом во всех последующих узлах сетки восстанавливаем численное значение $u(t)$ по соотношению $u_n = 1/v_n$.

Если в ходе этого расчёта функция v_n изменила знак, то это означает переход $v(t)$ через нуль, что соответствует полюсу функции $u(t)$. Таким образом мы находим решение по обе

стороны полюса и можем продолжать расчёт за полюс. Если при дальнейшем решении уравнения (3.1) выполнится условие $|v_n| > 1/U$, то снова возвращаемся к решению уравнения (2.1). Такой переход можно выполнять неограниченное количество раз. Этот способ позволяет проводить сквозной расчёт через полюс или через последовательность полюсов кратности 1. При этом не происходит никакой потери точности, поскольку уравнение (3.1) в окрестности t_* не имеет никаких особенностей.

3.2. Схемы. В любом узле сетки может произойти переход от функции $u(t)$ к обратной функции $v(t)$. Поэтому многошаговые схемы для такого расчёта непригодны. Следует использовать только одношаговые схемы. В наших расчётах хорошие результаты дали:

- явные схемы Рунге–Кутты;
- явно- неявные одностадийные схемы Розенброка [22], из которых особенно надёжной была вещественная схема точности $O(\tau)$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \tau \mathbf{w}, \quad (E - \tau \mathbf{f}_{\mathbf{u}}) \mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{u}_n),$$

здесь E – единичная матрица; несколько уступала ей в надёжности, но имела точность $O(\tau^2)$ одностадийная схема с комплексным коэффициентом (CROS)

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \tau \operatorname{Re} \mathbf{w}, \quad (E - 0.5(1 + i)\tau \mathbf{f}_{\mathbf{u}}) \mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{u}_n); \tag{3.10}$$

- диагонально-неявные схемы Рунге–Кутты BORK [23], из которых упомянем общеизвестную обратную схему Эйлера точности $O(\tau)$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \tau \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n+1}) \tag{3.11}$$

и рекурсивную схему точности $O(\tau^2)$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \tau \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n+1} - 0.5\tau \mathbf{f}(\mathbf{u}_{n+1})). \tag{3.12}$$

3.3. Положения полюсов. Пусть использована численная схема точности $O(h^p)$. Найдём интервал $[t_n, t_{n+1}]$, на концах которого значения v_n и v_{n+1} имеют разные знаки. На этом интервале лежит расчётное приближение к полюсу T . В окрестности точки смены знака выберем p точек сетки t_j . Очевидно, для $p = 2$ это будут точки t_n и t_{n+1} , для $p = 4$ – точки $t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, t_{n+2}$.

Рассмотрим значения v_j в выбранных узлах как аргумент, а соответствующие значения t_j – как функцию этого аргумента. Проведём ньютоновскую (или иную) интерполяцию по этим значениям v_j функции $t(v)$ и вычислим значение t_* при $v^* = 0$. Это и будет расчётное положение полюса.

3.4. Погрешность. Вычисление погрешности как традиционной нормы (C , L_2 или подобных им) от разности численного и точного решений неконструктивно на задачах с сингулярностями. Причина в том, что расчётное положение полюса заведомо отличается от точного, и поэтому погрешности вблизи полюса оказываются огромными.

В статье [24] было предложено использовать метрику Хаусдорфа для оценки близости решений, имеющих участки быстрого изменения. Опишем процедуру вычисления расстояния в такой метрике. Возьмём точное решение $u(t)$ на участке до первого полюса или на участке между двумя соседними полюсами. Возьмём сеточное решение u_n , относящееся к этому участку; оно состоит из точек с координатами (t_n, u_n) . При этом часть значений u_n вычисляется непосредственно решением уравнения (2.1), а лежащие вблизи полюсов значения восстанавливаются по расчётным величинам v_n .

Опустим из каждой точки (t_n, u_n) перпендикуляр на кривую $u(t)$. Длина этого перпендикуляра d_n есть расстояние от точки до кривой. Выбрав $d = \max d_n$, получим метрику Хаусдорфа. Очевидно, она аналогична норме C .

На практике более выгодно построить аналог нормы L_2 . Для этого возьмём среднеквадратичную величину d_n в расчёте на одну точку:

$$d = \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N d_n^2 \right)^{1/2}, \tag{3.13}$$

где N – полное число точек на выбранном участке. Далее будем пользоваться определением (3.13).

4. Пример расчёта для одного ОДУ.

4.1. Автономный тест. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{du}{dt} = 1 + \left(u - \frac{\pi}{4}\right)^2, \quad t > 0; \quad u(0) = \frac{\pi}{4}. \quad (4.1)$$

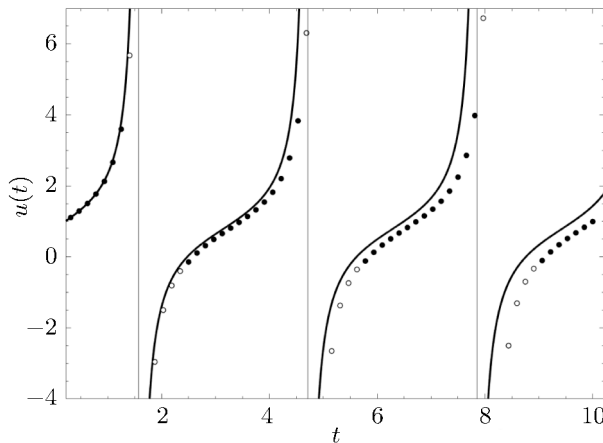


Рис. 1. Расчёт теста (4.1) с шагом $\tau = 0.157$ по схеме ERK2: сплошная кривая – точное решение; тёмные точки – расчёт по $u(t)$, светлые – по $v(t)$.

Приведём точное решение (показано на рис. 1) и его полюсы:

$$u(t) = \pi/4 + \operatorname{tg} t, \quad (t_*)_m = \pi(m - 1/2), \quad (4.2)$$

а также уравнение для функции $v(t)$:

$$\frac{dv}{dt} = -v^2 - \left(1 - v\frac{\pi}{4}\right)^2.$$

Расчёты проводились с разными константами перехода U . Оказалось, что большое значение U приводит к худшей точности. Значение $U \geq 100$ давало неудовлетворительные результаты. Для иллюстративных расчётов было выбрано $U = 5$. В общем случае U должно служить настроечным параметром программы.

4.2. Результаты. Для численной реализации были выбраны явные схемы Рунге–Кутты второго и четвёртого порядков (ERK2 и ERK4) и схема CROS (3.10). Мы пользовались их реализацией в пакете GEABORK (см. [25]). Схемы ERK2 и CROS имеют аппроксимацию $O(\tau^2)$, а схема ERK4 – $O(\tau^4)$. Все расчёты проводились до момента $T = 10$, что требовало прохождения трёх полюсов. Опишем качественные и количественные результаты.

На рис. 1 показано численное решение по схеме ERK2 с шагом $\tau = 0.157$. Шаг демонстрационного расчёта выбран так, чтобы он был: а) несоизмерим с расстоянием между полюсами (тогда узел сетки заведомо не попадает в полюс), б) достаточно велик, чтобы можно было видеть отличие численного решения от точного. Видно, что расчёт хорошо проходит через полюсы. Ошибка накапливается с увеличением t_n , однако даже при таком крупном шаге можно успешно пройти довольно много полюсов.

На рис. 2 для всех схем показана зависимость погрешности в метрике Хаусдорфа от величины шага. Для схем ERK2 и CROS кривые практически совпадают. График дан в двойном логарифмическом масштабе. Линии графика прямые, начиная уже со второй сетки. Следовательно, зависимость погрешности от шага является степенной. Тангенсы угла наклона этих прямых равны -2 для схем ERK2 и CROS и -4 для ERK4. Таким образом, даже на задаче с полюсами эти схемы реализуют свой теоретический порядок точности. Это свидетельствует о высокой надёжности метода инверсной функции и о применимости метода Ричардсона даже на задачах с сингулярностями.

Заметим, что для такого количественного определения точности необходим использованный здесь среднеквадратичный аналог метрики Хаусдорфа. Обычные нормы L_2 или C и даже традиционная метрика Хаусдорфа (являющаяся аналогом нормы C) не дают конструктивного ответа. Для иллюстрации на рис. 2 показаны также погрешности в норме L_2 . Сами эти погрешности намного больше погрешностей в метрике Хаусдорфа. Кривые в традиционных нормах имеют очень длинные нерегулярные участки: теоретическая сходимость начинается только при чрезмерно малом шаге, который нечасто используется в практических расчётах.

На рис. 3 показана зависимость погрешности определения положения третьего полюса от шага для всех схем. График дан в двойном логарифмическом масштабе. Картина полностью аналогична рис. 2 – положение полюса вычисляется с точностью $O(\tau^p)$.

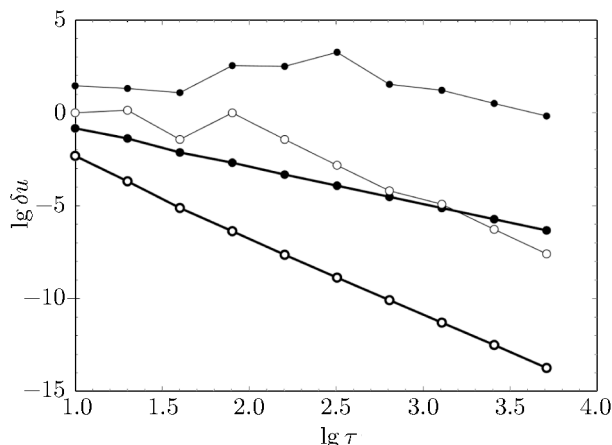


Рис. 2. Зависимость погрешности решения от шага: жирные линии – в метрике Хаусдорфа, тонкие – в норме L_2 , тёмные точки – схемы ERK2 и CROS, светлые – схема ERK4.

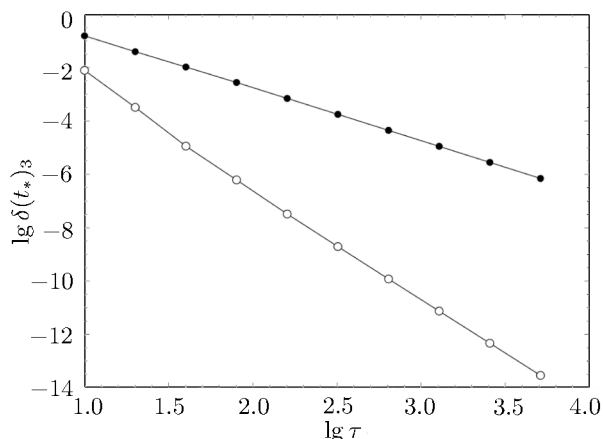


Рис. 3. Зависимость погрешности положения третьего полюса от шага: тёмные точки – схемы ERK2 и CROS, светлые – схема ERK4.

Обсудим некоторые следствия из этого. На грубой сетке расчётный и точный полюсы могут отстоять на несколько интервалов сетки. Если $p = 1$ (схемы первого порядка точности), то при сгущении сеток такое взаимное расположение расчётного и точного полюсов сохраняется. Но если $p \geq 2$, то после нескольких сгущений расчётный и точный полюсы попадут в один и тот же интервал сетки. С этого момента на кривой погрешности в традиционной норме начинается регулярный участок.

4.3. Неавтономный тест. Тест (4.1) был описан автономным уравнением. Однако к такому же точному решению (4.2) приводит задача для неавтономного уравнения

$$\frac{du}{dt} = \left(u - \frac{\pi}{4}\right)(\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t). \tag{4.3}$$

В этом случае уравнение для инверсной функции имеет следующий вид:

$$\frac{dv}{dt} = -\left(v - v^2 \frac{\pi}{4}\right)(\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t). \tag{4.4}$$

Расчёт неавтономной задачи (4.3) является существенно более серьёзной проблемой, чем решение автономной задачи. Поясним причину этого на данном конкретном примере. Правая часть уравнения (4.4) оказывается произведением двух сомножителей: первый зависит только от v , второй – только от t . Второй сомножитель показывает, что v должно менять знак (т.е. проходить через нуль) точно при t_* . Первый же сомножитель приводит к изменению знака в точке, смещённой на один или несколько шагов τ . Поэтому вблизи t_* эти сомножители попеременно меняют знак v_n и численное решение принимает пилообразный вид, показанный на рис. 4.

Этот эффект наблюдается на грубых сетках. Он снижает точность расчёта и даже может привести к срыву расчёта. Однако на достаточно подробных сетках этот эффект обычно пропадает, т.е. качественный вид и точность решения оказываются хорошими. Поэтому при возникновении подобных явлений в расчётах

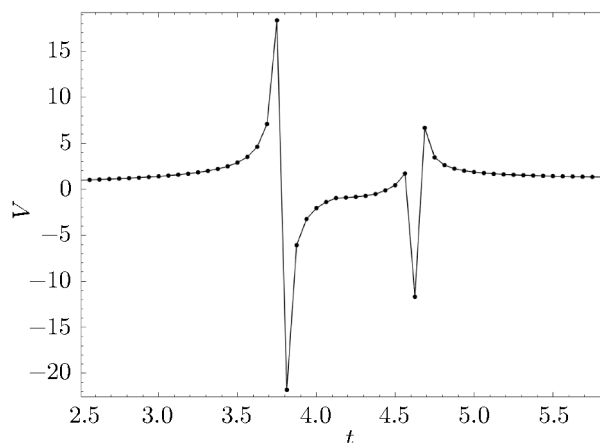


Рис. 4. Расчётная инверсная функция в неавтономной задаче (4.4).

можно порекомендовать пользователю существенно уменьшать шаг сетки. Целесообразно также увеличить разрядность вычислений.

4.4. Решение с ограниченной гладкостью. Выше было отмечено, что для работоспособности метода инверсной функции достаточно аналитичности решения в некоторой проколотовой окрестности полюса. Вне этой окрестности решение может иметь ограниченную гладкость (но достаточную для применения той или иной разностной схемы). Этот случай не вызывает ни теоретических, ни практических затруднений. Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{du}{dt} = \begin{cases} (1-t_0)^{-2}, & 0 \leq t \leq t_0 < 1, \\ u^2, & t_0 < t < 1, \end{cases} \quad u(0) = \frac{1-2t_0}{(1-t_0)^2}. \quad (4.5)$$

Здесь $t_0 \in [0, 1]$ – некоторое фиксированное число. Нетрудно убедиться, что точное решение этой задачи имеет вид

$$u(t) = \begin{cases} (1-t_0)^{-2}(t-t_0) + (1-t_0)^{-1}, & 0 \leq t \leq t_0 < 1, \\ (1-t)^{-1}, & t_0 < t < 1. \end{cases} \quad (4.6)$$

Решение (4.6) представляет собой линейную функцию, “склеенную” с гиперболой, и имеет вертикальную асимптоту в точке $t_* = 1$. Это решение показано на рис. 5. Полное время расчёта T выбирается так, чтобы выполнялось неравенство $T > t_*$. Очевидно, что решение аналитично в круге $0 < |t - t_*| < t_* - t_0$ на комплексной плоскости. При $t = t_0$ аналитичность нарушается: в этой точке $u(t)$ непрерывно вместе с первой производной, но уже вторая производная претерпевает разрыв.

Положим $t_0 = 0.5$, $T = \pi$. Расчёт этой задачи проводился по методу инверсной функции с использованием схем ERK1, ERK2 и ERK4. При указанной гладкости решения теоретическую сходимость может обеспечить только первая из них. Остальные две использовались лишь с иллюстративной целью. На рис. 6 показаны погрешности в зависимости от шага сетки. Масштаб графика двойной логарифмический. Погрешности решения вычислялись в среднеквадратичном аналоге метрики Хаусдорфа. Видно, что для схемы ERK1 кривая погрешности стремится к прямой с наклоном -1 , что соответствует теоретическому порядку точности схемы. Аналогичное поведение имеет кривая погрешности расчёта положения полюса.

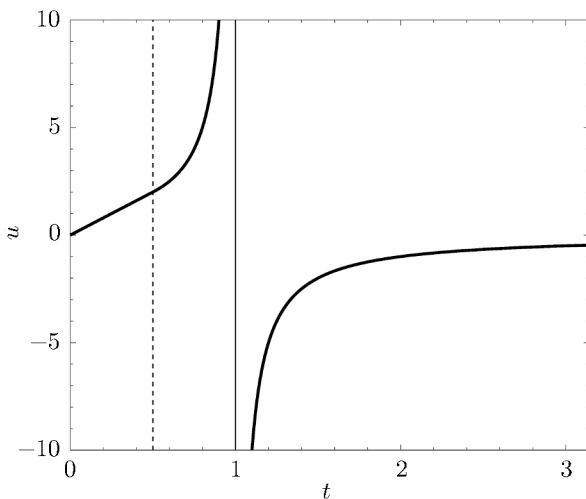


Рис. 5. Решение (4.6) задачи (4.5): жирная линия – u , тонкая линия – вертикальная асимптота $t = t_*$. Штриховой линией показана граница области аналитичности решения $t = t_0$.

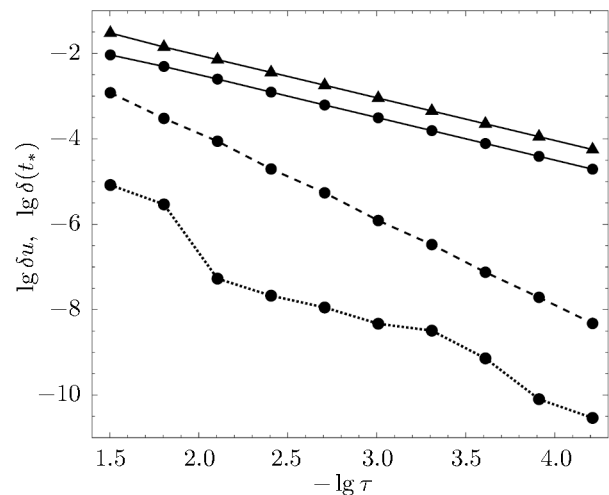


Рис. 6. Зависимость погрешности от шага сетки в тесте (4.5): сплошная линия – ERK1, штриховая – ERK2, пунктирная – ERK4; кружки – погрешности решения, треугольники – погрешность расчёта положения полюса.

Кривая погрешности решения для схемы ERK2 имеет вид “дрожащей” прямой, средний наклон которой близок к -2 . Это не вполне соответствует теоретическому характеру убывания погрешности, однако даже за рамками формальной применимости эта схема обеспечивает хорошую количественную точность.

Кривая погрешности для схемы ERK4 резко отличается от прямой с наклоном -4 . Это неудивительно, поскольку для применимости данной схемы решение должно иметь пять непрерывных производных. Тем не менее, фактическая точность оказывается очень высокой (вплоть до ошибок компьютерного округления $\sim 10^{-12}$).

Таким образом, проведённые расчёты показывают, что высокие требования к гладкости решения (а именно, аналитичность) целесообразны лишь в непосредственной близости к полюсу. Вдали от полюса требования к гладкости могут быть существенно ниже, и достаточно наличия нескольких непрерывных производных. Требование аналитичности в области, содержащей положительную полуось $t > 0$, является избыточным.

5. Системы ОДУ. Рассмотрим автономную задачу Коши для системы ОДУ с полюсами первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad t > 0, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0; \\ \mathbf{u} &= \{u^1, u^2, \dots, u^J\}, \quad \mathbf{f} = \{f^1, f^2, \dots, f^J\}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Неавтономный случай как для одного уравнения, так и для систем сводится к автономной задаче с помощью процедуры автономизации. Эта процедура будет описана далее.

Будем считать, что полюсы различных компонент не совпадают. Совпадение полюсов является вырожденным случаем, он будет рассмотрен отдельно. С формальной точки зрения расстояние между соседними несовпадающими полюсами может быть любым. Однако для надёжности численного расчёта нужно, чтобы это расстояние было существенно больше шага сетки. Будем считать это условие выполненным (в противном случае шаг нужно уменьшить). Таким образом, полюсы различных компонент можно рассматривать последовательно один за другим.

5.1. Инверсный вектор. Пусть первым возникает полюс в компоненте u^k , соответствующий момент времени обозначим через t_*^k . В некоторой окрестности этой точки справедливы следующие разложения:

$$\begin{aligned} u^k &= \frac{a_{-1}^k}{t - t_*^k} + \sum_{p=0}^{P+1} a_p^k (t - t_*^k)^p + o((t - t_*^k)^{P+1}), \\ u^j &= \sum_{p=0}^{P+1} a_p^j (t - t_*^k)^p + o((t - t_*^k)^{P+1}), \quad 1 \leq j \leq J, \quad j \neq k. \end{aligned}$$

Компонента, имеющая полюс, разлагается в ряд Пуанкаре, а все прочие компоненты разлагаются в ряды Тейлора. Верхние пределы сумм выбраны из предположения, что правые части являются P раз непрерывно дифференцируемыми, соответственно, компоненты решения имеют $P + 1$ непрерывную производную. Левую границу рассматриваемой окрестности по-прежнему будем обозначать через \tilde{t} .

Введём k -ю инверсную функцию $v^k(t) = [u^k(t)]^{-1}$ (её можно рассматривать как компоненту инверсного вектора). Для неё в окрестности точки t_*^k справедливо разложение, аналогичное (3.5). Инверсная система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dv^k}{dt} &= (v^k)^2 f^k(u^1, u^2, \dots, u^{k-1}, [v^k]^{-1}, u^{k+1}, \dots, u^J) \equiv \\ &\equiv \varphi^k(u^1, u^2, \dots, u^{k-1}, [v^k]^{-1}, u^{k+1}, \dots, u^J), \\ \frac{dw^j}{dt} &= f^j(u^1, u^2, \dots, u^{k-1}, [v^k]^{-1}, u^{k+1}, \dots, u^J), \quad 1 \leq j \leq J, \quad j \neq k. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Дифференцированием рядов для $u^j(t)$, $j \neq k$, и $v^k(t)$ нетрудно получить разложения правых частей (5.2), аналогичные (3.7).

Рассмотрим инверсную систему в указанной окрестности точки t_*^k , принимая точку \tilde{t} за начальную. Для компоненты v^k начальное условие имеет вид $v^k(\tilde{t}) = [u^k(\tilde{t})]^{-1}$, для прочих компонент оно записывается тривиально. Систему (5.2) вместе с указанным начальным условием будем называть инверсной задачей.

Теорема 3. Пусть компонента $u^k(t)$ обращается в бесконечность в точке t_*^k , аналитична в проколотой окрестности этой точки и имеет $P+1$ непрерывную производную вне указанной окрестности. Особая точка t_*^k является полюсом первого порядка тогда и только тогда, когда $f^k(u^1(t), u^2(t), \dots, u^J(t))/(u^k)^2$ имеет конечный ненулевой предел при $t \rightarrow t_*^k$.

Здесь подразумевается, что аргументами f^k являются ряды Пуизе для компонент u^1, u^2, \dots, u^J .

Доказательство практически дословно повторяет доказательство теоремы 1.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3 и $f^k(u^1(t), u^1(2), u^J(t))/(u^k)^2$ имеет конечный ненулевой предел при $t \rightarrow t_*^k$. Тогда найдётся такая окрестность особой точки t_*^k и окрестность начального условия \mathbf{u}_0 , в которых решение инверсной задачи существует, единственно и равномерно непрерывно зависит от начального условия \mathbf{u}_0 .

Доказательство во многом аналогично доказательству теоремы 2.

1. По условию правые части инверсной системы (5.2) непрерывны и ограничены. В силу классических теорем разрешимости задач Коши для систем ОДУ решение инверсной системы существует и единственно.

2. Покажем, что зависимость решения инверсной задачи от \mathbf{u}_0 является равномерно непрерывной. Легко видеть, что начальное условие в точке \tilde{t} зависит от \mathbf{u}_0 равномерно непрерывно. Поэтому достаточно обосновать равномерно непрерывную зависимость решения инверсной задачи от условия в точке \tilde{t} . Для этого достаточно показать, что компоненты якобиана системы (5.2) непрерывны.

В самом деле, в якобиан системы (5.2) входят производные вида

$$\frac{\partial \varphi^k}{\partial v^k}, \quad \frac{\partial \varphi^k}{\partial u^j}, \quad \frac{\partial f^i}{\partial v^k}, \quad \frac{\partial f^i}{\partial u^j},$$

здесь всюду $i, j \neq k$. Производные вида $\partial \varphi^k / \partial u^j$ и $\partial f^i / \partial u^j$ непрерывны в силу условий гладкости на \mathbf{f} (поскольку φ^k зависит от u^j точно так же, как f^k).

Выражения для $\partial \varphi^k / \partial v^k$ полностью аналогичны (3.8), (3.9). Тем же способом можно найти $\partial f^i / \partial v^k$. Приведём для них несколько первых коэффициентов ряда (3.8):

$$d_0 = 2a_2^i a_{-1}^k, \quad d_1 = 4a_2^i a_0^k + 6a_3^i a_{-1}^k,$$

$$d_2 = 2[a_2^i (a_0^k)^2 + 3a_2^i a_1^k a_{-1}^k + 6a_3^i a_0^k a_{-1}^k + 6a_4^i (a_{-1}^k)^2] / a_{-1}^k, \quad \dots$$

Видно, что производные $\partial \varphi^k / \partial v^k$ и $\partial f^i / \partial v^k$ непрерывны, поскольку φ^k не обращается в нуль в окрестности особой точки.

Таким образом, все компоненты якобиана непрерывны и решение инверсной задачи зависит от \mathbf{u}_0 равномерно непрерывно. Теорема доказана.

Следствие 5. Инверсная компонента $v^k(t)$ однозначно определяет продолжение за полюс для компоненты $u^k(t)$ и тем самым для всей системы (5.1).

Следствие 6. После прохождения полюса следует вернуться от инверсной системы к исходной. Это делается так же, как в случае одного уравнения. При этом зависимость решения за полюсом от начального условия \mathbf{u}_0 является равномерно непрерывной.

Последующий полюс может быть как в той же компоненте u^k , так и в какой-то другой. В обоих случаях для него справедливы теоремы 3 и 4.

Следствие 7. Метод инверсной функции применим к системам со множественными полюсами первого порядка.

Следствие 8. Условие на гладкость $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ позволяет применять разностные схемы порядка точности до P -го и вычислять асимптотически точное значение погрешности по Ричардсону.

5.2. Совпадение полюсов. Рассмотрим случай, когда полюсы нескольких компонент совпадают. Пусть, для упрощения, таких компонент две. Если совпадают полюсы большего числа компонент, то рассмотрение проводится полностью аналогично.

Пусть компоненты u^k и u^l имеют полюсы первого порядка, находящиеся в одной и той же точке $t_*^k = t_*^l \equiv t_*$. Пусть прочие компоненты не имеют особенностей в некоторой окрестности этой точки. Тогда в этой окрестности точки t_* уже две компоненты разлагаются в ряд Пуизе:

$$u^j = \frac{a_{-1}^j}{t - t_*} + \sum_{p=0}^{P+1} a_p^j (t - t_*)^p + o((t - t_*)^{P+1}), \quad j = k, l,$$

$$u^j = \sum_{p=0}^{P+1} a_p^j (t - t_*)^p + o((t - t_*)^{P+1}), \quad j \neq k, l.$$

В этом случае вводится не одна инверсная компонента, а две:

$$v^j(t) = [u^j(t)]^{-1}, \quad j = k, l.$$

Инверсная система имеет следующий вид:

$$\frac{dv^j}{dt} = (v^j)^2 f^j(u^1, u^2, \dots, u^{k-1}, [v^k]^{-1}, u^{k+1}, \dots, u^{l-1}, [v^l]^{-1}, u^{l+1}, \dots, u^J) \equiv$$

$$\equiv \varphi^j(u^1, u^2, \dots, u^{k-1}, [v^k]^{-1}, u^{k+1}, \dots, u^{l-1}, [v^l]^{-1}, u^{l+1}, \dots, u^J), \quad j = k, l,$$

$$\frac{du^j}{dt} = f^j(u^1, u^2, \dots, u^{k-1}, [v^k]^{-1}, u^{k+1}, \dots, u^{l-1}, [v^l]^{-1}, u^{l+1}, \dots, u^J), \quad j \neq k, l.$$

Начальное условие в точке \tilde{t} выбирается очевидным образом.

Нетрудно показать, что для такой инверсной задачи справедлив аналог теоремы 4, в котором необходимо оговорить наличие конечного ненулевого предела для $f^k(\mathbf{u}(t))/(u^k(t))^2$ и $f^l(\mathbf{u}(t))/(u^l(t))^2$ при $t \rightarrow t_*$. Напомним, что эти условия эквивалентны наличию полюсов первого порядка в этих компонентах.

5.3. Автономизация. Неавтономная задача сводится к автономной с помощью процедуры автономизации. Напомним эту процедуру. Пусть исходная задача имеет вид

$$d\mathbf{u}/dt = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0. \tag{5.3}$$

Введём новую компоненту решения $u^0 \equiv t$. Для неё $f^0 = 1$. Тогда неавтономная система (5.3) переходит в автономную систему

$$d\mathbf{u}/dt = \mathbf{F}(u^0, u^1, \dots, u^J), \quad u^0(0) = 0, \quad u^j(0) = u_0^j, \quad 1 \leq j \leq J,$$

$$F^0 = 1, \quad F^j = f^j, \quad 1 \leq j \leq J. \tag{5.4}$$

Если $\mathbf{f} \in C^P(\mathbb{R}_J)$, то такую же гладкость имеют правые части \mathbf{F} . Поэтому для системы (5.4) также справедливы теоремы 3 и 4.

Алгоритм. Описанный выше алгоритм расчёта легко обобщается на случай систем ОДУ. Подчёркнём, что для каждой компоненты $u^k(t)$ вектор-функции $\mathbf{u}(t)$ необходимо вводить отдельную инверсную функцию $v^k(t) = [u^k(t)]^{-1}$ (т.е. компоненту инверсного вектора). Параметр A^k также следует выбирать отдельно для каждой компоненты.

6. Пример для системы ОДУ.

6.1. Тест. Для иллюстрации рассмотрим следующую систему ОДУ:

$$\frac{du_1}{dt} = u_1(u_1 + u_2), \quad \frac{du_2}{dt} = -u_2(u_1 + u_2), \quad u_1(0) = u_2(0) = 2^{-1/2}. \quad (6.1)$$

Точное решение (6.1) имеет вид

$$u_1 = \operatorname{tg}(t - \pi/4), \quad u_2 = \operatorname{ctg}(t - \pi/4). \quad (6.2)$$

В моменты $T_k^1 = \pi/4 + \pi(k-1/2)$ компоненты u_1 и u_2 имеют простые полюсы и простые нули соответственно. В моменты $T_k^2 = \pi/4 + \pi k$ u_1 имеет простые нули, а u_2 – простые полюсы. Это решение показано на рис. 7.

Для разных компонент переход к соответствующей инверсной функции может происходить в различные моменты времени. Поэтому необходимо рассмотреть следующие случаи. Во-первых, пусть условие перехода выполнено только для функции u_1 , т.е. $|u_1| > A_1$ и $|u_2| < A_2$. Тогда от (6.1) перейдём к системе

$$\frac{dv_1}{dt} = -1 - v_1 u_2, \quad \frac{du_2}{dt} = -\frac{u_2}{v_1} - u_2^2. \quad (6.3)$$

Во-вторых, если $|u_1| < A_1$ и $|u_2| > A_2$, рассмотрим систему

$$\frac{du_1}{dt} = u_1^2 + \frac{u_1}{v_2}, \quad \frac{dv_2}{dt} = v_2 u_1 + 1. \quad (6.4)$$

Наконец, если условия $|u_1| > A_1$, $|u_2| > A_2$ выполнены для обеих компонент, то следует решать систему

$$\frac{dv_1}{dt} = -1 - \frac{v_1}{v_2}, \quad \frac{dv_2}{dt} = \frac{v_2}{v_1} + 1. \quad (6.5)$$

Очевидно, системы (6.3)–(6.5) являются нелинейными. Они не содержат малых параметров, допускающих линеаризацию. Поэтому тест (6.1) достаточно представительен. Его важным преимуществом является то, что точное решение (6.2) выражается в элементарных функциях.

6.2. Результаты. Мы проводили расчёты по схеме ERK4. Промежуток $t \leq T = 15$ включал пять полюсов для каждой компоненты решения. На рис. 8 показана точность нахождения всего решения и положения пятого полюса для каждой из компонент. Обе компоненты вычислены с примерно одинаковой точностью. То же справедливо для положения всех полюсов каждой из компонент.

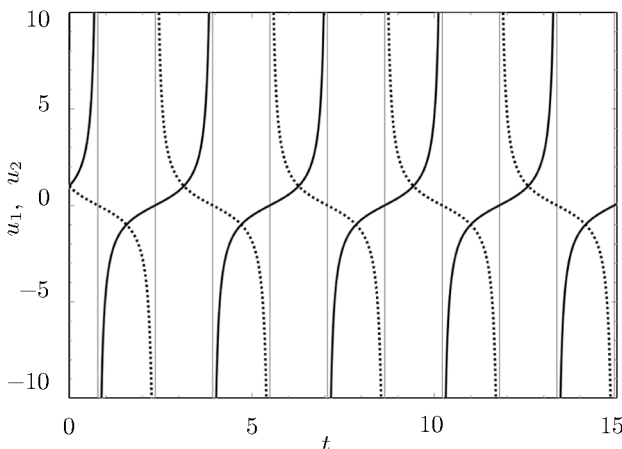


Рис. 7. Решение задачи (6.1): сплошная линия – u_1 , пунктирная – u_2 , вертикальные линии – положения полюсов.

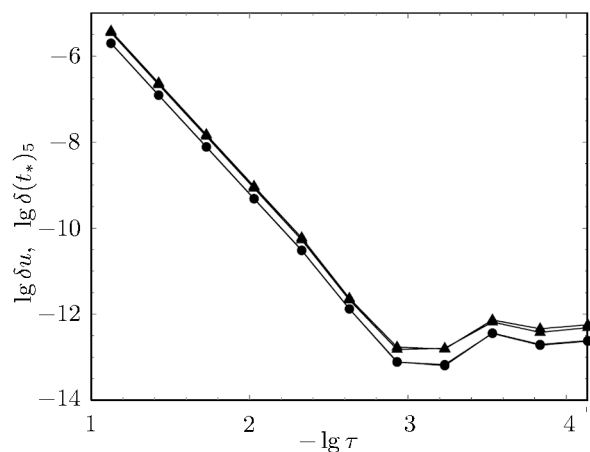


Рис. 8. Зависимость погрешности от шага сетки в тесте (6.1): кружки – решения для обеих компонент, треугольники – положение пятого полюса в обеих компонентах.

Видно, что даже на достаточно грубой сетке с шагом $\tau = 0.075$ получена отличная точность $\sim 3 \cdot 10^{-6}$. Точность $\sim 10^{-13}$, соответствующая ошибкам округления, достигнута при $\tau \sim 10^{-3}$. Скорость убывания ошибки при уменьшении шага сетки соответствует теоретическому четвёртому порядку точности. Это подтверждает высокую надёжность предложенного метода.

7. Кратные полюсы.

7.1. Трудности. Если полюс $u(t)$ имеет кратность $k > 1$, то в точке t_* инверсная функция $v(t)$ имеет нуль кратности k . Следовательно, в этой точке обращается в нуль не только $v(t)$, но и её производные до $(k - 1)$ -й включительно.

Это представляет серьёзную проблему для численного решения. В самом деле, явные схемы порядка точности $p \leq k$ передают p первых производных решения. В точке t_* все эти производные обращаются в нуль, поэтому при $t > t_*$ численное решение оказывается тривиальным $v \equiv 0$. Такие явные схемы позволяют дойти до полюса t_* , но не позволяют вести из него дальнейший расчёт.

На практике ни один из узлов сетки не будет точно совпадать с точкой t_* . Поэтому формальное продолжение решения за полюс возможно. Но при этом значения $v(t)$ в районе полюса очень малы и существенно возрастает роль ошибок округления. Поэтому после сквозного прохождения каждого полюса точность решения существенно ухудшается тем сильнее, чем больше кратность полюса k . Найти много полюсов высокой кратности с 64-битовыми числами не удаётся, и требуется существенно увеличивать разрядность вычислений. Изложим способ преодоления этой трудности.

7.2. Обобщённая инверсная функция. По скорости убывания функции $v(t)$ при приближении к полюсу можно определить кратность нуля k , который равен кратности полюса функции $u(t)$. Эффективные алгоритмы, позволяющие определить эту кратность, будут описаны позже. Пока будем предполагать, что кратность k ближайшего полюса найдена (мы допускаем, что разные полюсы могут иметь различную кратность). Тогда вместо инверсной функции $v(t)$ перейдём к обобщённой инверсной функции $w(t)$. Для нечётного k она имеет следующий вид:

$$w(t) = v^{1/k}. \tag{7.1}$$

Дробная степень $1/k$ имеет k комплексных значений. При нечётном k одно из них вещественно. В формуле (7.1) подразумевается выбор вещественной ветви корня.

При чётном k надо различать два случая. Если $v > 0$, то имеются два вещественных значения корня, различающихся знаками. Для наших целей выбор знака безразличен. Поэтому также можно пользоваться записью (7.1). Если $v < 0$, то среди значений корней нет вещественных. Для наших целей можно воспользоваться следующим обобщением:

$$w(t) = \operatorname{sgn}(v)|v|^{1/k}. \tag{7.2}$$

Формулой (7.2) можно пользоваться при любом знаке v . Заметим, что для нечётных k эта формула также даёт правильный результат.

У обобщённой инверсной функции t_* есть простой корень. Сама функция $w(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dw}{dt} = -k^{-1}w^{1+k}f(w^{-k}). \tag{7.3}$$

Сквозное прохождение нуля $w(t)$ является достаточно простой задачей по сравнению с задачей о сквозном прохождении кратного нуля.

Для задачи (7.3) нетрудно доказать аналоги теорем 1 и 2 для случая одного уравнения и теорем 3 и 4 для случая системы ОДУ. При этом в теоремах 1 и 3 следует заменить f/u^2 на $f/u^{1+1/k}$.

7.3. Определение кратности полюса. Диагностика кратности полюса проводится в тех случаях, когда v_n становится достаточно малым. В этом случае можно принять гипотезу о

том, что t_n достаточно близко к полюсу t_* , а само поведение функции приближённо описывается формулой $v_n \approx \text{const} \cdot (t_* - t_n)^k$. Одновременно с v_n продолжается расчёт величины $u_n = 1/v_n$, и поведение функции u имеет вид $u_n \approx A(t_* - t_n)^{-k}$, где A – некоторая константа.

Рассмотрим два соседних шага сетки t_n, t_{n+1} . В них вычислено значение u_n, u_{n+1} и правые части $f_n = f(u_n, t_n), f_{n+1} = f(u_{n+1}, t_{n+1})$. Очевидно, вблизи полюса можно считать, что выполняются следующие приближённые соотношения:

$$\begin{aligned} u_n &\approx A(t_* - t_n)^{-k}, & u_{n+1} &\approx A(t_* - t_{n+1})^{-k}, \\ f_n &\approx Ak(t_* - t_n)^{-k-1}, & f_{n+1} &\approx Ak(t_* - t_{n+1})^{-k-1}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Это система четырёх уравнений с тремя неизвестными A, t_*, k . Очевидно, система несовместна, но можно отыскать её приближённое решение. Важное требование к этому решению – простота и надёжность расчётных формул.

Опустив промежуточные выкладки, приведём два приближённых решения для k :

$$k \approx (t_{n+1} - t_n)(u_n/f_n - u_{n+1}/f_{n+1})^{-1}, \quad k \approx (1 - \ln(f_n/f_{n+1})/\ln(v_n/v_{n+1}))^{-1}. \quad (7.5)$$

Отметим, что для применимости этих формул необходимо (но не достаточно) выполнение следующих условий:

$$v_n v_{n+1} > 0, \quad f_n f_{n+1} > 0, \quad v_n f_n < 0, \quad |v_n| > |v_{n+1}|.$$

Поэтому вычислять значения k (7.5) следует только при выполнении этих неравенств.

В наших расчётах формулы (7.5) давали совпадающие результаты. Разумеется, расчётное значение q оказывалось нецелым. Но если несколько шагов подряд оно было достаточно близко к одному и тому же целому числу, то это целое число принималось за кратность полюса теста. Расчёты показали, что найденное таким образом значение практически всегда совпадало с реальной кратностью полюса. Поэтому данный алгоритм определения кратности был принят в наших расчётах.

8. Теоретические аспекты построения тестов. Построение представительных тестов для задач с кратными полюсами оказалось нетривиальной проблемой. Хороший тест должен иметь точное решение, содержать цепочку кратных полюсов, не содержать особенности других типов. Обсудим этот вопрос.

8.1. Несингулярные особенности. Тривиальным обобщением теста (4.1) является следующая задача:

$$\frac{du}{dt} = k(u - u_0)[(u - u_0)^{1/k} + (u - u_0)^{-1/k}] \quad \text{при нечётных } k.$$

Точное решение этой задачи имеет вид

$$u(t) = u_0 + \text{tg}^k t.$$

Однако у такого теста имеется специфическая трудность, которая не свойственна общим задачам с сингулярностями. В точном решении имеются точки $t = \pi m, m = 0, 1, \dots$. В них производные точного решения $u^{(q)}(t) = 0$ для $q = \overline{1, k-1}$. Такие точки назовём несингулярными особенностями. Прохождение такой особенности эквивалентно расчёту задачи с началом в особой точке высокого порядка. Начало расчёта в особой точке является самостоятельной трудной проблемой численных методов. В данной задаче эта трудность возникает многократно, т.е. при прохождении каждой несингулярной особенности. Этот вопрос выходит за рамки данной работы.

Сформулируем следующие очевидные условия.

1. Для отсутствия несингулярных особых точек необходимо, чтобы на интегральной кривой между любой парой соседних полюсов выполнялось условие $f(u, t) \neq 0$.

2. Для отсутствия несингулярных особых точек достаточно, чтобы $f(u, t) \neq 0$ ни в одной полосе плоскости u, t , расположенной между соседними полюсами.

8.2. Единственный полюс. Можно сконструировать тест, не содержащий несингулярной особенности. Например, это задача

$$\frac{du}{dt} = u^\nu, \quad \nu > 1, \quad u(0) = u_0.$$

Точное решение

$$u(t) = u_0(1 - t/t_*)^{-1/(\nu-1)}$$

имеет полюс порядка $k = (\nu - 1)^{-1}$ в точке $t_* = u_0^{1-\nu}/(\nu - 1)$. Однако такой тест достаточно прост, так как в нем имеется только один полюс, а не цепочка полюсов.

8.3. Полюсы чётного порядка. Задачи с полюсами чётного порядка имеют один существенный недостаток. Они в принципе не могут быть автономными. Справедлива

Теорема 5. *Если решение имеет полюс чётной кратности и описывается дифференциальным уравнением первого порядка, то это уравнение не может быть автономным.*

В самом деле, вблизи полюса чётной кратности левая и правая ветви решения имеют разные знаки производных при одном и том же значении решения u . Если задача автономна, то правая часть $f(u)$ есть однозначная функция u , и она не может иметь разные знаки при одном и том же значении u . Это противоречие доказывает теорему.

8.4. Неавтономность. В п. 2 было замечено, что для простого полюса при неавтономной записи задачи могут возникать нежелательные осцилляции численного решения вблизи полюса. Подобная трудность возникает и с кратными полюсами. Способа преодоления этой трудности найти пока не удаётся. Поэтому целесообразно строить тесты с автономной записью правой части.

9. Представительные тесты.

9.1. Цепочка полюсов третьего порядка. Нам удалось построить тест, отвечающий сформулированным выше требованиям. В нем точное решение имеет следующий вид:

$$u = u_0 + \operatorname{tg}^3(t - t_0) + \operatorname{tg}(t - t_0). \tag{9.1}$$

Наличие члена $\operatorname{tg}^3(t - t_0)$ обеспечивает наличие полюса третьего порядка. В то же время член $\operatorname{tg}(t - t_0)$ гарантирует отсутствие несингулярных особенностей. Уравнение (9.1) является приведённым кубическим уравнением относительно $\operatorname{tg}(t - t_0)$. Из трёх корней этого уравнения только один вещественный. Он имеет следующий вид:

$$\operatorname{tg}(t - t_0) = -(2/\sqrt{27})S \operatorname{sh} \varphi, \quad S = \operatorname{sgn}(u - u_0), \quad \varphi = (1/3) \operatorname{arcsch} |(\sqrt{27}/2)(u - u_0)|. \tag{9.2}$$

Это решение можно записать и в другой форме:

$$\operatorname{tg}(t - t_0) = \sqrt[3]{u/2 + r} + \sqrt[3]{u/2 - r}, \quad r = \sqrt{u^2/4 + 1/27}. \tag{9.3}$$

Продифференцировав точное решение по t , получим неавтономную запись дифференциального уравнения:

$$\frac{du}{dt} = (1 + 3 \operatorname{tg}^2(t - t_0)) \cos^{-2}(t - t_0) = (1 + 3 \operatorname{tg}^2(t - t_0))(1 + \operatorname{tg}^2(t - t_0)).$$

Подставив сюда $\operatorname{tg}(t - t_0)$ из (9.2) или (9.3), получим автономное уравнение вида

$$\frac{du}{dt} = [1 + 3(2/\sqrt{27} \operatorname{sgn}(u - u_0) \operatorname{sh} \varphi)^2][1 + (2/\sqrt{27} \operatorname{sgn}(u - u_0) \operatorname{sh} \varphi)^2] \tag{9.4}$$

или

$$\frac{du}{dt} = 3[(u/2 + r)^{4/3} + (u/2 - r)^{4/3} + 1/9]. \tag{9.5}$$

К сожалению, построить аналогичный автономный тест для полюсов произвольного нечёт-ного порядка k не удалось. Если взять точное решение

$$u = u_0 + \operatorname{tg}(t - t_0) + \operatorname{tg}^k(t - t_0),$$

то дифференциальное уравнение в неавтономной форме записывается без труда:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1 + k \operatorname{tg}^{k-1}(t - t_0)}{\cos^2(t - t_0)}.$$

Однако алгебраическое уравнение относительно $\operatorname{tg}(t - t_0)$ имеет k -ю степень, а при $k \geq 5$ оно неразрешимо в радикалах.

9.2. Цепочка полюсов второго порядка. В этом случае задача может быть только неавтономной. Мы построили следующий тест. Пусть точное решение имеет вид

$$u(t) = u_0 + \sin(t - t_0) \cos^{-2}(t - t_0) = [1 + \operatorname{tg}^2(t - t_0)] \sin(t - t_0). \quad (9.6)$$

Оно имеет полюсы порядка $k = 2$ при $(t_*)_m = \pi/2 + \pi m$.

Продифференцировав (9.6), получим

$$\frac{du}{dt} = (1 + 2 \operatorname{tg}^2(t - t_0)) \cos^{-1}(t - t_0) = [1 + 2 \operatorname{tg}^2(t - t_0)][1 + \operatorname{tg}^2(t - t_0)] \cos(t - t_0). \quad (9.7)$$

Выразим $\operatorname{tg}(t - t_0)$ из (9.6) и подставим в (9.7):

$$\frac{du}{dt} = (1/2 + \sqrt{1/4 + (u - u_0)^2} + 2(u - u_0)^2) \cos(t - t_0). \quad (9.8)$$

Заметим, что одному и тому же точному решению могут соответствовать разные неавтономные формы записи задачи. Например, функция (9.6) является точным решением дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dt} = \cos^{-1}(t - t_0) + 2 \sin^2(t - t_0) \cos^{-3}(t - t_0).$$

Однако все попытки расчёта указанного уравнения различными квадратурными формулами оказались безуспешными – счёт разваливался.

Поэтому сконструированные здесь тесты (9.4), (9.5) и (9.8) представляют самостоятельную ценность: решения имеют цепочки полюсов указанных порядков, отсутствуют особые точки других типов, минимизировано влияние неавтономности. Эти задачи рекомендуются при тестировании других методов сквозного расчёта полюсов.

10. Апробация.

10.1. Цепочка полюсов третьего порядка. Из предыдущего обсуждения видно, что тест (9.4) является представительным тестом, описывающим цепочку кратных полюсов, причём полюсы являются единственными особенностями решения. В нем отсутствуют несингулярные особые точки. Поэтому апробация метода обобщённой инверсной функции была проведена на этом тесте. В расчётах использована схема ERK4.

Были выполнены две серии расчётов теста (9.4) на последовательности равномерных сгущающихся вдвое сеток. Расчёт проводился на отрезке $0 \leq t \leq T = 15$, содержащем пять полюсов. В первой серии во входных данных программы принудительно задавалась кратность полюса $k = 3$. В этой серии при выполнении условия $|u_n| > U$ выполнялся переход не к простой, а сразу к обобщённой инверсной функции w , соответствующей данному k . Для первой сетки задавался шаг $\tau = 0.15$. Далее сетки последовательно сгущались вдвое, пока погрешности не достигали ошибок округления. На рис. 9 показан график решения на самой грубой сетке. Видно, что при сквозном прохождении всех пяти полюсов третьего порядка численное решение визуально совпадает с точным. Это свидетельствует о высокой надёжности метода обобщённой инверсной функции.

На рис. 10 показана зависимость погрешностей от шага сетки в двойном логарифмическом масштабе. Каждая сетка отмечена значком. Для удобства эти значки соединены между собой тонкими линиями. Линия с темными кружками показывает погрешность решения в среднеквадратичном аналоге метрики Хаусдорфа.

Видно, что начальный участок линии слегка искривлен, но быстро происходит выход на регулярный прямолинейный участок. Его наклон точно соответствует теоретическому порядку сходимости $p = 4$ схемы ERK4. Погрешность убывает до $\sim 10^{-14}$, затем перестаёт убывать при дальнейшем сгущении сетки. Этот предел показывает, что ошибки округления всего лишь в ~ 100 раз превышают ошибку единичного округления компьютера 10^{-16} . Это также подтверждает высокую надёжность метода. Линия с темными треугольниками показывает погрешность определения положения самого далекого пятого полюса. Для неё также справедливо перечисленное выше.

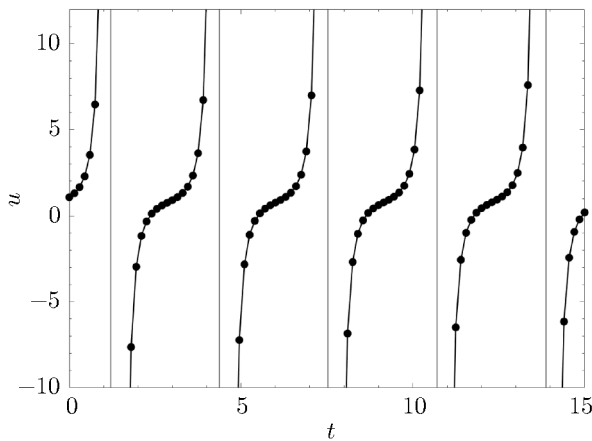


Рис. 9. Расчёт теста (9.4) с шагом $\tau = 0.15$ по схеме ERK4: сплошная линия – точное решение (9.1), точки – численное решение.

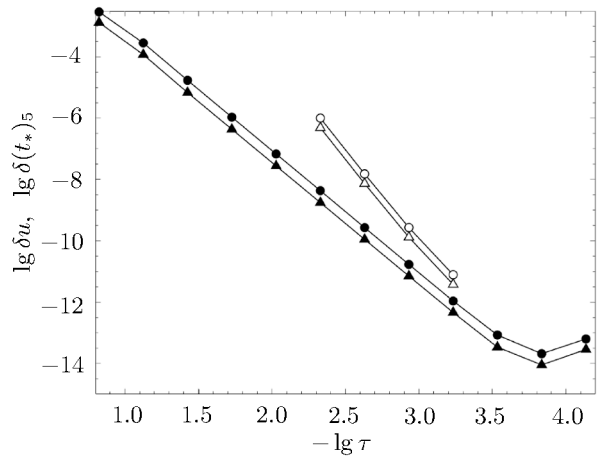


Рис. 10. Зависимость погрешности решения и положения пятого полюса от шага в тесте (9.4).

Во второй серии расчётов кратность полюса не задавалась. Программа автоматически определяла кратность по критерию (7.5). При этом сначала происходил переход от основной функции u к простой инверсной функции v . Когда для простой инверсной функции устанавливался критерий (7.5), то производился переход к обобщённой инверсной функции. На практике этот критерий не срабатывал как на грубых сетках, так и на слишком подробных. В этом случае счёт разваливался. Расчёты удалось провести на сетках с числами узлов $N = 400, 800, 1600, 3200$. Погрешность решения на всём отрезке $[0, T]$ и ошибка положения пятого полюса показаны на рис. 10 светлыми точками.

Видно, что на первой из этих четырёх сеток погрешности решения и пятого полюса в ~ 100 раз превышают соответствующие значения, полученные при априорном задании правильного k . При дальнейшем сгущении сеток расхождение быстро уменьшается. Кривые стремятся к линиям, полученным при априорно заданном k . Таким образом, программа с автоматическим выбором k по точности и надёжности уступает программе с априорно заданной кратностью полюса. Однако видно, что она позволяет рассчитывать цепочки полюсов, о природе которых заранее ничего неизвестно.

Сравнение двух серий расчётов показывает, что критерий определения кратности полюса существенно менее надёжен, чем сам метод обобщённой инверсной функции.

10.2. Цепочка полюсов второго порядка. Расчёты теста (9.8) проводились по схеме ERK4. На рис. 11 приведены численное решение при $\tau = 0.15$ и точное решение (обозначения соответствуют рис. 9). Численный расчёт успешно проходит через 5 полюсов.

На рис. 12 показана зависимость погрешности самого решения и положения пятого полюса от шага сетки (обозначения соответствуют рис. 10). Видно, что расчётные точки несколько разбросаны вокруг усреднённой прямой. Это и есть проявление трудностей, связанных с ре-

шением неавтономных задач. Однако средний наклон прямой соответствует теоретическому порядку точности $p = 4$, и на умеренных сетках достигается очень высокая точность, близкая к ошибкам единичного округления.

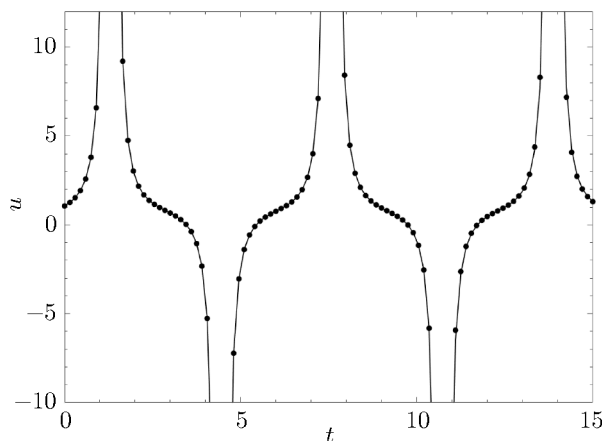


Рис. 11. Расчёт теста (9.8) с шагом $\tau = 0.15$ по схеме ERK4.

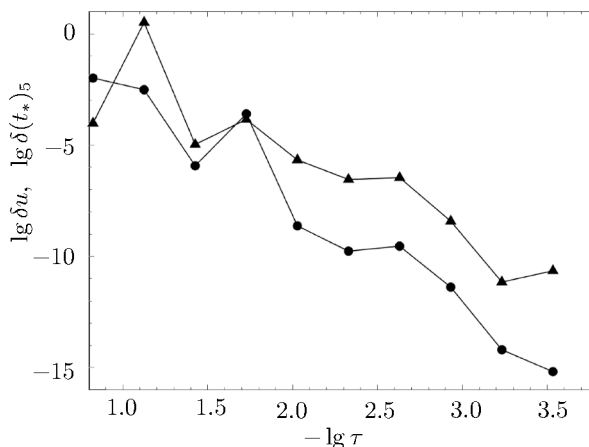


Рис. 12. Зависимость погрешности решения и положения пятого полюса от шага в тесте (9.8).

Заключение. Предложенный в данной работе алгоритм сквозного прохождения полюсов высокой заранее неизвестной кратности оказался достаточно надёжным. Он обеспечивает высокую точность сквозного расчёта не только единичного полюса, но и цепочки полюсов, причём на автономных и неавтономных задачах.

Публикация выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М., 1987.
2. Berger M., Kohn R.V. A rescaling algorithm for the numerical calculation of blowing-up solutions // Comm. Pure Appl. Math. 1988. V. 41. № 6. P. 841–863.
3. Huang W., Ren Y., Russell R.D. Moving mesh methods based on moving mesh partial differential equations // J. Comp. Phys. 1994. V. 113. P. 279–290.
4. Nakagawa T. Blowing up of a finite difference solution to $u_t = u_{xx} + u^2$ // Appl. Math. Optimization. 1976. V. 2. P. 337–350.
5. McLaughlin D.W., Papanicolaou G.C., Sulem C., Sulem P.L. Focusing singularity of the cubic Schrodinger equation // Phys. Rev. A. 1986. V. 34. P. 1200–1210.
6. Haynes R., Turner C. A numerical and theoretical study of blow-up for a system of ordinary differential equations using the Sundman transformation // Atlantic Electr. J. Math. 2007. V. 2. № 1. P. 1–13.
7. Калиткин Н.Н. Численные методы. М., 1978.
8. Альшина Е.А., Калиткин Н.Н., Корякин П.В. Диагностика особенностей точного решения методом сгущения сеток // Докл. РАН. 2005. Т. 404. № 3. С. 295–299.
9. Альшина Е.А., Калиткин Н.Н., Корякин П.В. Диагностика особенностей точного решения при расчётах с контролем точности // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2005. Т. 45. № 10. С. 1837–1847.
10. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М., 2007.
11. Белов А.А. Численное обнаружение и исследование сингулярностей решения дифференциальных уравнений // Докл. РАН. 2016. Т. 468. № 1. С. 21–25.
12. Белов А.А. Численная диагностика разрушения решений дифференциальных уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2017. Т. 57. № 1. С. 91–102.

13. *Richardson L.F., Gaunt J.A.* The deferred approach to the limit // *Phil. Trans. A.* 1927. V. 226. P. 299–349.
14. *Рябенский В.С., Филипов А.Ф.* Об устойчивости разностных уравнений. М., 1956.
15. *Lax P.* On the stability of difference approximations to solutions of hyperbolic equations with variable coefficients // *Comm. Pure Appl. Math.* 1961. V. 14. P. 497–520.
16. *Janke E., Emde F., Lösch F.* *Taffeln höhere Functionen.* Stuttgart, 1960.
17. NIST Digital Library of Mathematical Functions. <https://dlmf.nist.gov>.
18. *Painlevé P.* *Leçons sur la theorie analytique des equations differentielles.* Paris, 1973.
19. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.-Л., 1941.
20. *Кудряшов Н.А.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. М., 2004.
21. *Хайпер Э., Нерсет С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М., 1990.
22. *Rosenbrock H.H.* Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations // *Comp. J.* 1963. V. 5. № 4. P. 329–330.
23. *Калиткин Н.Н., Пошивайло И.П.* Обратные Ls-устойчивые схемы Рунге–Кутты // *Докл. РАН.* 2012. Т. 442. № 2. С. 175–180.
24. *Белов А.А., Калиткин Н.Н.* Экономичные методы численного интегрирования задачи Коши для жестких систем ОДУ // *Дифференц. уравнения.* 2019. Т. 55. № 7. С. 907–918.
25. *Пошивайло И.П.* Жесткие и плохо обусловленные нелинейные модели и методы их расчёта: дис. . . . канд. физ.-мат. наук. М., 2015.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Российский университет дружбы народов,
г. Москва,
Институт прикладной математики
имени М.В. Келдыша РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 17.01.2021 г.
После доработки 27.06.2021 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.