ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 6, с. 834–845

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63

БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЙ МЕТОД В РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

© 2022 г. А. С. Ильинский, И. С. Полянский

Рассмотрено применение барицентрического метода для численного решения краевых задач математической физики. Основные предположения состоят в том, что система дифференциальных уравнений в частных производных краевой задачи разрешима в приближении метода Галёркина и граница области анализа является кусочно-линейной. Отличительная особенность барицентрического метода состоит в порядке формирования глобальной системы базисных функций для области анализа через барицентрические координаты. Заданы решения по определению барицентрических координат. Выполнено сравнение скорости сходимости барицентрического метода и сеточных методов при решении некоторых характерных краевых задач математической физики.

DOI: 10.31857/S0374064122060097, EDN: CDJGXU

Введение. Значительная часть исследований различных физических процессов тесно связана с краевыми задачами математической физики, большинство из которых сводится к решению дифференциальных уравнений в частных производных. С учётом универсальности относительно возможного применения к несамосопряжённым системам для решения подобных задач широкое распространение получили проекционные методы – метод Б.Г. Галёркина и его модификации. Первый шаг эффективной вычислительной реализации проекционных методов состоит в формировании набора базисных функций, которые должны удовлетворять граничным условиям и образовывать полную систему. Большинство современных исследований предполагает выбор базисных функций с использованием сеточных схем аппроксимации искомой в области анализа функции или дифференциального оператора. Несомненным достоинством подобного выбора является универсальность численных схем, а недостатком – низкая вычислительная эффективность. Для повышения вычислительной эффективности в работах [1–10] для численного решения различных типов задач электродинамики [1, 11] и частной задачи теории упругости [2] предложен барицентрический метод (БМ), который по своей сути является полуаналитическим методом. Преимущество БМ заключается в формировании глобальной системы базисных функций (без разбиения области анализа на элементарные подобласти). Основное допущение БМ состоит в том, что граница области анализа является кусочно-линейной.

Цель настоящей статьи заключается в расширении применимости барицентрического метода на решение произвольных краевых задач математической физики при исходном предположении разрешимости системы дифференциальных уравнений в частных производных в приближении метода Галёркина.

1. Постановка задачи. Введём обозначения: $\mathbb{F}$ – поле действительных чисел, Ω – ограниченная односвязная область в $\mathbb{E}^d$, $d \geqslant 2$. Граница $\partial\Omega$ области Ω представляет собой полиэдральную поверхность, т.е. $\partial\Omega = \bigcup_{p=1}^{P} B_p$, где B_p – $(d-1)$-мерный симплекс и любые два симплекса $B_{p'}$ и $B_{p''}$, $p', p'' \in \overline{1,P}$, $p' \neq p''$, правильно расположены [12]. Через $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_N\}$ обозначим множество вершин этой полиэдральной поверхности, через $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \ldots, e_M\}$ – рёбра ($e_m = \{v_n,\ v_{n'}\}$, $m = \overline{1,M}$, $v_n \neq v_{n'}$, $n \neq n' \in \{\overline{1,N}\}$). Если e_m, B_p содержат вершину v_n, то в ряде случаев будем обозначать их e_m^n, B_p^n. Также обозначим через M_n и P_n число рёбер и симплексов соответственно, которые содержат вершину v_n.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (ДУ) в частных производных

$$\mathcal{L}u = F\left(x_1, x_2, \ldots, x_d, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_d}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \ldots, \frac{\partial^l u}{\partial x_d^l}\right) = f \qquad (1)$$

с краевым условием

$$\left[\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \nu}\right]_{\partial\Omega} = g, \tag{2}$$

где $\mathcal{L}$ – линейный ограниченный в пространстве функций $C(\Omega)$ дифференциальный оператор, который имеет ограниченный обратный $\mathcal{L}^{-1}$; $l \in \mathbb{N}$ определяет порядок (1); $u \in C_{\mathcal{L}}(\Omega)$ – искомая функция в Ω; $f \in C(\Omega)$ – известная в Ω функция, удовлетворяющая условию Липшица $|f(x) - f(y)| < L^0|x-y|$, $x, y \in \Omega$, L^0 – константа Липшица; $g \in C(\partial\Omega)$ – заданная функция; ν – внешняя нормаль к $\partial\Omega$; $\alpha, \beta \in C(\partial\Omega)$, $\alpha(x) \geqslant 0$, $\beta(x) \geqslant 0$, $\alpha(x) + \beta(x) > 0$; $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_d\}$.

Решение краевой задачи (1), (2) предлагается определять численно в приближении метода Галёркина при разложении по базису [13, с. 279]

$$u^{\mathcal{M}}(x) = \sum_{i=0}^{\mathcal{M}} c_i \psi_i(x) \tag{3}$$

с последующим сведением (1) к системе уравнений относительно неопределённых коэффициентов разложения c_i $(i = \overline{0, \mathcal{M}})$ при выдвижении требования ортогональности невязки $\mathcal{N}(x) = \mathcal{L}[\sum_{i=0}^{\mathcal{M}} c_i \psi_i(x)] - f(x)$ к базисным функциям $\psi_i(x)$ [13, с. 279]:

$$\int\limits_{\Omega} \mathcal{N}(x)\psi_i(x)\,dx = 0. \tag{4}$$

С учётом введённых представлений и заданной постановке задачи (1), (2) эффективность решения (3) будет существенным образом зависеть от рациональности выбора набора базисных функций $\psi_i(x)$ $(i = \overline{0, \mathcal{M}})$ для Ω, которые удовлетворяют краевому условию (2).

2. Порядок выбора набора базисных функций. Решение проблемы рационального выбора набора базисных функций в методе Галёркина сводится к заданию глобальной [14, с. 98] для Ω полной системы $\psi_i(x) \in C(\Omega)$. Её формирование может быть выполнено [13, с. 294] путём построения для Ω набора $\vec{\zeta} = (\zeta_n)_N$ некоторых функции формы $\zeta_n(x) \in C^1(\Omega)$: $\zeta_n(x) > 0$, $x \in \Omega$. Определение $\zeta_n(x)$ при использовании классических интерполяционных методов (см. работу [15]) в соответствии с теоремой Вейерштрасса [16, с. 100] и её обобщением (теорема Вейерштрасса–Стоуна) позволяет установить полный набор базисных функций.

С учётом построения Ω в $\mathbb{E}^d$ и указанной возможности определения $\psi_i(x)$ через $\zeta_n(x)$, следуя статье [7], введём следующие представления.

Обозначим через $\mathcal{A} = (\mathbb{E}^d, \mathbb{E}^d, +)$ аффинное пространство над полем $\mathbb{F}$. Заданную область Ω в $\mathcal{A}$ определим в виде $\Omega = \{\sum_{n=1}^{N} \zeta_n v_n\}$, где ζ_n – барицентрические координаты.

Определение. *Барицентрическими координатами* ζ_n назовём набор $\vec{\zeta} = (\zeta_n)_N$ функции $\zeta_n(x) \in [0,1]$ $(x \in \Omega)$, они удовлетворяют условиям

$$\Delta\zeta_n(x) = 0, \quad x \in \operatorname{int}\Omega,$$
$$\zeta_n(x) = \frac{|v_{n'} - x|}{|v_{n'} - v_n|}, \quad x, v_{n'} \in e_m^n,$$
$$\zeta_n(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \backslash \{B_1^n, \ldots, B_{P_n}^n\}. \tag{5}$$

Замечание. Данное определение является обобщением стандартного определения барицентрических координат $0 \leqslant \zeta_n \leqslant 1$, $\sum_{n=1}^{N} \zeta_n = 1$ (см. работы [17–19]), в случаях, когда V – точечный базис; Ω – невырожденный симплекс в $\mathcal{A}$.

Введём множество мультииндексов

$$\mathbb{M}_s = \left\{ i = (i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots, i_N) : i_n \in \mathbb{Z}_+, \sum_{n \in [1,N]} i_n = s \right\},$$

где $s \in \mathbb{N}$, $\|\mathbb{M}_s\| = \dbinom{N+s-1}{N-1} = \dbinom{N+s-1}{s} = \mathcal{M}$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$.

Теорема. *Пусть коэффициенты* c_i $(i \in \mathbb{M}_s)$ *разложения (3) удовлетворяют однородной системе уравнений (4), а базисные функции* $\psi_i(x)$ *определяются по правилу*

$$\psi_i(x) = \prod_{n=1}^{N} \sum_{\tilde{i}=0}^{i_n} [a_{i\tilde{i}} (\zeta_n(x))^{\tilde{i}}], \tag{6}$$

тогда $\psi_i(x)$ *формируют полную систему в функциональном пространстве решений задачи (1), (2).*

Предполагается, что в выражении (6) $a_{i\tilde{i}}$ – коэффициенты, удовлетворяющие уравнению

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left(\alpha \prod_{n=1}^{N} \sum_{\tilde{i}=0}^{i_n} [a_{i\tilde{i}} \zeta_n^{\tilde{i}}] + \beta \sum_{n'=1}^{N} \frac{\partial \zeta_{n'}}{\partial \nu} \sum_{\tilde{i}=0}^{i_{n'}} \tilde{i} [a_{i\tilde{i}} \zeta_{n'}^{\tilde{i}-1}] \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq n'}}^{N} \sum_{\tilde{i}=0}^{i_n} [a_{i\tilde{i}} \zeta_n^{\tilde{i}}] - g \right) dx = 0 \tag{7}$$

и такие, что $\lim\limits_{s\to\infty} \sum_{i\in\mathbb{M}_s} \sum_{\tilde{i}=0}^{i_n} |a_{i\tilde{i}}| < \infty$.

Доказательство. Полноту системы (6) в функциональном пространстве решений задачи (1), (2) определяет для любого $\varepsilon > 0$ существование такого $\mathcal{M}_\varepsilon \in \mathbb{N}$, что для всех $\mathcal{M} \geqslant \mathcal{M}_\varepsilon$ и любого $x \in \Omega$ выполняется условие

$$|u(x) - u^{\mathcal{M}}(x)| < \varepsilon. \tag{8}$$

Из определения оператора $\mathcal{L}$ в (1) и удовлетворения базисными функциями (6) граничных условий (2) при (7), согласно [20], зададим оценку $\|u - u^{\mathcal{M}}\|_C = \sup\limits_{x\in\Omega} |u(x) - u^{\mathcal{M}}(x)|$ правой части неравенства (8) в виде

$$\|u - u^{\mathcal{M}}\|_C = \|\mathcal{L}^{-1}(f - \mathcal{L}u^{\mathcal{M}})\|_C \leqslant \|\mathcal{L}^{-1}\|_C \|f - \mathcal{L}u^{\mathcal{M}}\|_C \leqslant \delta \|f - \mathcal{P}_{\mathcal{M}} f\|_C \leqslant$$

$$\leqslant \delta(1 + \|\mathcal{P}_{\mathcal{M}}\|_C) \inf_{f^{\mathcal{M}} \in \mathcal{H}^{(\mathcal{M})}} |f - f^{\mathcal{M}}|, \tag{9}$$

где $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ – проекционный оператор; $\mathcal{H}^{(\mathcal{M})} \subset \mathcal{H}$; $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство; δ – независящая от $\mathcal{M}$ константа; $f^{\mathcal{M}}(x) = \sum_{i\in\mathbb{M}_s} f_i \psi_i(x)$ – наилучшее приближение функции $f(x)$ коэффициентами f_i.

Для подтверждения сходимости (9) необходимо доказать полноту системы $\psi_1(x), \ldots, \psi_{\mathcal{M}}(x)$. Приняв во внимание приведённое выше определение барицентрических координат $\zeta_n(x)$, которое с учётом соотношения (5) и теоремы о максимуме и минимуме гармонической функции [21, с. 211] обеспечивает для любого $x \in \Omega$ выполнение условий $\zeta_n(x) \in [0,1]$, $\sum_{n=1}^{N} \zeta_n(x) = 1$, $x = \sum_{n=1}^{N} \zeta_n(x) P_n$, неравенство Коши–Буняковского и справедливое для липшицевой функции неравенство $|f(x) - f(y)| < L^0 |x - y|$ $(x, y \in \Omega)$ при задании $f_i = f(x^i)$ ($x^i \in \Omega$ – узлы аппроксимации $f^{\mathcal{M}}(x)$), определим оценку

$$|f(x) - f^{\mathcal{M}}(x)| \leqslant \sum_{i\in\mathbb{M}_s} |f(x) - f_i| \prod_{n=1}^{N} \sum_{\tilde{i}=0}^{i_n} [|a_{i\tilde{i}}| (\zeta_n(x))^{\tilde{i}}] \leqslant L^0 \sum_{i\in\mathbb{M}_s} |x - x^i| \prod_{n=1}^{N} \sum_{\tilde{i}=0}^{i_n} [|a_{i\tilde{i}}| (\zeta_n(x))^{\tilde{i}}] =$$

$$= L^0 \sum_{i\in\mathbb{M}_s} \left| \sum_{n=1}^{N} (\zeta_n(x) - \zeta_n(x^i)) P_n \right| \prod_{n=1}^{N} \sum_{\tilde{i}=0}^{i_n} [|a_{i\tilde{i}}| (\zeta_n(x))^{\tilde{i}}] \leqslant$$

$$\leqslant L^0 \frac{1}{2} \max_{n_1, n_2 \in [1,N]} |P_{n_1} - P_{n_2}| \max_{n\in[1,N]} \sum_{i\in\mathbb{M}_s} \sum_{\tilde{i}=0}^{i_n} [|a_{i\tilde{i}}| (\zeta_n(x))^{\tilde{i}}].$$

С учётом предположения $\lim\limits_{s\to\infty}\sum_{i\in\mathbb{M}_s}\sum_{\tilde{i}=0}^{i_n}|a_{i\tilde{i}}|<\infty$, свойств барицентрических координат и определения Ω окончательно установим справедливость неравенства

$$\lim_{s\to\infty}|f(x)-f^{\mathcal{M}}(x)|<\infty,$$

из которого следует, что система базисных функций $\psi_i(x)$ полна. Тогда оценка (9) ограничена при $s\to\infty$ и неравенство (8) выполняется, что и требовалось доказать.

3. Определение барицентрических координат. В общем виде для Ω БК могут быть определены непосредственным решением задачи Дирихле (5) методом Фредгольма при представлений функций ζ_n логарифмическим потенциалом двойного слоя

$$\zeta_n(x)=\int\limits_{\partial\Omega}\Phi_n(y)\frac{\partial\Upsilon(x,y)}{\partial\nu_y}dS_y, \tag{10}$$

где

$$\Upsilon(x,y)=\frac{-\Gamma(d/2)}{2\pi^{d/2}}\begin{cases}\ln(|x-y|), & d=2,\\ |x-y|^{2-d}, & d\geqslant 3,\end{cases}$$

– функция Грина для оператора Лапласа в $\mathbb{E}^d$; ν_y – внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке y; dS_y – элемент $(d-1)$-мерной полиэдральной поверхности $\partial\Omega$; $\Phi_n(y)$ – неизвестная плотность на границе $y\in\partial\Omega$, однозначно определяемая из решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$\Phi_n(x)+\int\limits_{\partial\Omega}\Phi_n(y)\frac{\partial\Upsilon(x,y)}{\partial\nu_y}dS_y=2\zeta_n(x),\quad x\in\partial\Omega. \tag{11}$$

Другой способ определения БК состоит в нормировке $\zeta_n(x)=\omega_n(x)/\sum_{n=1}^N\omega_n(x)$ весовых функций $\omega_n(x)$, которые задаются как показано в работе [5]:

1) проецированием $\hat{x}_n^p\in B_p^n$ точки $x\in\Omega$ на составляющие $\partial\Omega$ элементы $\{B_1^n,\dots,B_{P_n}^n\}\subset\mathcal{B}$;

2) проецированием $\{B_1^n,\dots,B_{P_n}^n\}$ на сегменты $\{B_1'^n,\dots,B_{P_n}'^n\}$ единичной $(d-1)$-сферы $\partial\theta_x^0$, ограничивающей единичный шар θ_x^0 при $x\in\theta_x^0$;

3) взвешенным определением

$$\omega_n(x)=\sum_{p=1}^{P_n}\hat{\zeta}_n^p(\tilde{x}_p^n)\frac{\langle r_n^p,\nu_n^p\rangle}{|x-\hat{x}_p||r_n^p|}$$

через $\hat{\zeta}_n^p(\tilde{x}_p^n)$ – БК B_p^n точки $\tilde{x}_p^n$ проекции $x\in\Omega$ на B_p^n в направлении внешней нормали r_n^p сегмента $B_p'^n$, ν_n^p – орт внутренней нормали к B_p^n.

Выбор положения $\theta_x^0\subset\Omega$ выполняется при решении задачи конформного отображения [22, 23] точек v_n на $\partial\theta_x^0$ и x на θ_x^0 при расположении θ_x^0 в Ω для $x\in\theta_x^0$ [3–5]. Отображение может быть квазиконформным, при этом получаемые БК являются псевдогармоническими (см. [3, 4]).

Нахождение БК $\hat{\zeta}_n^p(x)$ для $x\in B_p^n$ выполняется по изложенному выше способу при $(\Omega=B_p^n)\subset\mathbb{E}^{d-1}$ с последующим рекуррентным определением $\hat{\zeta}_n^k(x)$ для $x\in B_k^n$ в $\mathbb{E}^{d-2}$.

Для приведённого рекуррентного способа определения БК начальные условия задают барицентрические координаты для $\mathbb{E}^1$ и $\mathbb{E}^2$. В случае $\mathbb{E}^1$ решение является тривиальным. Для $\mathbb{E}^2$ предполагается задавать БК, рассматривая задачи (10), (11) [7].

Решение интегрального уравнения (11) в $\mathbb{E}^2$ выполняется для построения Ω на $\mathbb{C}$ при параметризации $\partial\Omega=\bigcup_{n=1}^N\partial\Omega_n$ $(P=M=N)$ и вырождении $B_n\to\partial\Omega_n$ в прямолинейные отрезки:

$$\partial\Omega_n=\{x_n=x_n(t)=e_nt+v_n,\quad t\in[0,1]\},$$

где $e_n=v_{n+1}-v_n$.

С учётом введённой параметризации $\partial\Omega$ интеграл (10) зададим в виде [7]

$$\zeta_n(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n'=1}^{N}\int\limits_0^1 \varphi_{n'}^n(t)\,\mathrm{Im}\left[\frac{e_{n'}}{e_{n'}t + P_{n'} - x}\right]dt, \tag{12}$$

где функция плотности $\varphi_{n'}^n(t)$ для n-й БК ζ_n на $\partial\Omega_{n'}$ определяется решением интегрального уравнения (11), представленного соотношением [7]

$$\varphi_{n'}^n(t) + \sum_{n''=0}^{N-1}\int\limits_0^1 \varphi_{n''}^n(s)\mathcal{K}_{n'n''}(t,\tau)d\tau = \varsigma_{n'}^n(t). \tag{13}$$

В выражении (13)

$$\varsigma_{n'}^n(t) = 2\begin{cases} t, & n' = n-1, \\ 1-t, & n' = n, \\ 0, & n' \neq n-1, \quad n' \neq n, \end{cases}$$

$\mathcal{K}_{n'n''}(t,\tau)$ – ядро интегрального уравнения, определяемое по формуле

$$\mathcal{K}_{n'n''}(t,\tau) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\left[\dfrac{e_{n''}}{e_{n'}t + v_{n'} - e_{n''}\tau - v_{n''}}\right], & n' \neq n'', \\ 0, & n' = n''. \end{cases}$$

Решение интегрального уравнения (13) выполняется приближённо-аналитическим методом (см. статью [7]) при разложении ядра:

$$\mathcal{K}_{n'n''}(t,\tau) = \sum_{j=0}^{\infty}(2j+1)\lambda_j^{n'n''}(t)L_j(2\tau-1),$$

$$\lambda_j^{n'n''}(t) = \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi}\,\mathrm{Im}\left[Q_j\left(2\dfrac{e_{n'}t + v_{n'} - v_{n''}}{e_{n''}} - 1\right)\right], & n' \neq n'', \\ 0, & n' = n'', \end{cases} \tag{14}$$

где $L_j(\tau)$ и $Q_j(z)$ – многочлены Лежандра первого и второго рода соответственно [24]:

$$L_0(\tau) = 1, \quad L_1(\tau) = \tau, \quad L_j(\tau) = \frac{2j-1}{j}\tau L_{j-1}(\tau) - \frac{j-1}{j}L_{j-2}(\tau),$$

$$Q_0(z) = \mathrm{arcth}\,(z), \quad Q_1(z) = z\,\mathrm{arcth}(z) - 1,$$

$$Q_j(z) = \frac{2j-1}{j}zQ_{j-1}(z) - \frac{j-1}{j}Q_{j-2}(z), \quad \tau \in [-1,1], \quad z \in \mathbb{C}.$$

Определение ядра $\mathcal{K}_{n'n''}(t,\tau)$ соотношением (14) с учётом (12), (13) позволяет приближённо задать БК в $\mathbb{E}^2$ выражением (см. [7, 10])

$$\tilde{\zeta}_n^J(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n'=1}^{N}\sum_{j=0}^{J}\sqrt{2j+1}\,\mathrm{Im}\left[Q_j\left(2\frac{x - v_{n'}}{e_{n'}} - 1\right)\right]X_{n'j}^n, \tag{15}$$

обладающим экспоненциальной скоростью сходимости [7]:

$$\|\zeta_n(x) - \tilde{\zeta}_n^J(x)\|_{L_2} \leqslant \frac{\mathrm{const}\times J2^{-J}}{(2J+1)\sqrt{2J+3}}.$$

Здесь const – не зависящая от J положительная постоянная; $\vec{X}^n = (\mathbf{E}+\mathbf{T})^{-1}\vec{U}^n$ – блочный вектор размера $\tilde{N} = N(J+1)$, составленный из элементов $X^n_{n'j}$; $\mathbf{E}$ – единичная матрица размера $\tilde{N}\times\tilde{N}$; $\vec{U}^n$ – блочный вектор размера $\tilde{N}$, составленный из элементов

$$U^n_{n'j} = \begin{cases} 1, & (n = n' \vee n = n'-1) \wedge j = 0, \\ -1/3, & n = n' \wedge j = 1, \\ 1/3, & n = n'-1 \wedge j = 1, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$\mathbf{T}$ – блочная матрица размера $\tilde{N}\times\tilde{N}$, состоящая из элементов

$$T^{nn'}_{jj'} = \frac{-1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \operatorname{Im}\left[Q_{j'}\left(\frac{e_n}{e_{n'}}\tau + \frac{e_n + 2(v_n - v_{n'})}{e_{n'}} - 1\right)\right] L_j(\tau)d\tau. \tag{16}$$

Интеграл (16) может быть вычислен аналитически по правилам, представленным в [7, 10], или численно по квадратурному методу Гаусса–Лежандра с адаптивным выбором числа $\mathcal{J}$ узлов интегрирования в зависимости от порядков многочленов j и j' при определении погрешности $\rho_{\mathcal{J}}$ аппроксимации [25, с. 15]:

$$\rho_{\mathcal{J}} \leqslant \frac{2^{2\mathcal{J}+1}(\mathcal{J}!)^4}{(2\mathcal{J}+1)[(2\mathcal{J})!]^3}\left\|\operatorname{Im}\left[Q^{(2\mathcal{J})}_{j'}\left(\frac{e_n}{e_{n'}}\tau + \frac{e_n + 2(v_n - v_{n'})}{e_{n'}} - 1\right)\right] L_j(\tau) + \right.$$
$$\left. + \operatorname{Im}\left[Q_{j'}\left(\frac{e_n}{e_{n'}}\tau + \frac{e_n + 2(v_n - v_{n'})}{e_{n'}} - 1\right)\right] L^{(2\mathcal{J})}_j(\tau)\right\|_{C[0,1]},$$

где $Q^{(l)}_{j'}(z) = \dfrac{\partial^l Q_{j'}(z)}{\partial z^l}$, $L^{(l)}_{j'}(z) = \dfrac{\partial^l L_{j'}(z)}{\partial z^l}$.

4. Тестовые примеры и оценка точности метода. С целью определения предпочтительности барицентрического метода рассмотрим сравнительное с сеточными методами применение БМ к решению некоторых характерных краевых задач математической физики типа (1), (2) для $\Omega \subset \mathbb{E}^2$ с возрастающей степенью сложности. При этом для расширения области применимости метода в направлении решения уравнений с гладкими операторами также рассмотрим его реализацию в методе Ньютона–Канторовича [26, с. 136] при условии, что $\mathcal{L}$ – дифференцируемый по Фреше нелинейный оператор, относительно которого линейный оператор $\mathcal{L}'$ имеет ограниченный обратный. Зададим Ω вогнутым шестиугольником с координатами вершин на $\mathbb{C}$: $v_1 = -1.3 - 0.65i$, $v_2 = 0.2 - i$, $v_3 = 1.4 - 0.6i$, $v_4 = 0.35 - 0.1i$, $v_5 = 1.4 + 1.3i$, $v_6 = -0.5 + 0.75i$, здесь $i = \sqrt{-1}$. Группу примеров дифференциальных уравнений в частных производных составим из:

1) линейного ДУ второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + a^0 u = f_1;$$

2) линейного ДУ второго порядка

$$x_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - x_1\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + a^0 u = f_2;$$

3) нелинейного ДУ второго порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} - a^0 u\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f_1;$$

4) бигармонического ДУ

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} + a^0 u = f_1.$$

В рассматриваемых уравнениях $a^0 = 0.1$ – постоянный коэффициент,

$$f_1(x_1, x_2) = 0.25(x^2 + y^2), \quad f_2(x_1, x_2) = \sin(\pi(x^2 + y^2)).$$

Граничные условия (2) для примеров 1–4 определим вариантами:
а) $[\partial u/\partial \nu]_{\partial\Omega} = 0$;
б) $[u]_{\partial\Omega} = 0$.

С учётом свойств БК в качестве $\psi_i(x)$ для удовлетворения вариантам граничных условий а) выберем многочлены Лагранжевого типа:

$$\psi_i(x) = \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{i_n!} \prod_{\tilde{i}=0}^{i_n-1} (s\zeta_n(x) - \tilde{i}) = \frac{\Gamma(sx+1)}{i_n!\Gamma(sx+1-i_n)}, \tag{17}$$

для варианта б) выберем многочлены типа полиномов Лежандра:

$$\psi_i(x) = \prod_{n=1}^{N} \left[\frac{L_{i_n+1}(2\zeta_n(x)-1) - L_{i_n-1}(2\zeta_n(x)-1)}{2i_n+1}\right]. \tag{18}$$

Пример 1. Симметричный оператор $\mathcal{L}u$ задачи (1) при подстановке аппроксимации (3) в ДУ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + a^0 u = f$$

с учётом формулы Остроградского–Гаусса позволяет определить невязку (4) в слабой форме гладкости:

$$\sum_{i' \in \mathbb{M}_s} c_{i'} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_{i'}}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2}\frac{\partial \psi_{i'}}{\partial x_2}\, dx + a^0 \sum_{i' \in \mathbb{M}_s} c_{i'} \int\limits_{\Omega} \psi_i \psi_{i'}\, dx = \int\limits_{\Omega} f_1 \psi_i\, dx. \tag{19}$$

Обозначив

$$\vec{C} = (c_i)_{\mathcal{M}}, \quad \tilde{\mathbf{W}} = (\tilde{W}_{ii'})_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}}, \quad \tilde{W}_{ii'} = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_{i'}}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2}\frac{\partial \psi_{i'}}{\partial x_2}\, dx,$$

$$\mathbf{W} = (W_{ii'})_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}}, \quad W_{ii'} = \int\limits_{\Omega} \psi_i \psi_{i'}\, dx, \quad \vec{F} = (F_i)_{\mathcal{M}}, \quad F_i = \int\limits_{\Omega} f_1 \psi_i\, dx$$

при представлении (19) в матричной форме, определим коэффициенты (3) соотношением

$$\vec{C} = (\tilde{\mathbf{W}} + a^0 \mathbf{W})^{-1} \vec{F}. \tag{20}$$

При формировании элементов матриц $\mathbf{W}$, $\tilde{\mathbf{W}}$ интегралы по Ω вычисляется численно, а частные производные базисной функции ψ_i по переменным x_1, x_2 с учётом (15), (17), (18) задаются выражениями

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x_{1,2}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\partial \psi_i}{\partial \zeta_n}\frac{\partial \zeta_n}{\partial x_{1,2}},$$

где

$$\frac{\partial\zeta_n}{\partial x_{1,2}} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n'=1}^{N}\sum_{j=0}^{J}\sqrt{2j+1}\,\mathrm{Im}\left[\frac{\partial}{\partial x_{1,2}}\left(Q_j\left(2\frac{x-v_{n'}}{e_{n'}}-1\right)\right)\right]X^n_{n'j},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(Q_j\left(2\frac{x-v_{n'}}{e_{n'}}-1\right)\right) = -4\frac{1}{e_{n'}}Q'_j\left(2\frac{x-v_{n'}}{e_{n'}}-1\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(Q_j\left(2\frac{x-v_{n'}}{e_{n'}}-1\right)\right) = -4\frac{\sqrt{-1}}{e_{n'}}Q'_j\left(2\frac{x-v_{n'}}{e_{n'}}-1\right),$$

а $\partial\psi_i/\partial\zeta_n$ для (17), (18) задаётся соответствующими соотношениями

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial\zeta_n} = \frac{s\Gamma(sx+1)[\Psi(sx+1)-\Psi(sx+1-i_n)]}{i_n!\Gamma(sx+1-i_n)},$$

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial\zeta_n} = 2L_{i_n}(\zeta_n)\prod_{\substack{n'=1\\ n\neq n'}}^{N}\left[\frac{L_{i_{n'}+1}(2\zeta_{n'}-1)-L_{i_{n'}-1}(2\zeta_{n'}-1)}{2i_{n'}+1}\right],$$

$\Psi(x)$ – дигамма-функция.

Пример 2. Подставив аппроксимацию (3) в ДУ

$$x_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - x_1\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + a^0 u = f_2,$$

определим невязку (4) в виде

$$\sum_{i'\in\mathbb{M}_s} c_{i'}\int\limits_{\Omega}\psi_i\left(x_2^2\frac{\partial^2\psi_{i'}}{\partial x_1^2} - x_1\frac{\partial^2\psi_{i'}}{\partial x_2^2}\right)dx + a^0\sum_{i'\in\mathbb{M}_s} c_{i'}\int\limits_{\Omega}\psi_i\psi_{i'}\,dx = \int\limits_{\Omega} f_2\psi_i\,dx. \tag{21}$$

Обозначив

$$\vec{C} = (c_i)_{\mathcal{M}},\quad \tilde{\mathbf{W}} = (\tilde{W}_{ii'})_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}},\quad \tilde{W}_{ii'} = \int\limits_{\Omega}\psi_i\left(x_2^2\frac{\partial^2\psi_{i'}}{\partial x_1^2} - x_1\frac{\partial^2\psi_{i'}}{\partial x_2^2}\right)dx,$$

$$\mathbf{W} = (W_{ii'})_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}},\quad W_{ii'} = \int\limits_{\Omega}\psi_i\psi_{i'}\,dx,\quad \vec{F} = (F_i)_{\mathcal{M}},\quad F_i = \int\limits_{\Omega} f_2\psi_i\,dx$$

при представлении (21) в матричной форме, определим коэффициенты (3) аналогичным (20) соотношением.

При вычислении элементов матрицы $\tilde{\mathbf{W}}$ частные производные второго порядка базисной функции ψ_i по x_1, x_2 с учётом (15), (17), (18) определяются выражениями

$$\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x_{1,2}^2} = \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{\partial\psi_i}{\partial\zeta_n}\frac{\partial^2\zeta_n}{\partial x_{1,2}^2} + \frac{\partial\zeta_n}{\partial x_{1,2}}\sum_{n'=1}^{N}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial\zeta_n\partial\zeta_{n'}}\frac{\partial\zeta_{n'}}{\partial x_{1,2}}\right],$$

где

$$\frac{\partial^2\zeta_n}{\partial x_1^2} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n'=1}^{N}\sum_{j=0}^{J}\sqrt{2j+1}\,\mathrm{Im}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(Q_j\left(2\frac{x-v_{n'}}{e_{n'}}-1\right)\right)\right]X^n_{n'j},$$

$$\frac{\partial^2\zeta_n}{\partial x_2^2} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n'=1}^{N}\sum_{j=0}^{J}\sqrt{2j+1}\,\mathrm{Re}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(Q_j\left(2\frac{x-v_{n'}}{e_{n'}}-1\right)\right)\right]X^n_{n'j},$$

а $\dfrac{\partial^2\psi_i}{\partial\zeta_n\partial\zeta_{n'}}$ для (15), (16) задаётся соответствующими соотношениями

$$\frac{\partial^2\psi_i}{\partial\zeta_n\partial\zeta_{n'}}=\frac{s^2\Gamma(sx+1)}{i_n!\Gamma(sx+1-i_n)}[(\Psi(sx+1)-\Psi(sx+1-i_n))^2+\Psi^{(1)}(sx+1)-\Psi^{(1)}(sx+1-i_n)],$$

$$\frac{\partial^2\psi_i}{\partial\zeta_n\partial\zeta_{n'}}=\prod_{\substack{n''=1\\ n\neq n''\\ n'\neq n''}}^{N}\left[\frac{L_{i_{n'}+1}(2\zeta_{n'}-1)-L_{i_{n'}-1}(2\zeta_{n'}-1)}{2i_{n'}+1}\right]\times$$

$$\times\begin{cases}4L_{i_n}(2\zeta_n-1)L_{i_{n'}}(2\zeta_{n'}-1), & \text{если } n\neq n',\\ \dfrac{i_n}{\zeta_n-\zeta_n^2}(L_{i_n-1}(2\zeta_n-1)-(2\zeta_n-1)L_{i_n}(2\zeta_n-1)), & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

$\Psi^{(1)}$ – полигамма-функция первого порядка (тригамма-функция).

Пример 3. Подставив аппроксимацию (3) в ДУ

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}-a^0u\frac{\partial u}{\partial x_2}-\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}=f_1,$$

определим невязку (4) в виде

$$\sum_{i'\in\mathbb{M}_s}c_{i'}\int\limits_\Omega\psi_i\left(\frac{\partial\psi_{i'}}{\partial x_1}-\frac{\partial^2\psi_{i'}}{\partial x_2^2}\right)dx-a^0\sum_{i''\in\mathbb{M}_s}\sum_{i'\in\mathbb{M}_s}c_{i''}c_{i'}\int\limits_\Omega\psi_i\psi_{i''}\frac{\partial\psi_{i'}}{\partial x_2}\,dx=\int\limits_\Omega f_1\psi_i\,dx. \tag{22}$$

Обозначив

$$\vec{C}=(c_i)_{\mathcal{M}},\quad \tilde{\mathbf{W}}=(\tilde{W}_{ii'})_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}},\quad \tilde{W}_{ii'}=\int\limits_\Omega\psi_i\left(\frac{\partial\psi_{i'}}{\partial x_1}-\frac{\partial^2\psi_{i'}}{\partial x_2^2}\right)dx,$$

$$\mathbf{W}^{i''}=(W_{ii'}^{i''})_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}},\quad W_{ii'}^{i''}=\int\limits_\Omega\psi_i\psi_{i''}\frac{\partial\psi_{i'}}{\partial x_2}\,dx,\quad \vec{F}=(F_i)_{\mathcal{M}},\quad F_i=\int\limits_\Omega f_1\psi_i\,dx$$

при представлении (22) в матричной форме, определим коэффициенты (3) методом Ньютона–Канторовича [26, с. 136] при итерационном решении

$$\vec{C}^{[k+1]}=\vec{C}^{[k]}-(\mathbf{H}^{[k]})^{-1}\left[\tilde{\mathbf{W}}\vec{C}^{[k]}-a^0\sum_{i''\in\mathbb{M}_s}c_{i''}^k\mathbf{W}^{i''}\vec{C}^{[k]}-\vec{F}\right],$$

где $\vec{C}^{[k]}=(c_i^k)_{\mathcal{M}}$, $k\in\mathbb{N}$, $\mathbf{H}^{[k]}=(H_{ii'}^k)_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}}$,

$$H_{ii'}^k=\tilde{W}_{ii'}-\sum_{i''\in\mathbb{M}_s}c_{i''}^kW_{ii'}^{i''}+\begin{cases}\sum\limits_{\hat{i}\in\mathbb{M}_s}c_{\hat{i}}^kW_{i\hat{i}}^{i''}, & \text{если } i''=i,\\ 0, & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

начальное приближение при $k=1$ определяется соотношением $\vec{C}^1=(\tilde{\mathbf{W}}-a^0\hat{\mathbf{W}})^{-1}\vec{F}$ для

$$\hat{\mathbf{W}}=(\hat{W}_{ii'})_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}},\quad \hat{W}_{ii'}=\int\limits_\Omega\psi_i\frac{\partial\psi_{i'}}{\partial x_2}\,dx.$$

Пример 4. Симметричный оператор $\mathcal{L}u$ задачи 4 при подстановке аппроксимации (3) в ДУ

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} + a^0 u = f_1$$

позволяет определить невязку (4) в слабой форме гладкости:

$$\sum_{i' \in \mathbb{M}_s} c_{i'} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 \psi_{i'}}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 \psi_{i'}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 \psi_{i'}}{\partial x_2^2}\, dx +$$

$$+ a^0 \sum_{i' \in \mathbb{M}_s} c_{i'} \int\limits_{\Omega} \psi_i \psi_{i'}\, dx = \int\limits_{\Omega} f_1 \psi_i\, dx. \tag{23}$$

Обозначив

$$\vec{C} = (c_i)_{\mathcal{M}}, \quad \tilde{\mathbf{W}} = (\tilde{W}_{ii'})_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}}, \quad \tilde{W}_{ii'} = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 \psi_{i'}}{\partial x_1^2} + 2\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial^2 \psi_{i'}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_2^2}\frac{\partial^2 \psi_{i'}}{\partial x_2^2}\, dx,$$

$$\mathbf{W} = (W_{ii'})_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}}, \quad W_{ii'} = \int\limits_{\Omega} \psi_i \psi_{i'}\, dx, \quad \vec{F} = (F_i)_{\mathcal{M}}, \quad F_i = \int\limits_{\Omega} f_1 \psi_i\, dx$$

при представлении (22) в матричной форме, определим коэффициенты (3) аналогичным (20) соотношением.

В указанных примерах частные производные первого и второго порядков для БК ζ_n определяются через производные по многочленам Лежандра второго рода, которые при рекуррентном обозначении

$$Q_j^{(0)}(z) = Q_j(z), \quad Q_j^{(l)}(z) = \frac{dQ_j^{(l-1)}(z)}{dz}$$

могут быть определены непосредственным дифференцированием и индукцией по l для $j \in \in \{0, 1\}$:

$$Q_0^{(l)}(z) = \frac{(-1)^l l!}{2l}\left[\frac{1}{(z-1)^l} - \frac{1}{(z+1)^l}\right],$$

$$Q_1^{(l)}(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{1-z^2} + \operatorname{arcth}(z), & l = 1, \\ \dfrac{(-1)^l l!}{2l(l-1)}\left[\dfrac{l+z}{(z+1)^l} + \dfrac{l-z}{(z-1)^l}\right], & l > 1, \end{cases}$$

и обобщением для $j \in \mathbb{N}$:

$$Q_j^{(l)}(z) = \frac{(2j-1)zQ_{j-1}^{(l)}(z) - (j-1+l)Q_{j-2}^{(l)}(z)}{j-l}.$$

Сравнительные результаты оценки скорости сходимости барицентрического метода и метода конечных элементов (МКЭ) для вариантов а) и б) приведены в таблице.

На этапах формирования расчётных сеток для численного интегрирования в БМ применялись решения (см. [27]) с программной реализацией алгоритма генерации адаптивной неструктурированной сетки из библиотеки Ani2D. Для решения ДУ в частных производных МКЭ использовалось программное обеспечение FreeFem++v3.61-1-win64. Апостериорная оценка скорости сходимости вычислялась с использованием неравенств типа (9) при определении нормы в $L_2(\Omega)$.

Таблица. Результаты оценки сходимости

$\mathcal{M}$	МКЭ		БМ	
	а)	б)	а)	б)
Пример 1				
4	0.030005	0.225204	0.097861	0.240479
10	0.012048	0.219874	0.020587	0.13862
20	0.007277	0.205374	0.002131	0.079493
35	0.003588	0.186133	0.0007	0.041673
56	0.002271	0.174849	0.000085	0.023849
Пример 2				
4	0.535657	0.901163	0.831472	1.062828
10	0.440127	0.76477	0.450632	0.544063
20	0.243675	0.642444	0.148648	0.197396
35	0.095659	0.624934	0.036305	0.069926
56	0.082526	0.544636	0.005211	0.028436
Пример 3				
4	0.454646	0.823735	0.281374	0.961592
10	0.386519	0.746559	0.028806	0.49224
20	0.247586	0.62136	0.003795	0.178594
35	0.16764	0.534667	0.000861	0.061265
56	0.114395	0.372022	0.000208	0.026728
Пример 4				
4	0.345262	0.91015	0.294567	1.075723
10	0.120197	0.901707	0.0352986	0.619888
20	0.0644248	0.896582	0.004955	0.2747493
35	0.0303	0.8383921	0.001206	0.10643
56	0.014358	0.746785	0.000322	0.045374

Заключение. Полученные результаты свидетельствуют о предпочтительном применении по отношению к сеточным методам барицентрического метода в решении краевых задач математической физики. При одинаковом порядке аппроксимации $\mathcal{M}$ БМ позволяет существенно (в среднем от 2,5 до 5 раз) повысить точность численного решения. Относительный выигрыш возрастает с увеличением l – порядка ДУ в частных производных (1). Последующее развитие барицентрического метода в направлении повышения вычислительной эффективности состоит в решении задачи рационального выбора коэффициентов интерполяции базисных функций вида (6) при учёте граничных условий и особенностей представления известной функции f. Основная сложность БМ заключается в определении гармонических барицентрических координат для $\Omega \subset \mathbb{E}^d$ при $d > 2$. Авторы статьи надеются, что представление БМ и сформулированные направления модификации вызовут интерес читателей и приведут к развитию барицентрического метода как эффективного дополнения сеточных методов в решении краевых задач математической физики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Полянский И.С.* Барицентрический метод в вычислительной электродинамике. Орёл, 2017.
2. *Полянский И.С.* Барицентрический метод в задаче оптимального управления формой отражающей поверхности зеркальной антенны // Мат. моделирование. 2017. Т. 29. № 11. С. 140–150.
3. *Полянский И.С.* Барицентрические координаты Пуассона для многомерной аппроксимации скалярного потенциала внутри произвольной области (Часть 1) // Вестн. Саратовского гос. тех. ун-та. 2015. Т. 78. № 1. С. 30–36.

4. *Полянский И.С.* Барицентрические координаты Пуассона для многомерной аппроксимации скалярного потенциала внутри произвольной области (Часть 2) /// Вестн. Саратовского гос. тех. ун-та. 2015. Т. 78. № 1. С. 36–42.
5. *Полянский И.С.* Барицентрические координаты Пуассона–Римана // Информатика и автоматизация. 2016. Т. 49. № 6. С. 32–48.
6. *Полянский И.С., Пехов Ю.С.* Барицентрический метод в решении сингулярных интегральных уравнений электродинамической теории зеркальных антенн // Информатика и автоматизация. 2017. Т. 54. № 5. С. 244–262.
7. *Ильинский А.С., Полянский И.С.* Приближённый метод определения гармонических барицентрических координат для произвольных многоугольников // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2019. Т. 59. № 3. С. 38–55.
8. *Архипов Н.С., Полянский И.С., Степанов Д.Е.* Барицентрический метод в задачах анализа поля в регулярном волноводе с произвольным поперечным сечением // Антенны. 2015. Т. 212. № 1. С. 32–40.
9. *Полянский И.С.* Векторный барицентрический метод в вычислительной электродинамике // Информатика и автоматизация. 2017. Т. 51. № 2. С. 206–222.
10. *Полянский И.С.* О применении барицентрического метода в численном решении внутренней задачи электродинамики // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2018. Т. 21. № 3. С. 36–42.
11. *Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г.* Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М., 1996.
12. *Понтрягин Л.С.* Основы комбинаторной топологии. М., 1986.
13. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближённые методы высшего анализа. М., 1950.
14. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галёркина. М., 1988.
15. *Гончаров В.Л.* Теория интерполирования и приближения функций. М., 1954.
16. *Дзядык В.К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М., 1977.
17. *Кострикин А.И., Манин Ю.И.* Линейная алгебра и геометрия. М., 1986.
18. *Балк М.Б., Болтянский В.Г.* Геометрия масс. М., 1987.
19. *Александров П.С., Пасынков Б.А.* Введение в теорию размерности. Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерности. М., 1973.
20. *Даугавет И.К.* Теория приближённых методов. Линейные уравнения. СПб., 2006.
21. *Романовский П.И.* Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. М., 1980.
22. *Радыгин В.М., Полянский И.С.* Модифицированный метод последовательных конформных отображений наперед заданных многоугольных областей // Вестн. Томского гос. ун-та. Математика и механика. 2016. Т. 39. № 1. С. 25–35.
23. *Радыгин В.М., Полянский И.С.* Методы конформных отображений многогранников в $\mathbb{R}^3$ // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. № 1. С. 60–68.
24. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция, функция Лежандра. М., 1965.
25. *Михлин С.Г.* Погрешности вычислительных процессов. Тбилиси, 1983.
26. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М., 1969.
27. *Василевский Ю.В., Данилов А.А., Липников К.Н., Чугунов В.Н.* Автоматизированные технологии построения неструктурированных расчётных сеток. М., 2016.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Академия Федеральной службы охраны
Российской Федерации, г. Орёл

Поступила в редакцию 26.09.2019 г.
После доработки 26.03.2020 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.