ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 6, с. 846–849

## КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.925.42

# ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ ЯКОБИАНА В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ И ГЛОБАЛЬНЫЕ ИЗОХРОННЫЕ ЦЕНТРЫ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

© 2022 г. **В. В. Амелькин**

Доказано, что с точностью до невырожденного линейного преобразования вещественная гамильтонова система $\dot{x} = -y - P(x)$, $\dot{y} = x + (y + P(x))P'(x)$, где $P(x)$ – произвольный полином степени $k \geqslant 2$, является единственной среди вещественных полиномиальных гамильтоновых систем общего вида $\dot{x} = -y - P(x, y)$, $\dot{y} = x + Q(x, y)$, $P'_x(x, y) \equiv Q'_y(x, y)$, где полиномы $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ не содержат свободных и линейных членов, которая имеет в особой точке $O(0, 0)$ изохронный глобальный центр. Полученный результат даёт отрицательный ответ на вопрос, поставленный М. Сабатини: существуют ли полиномиальные гамильтоновы дифференциальные системы с парой Якоби, имеющие изохронные неглобальные центры? На основе этих двух утверждений доказано, что гипотеза якобиана верна в двумерном случае. Именно, все невырожденные полиномиальные отображения $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ с постоянным якобианом исчерпываются отображениями, представимыми конечным числом композиций линейных преобразований и пар Якоби вида $(x, y + P(x))$, где $P(x)$ – произвольный многочлен степени не меньшей двух.

DOI: 10.31857/S0374064122060103, EDN: CDPPMQ

**Введение. Основные понятия, определения.** Следующая гипотеза, называемая гипотезой якобиана, сформулирована в 1939 г. О.Н. Келлером [1]: *каждое полиномиальное отображение $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ с не обращающимся в нуль постоянным определителем Якоби является глобально обратимым и имеет полиномиальное обратное отображение.*

Эта гипотеза первоначально была сформулирована для комплексных отображений. Но как отмечено, например, в работах [2, 3], решение указанной гипотезы равносильно её решению или в $\mathbb{R}^n$, или в $\mathbb{C}^n$.

Не останавливаясь на обзоре частных результатов, связанных с этой гипотезой, отметим работу [4] (и приведённую в ней библиографию), касающуюся вещественного двумерного случая.

Напомним, в частности, что пара $(f(x, y), g(x, y))$ вещественных полиномов таких, что $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$, а определитель их матрицы Якоби является ненулевой константой, называется *парой Якоби*.

Рассмотрим вещественную двумерную автономную дифференциальную систему

$$\dot{x} = -y - P(x, y), \quad \dot{y} = x + Q(x, y), \tag{1}$$

где $P$ и $Q$ – голоморфные в некоторой окрестности точки $O(0, 0)$ функции, не содержащие в своих разложениях в степенные ряды по переменным $x$ и $y$ свободных и линейных членов.

Как известно, особая точка $O(0, 0)$ системы (1) является либо центром, либо негрубым фокусом. Будем считать, что точка $O(0, 0)$ системы (1) является центром. *Областью центра* (обозначают $N_0$) называют максимальное инвариантное открытое связное множество, состоящее из циклов, окружающих особую точку $O(0, 0)$ системы (1). Говорят, что центр $O(0, 0)$ системы (1) является *глобальным*, если $N_0 = \mathbb{R}^2$, т.е. если каждое решение системы (1) является периодическим.

Напомним также, что центр $O(0, 0)$ системы (1) называется *изохронным*, если период обхода изображающей точкой каждого цикла из области этого центра равен $2\pi$.

Пусть далее $y^+$ и $y^-$ – соответственно положительная и отрицательная полуоси оси $Oy$ прямоугольной декартовой системы координат $Oxy$. Изохронный центр $O(0, 0)$ системы (1) называется *сильно изохронным*, если, дополнительно, изображающая точка, выходящая из точки полуоси $y^+$, пересечёт полуось $y^-$ в первый раз через время $\pi$.

В работе [4] (см. также [5]) указано на связь изохронных центров полиномиальных систем вида (1) с гипотезой якобиана в двумерном случае и приведён класс полиномиальных систем с глобальными изохронными центрами. Таким классом являются гамильтоновы системы вида

$$\dot{x} = -y - P(x), \quad \dot{y} = x + (y + P(x))P'(x), \tag{2}$$

где $P(x)$ – произвольный полином степени $k \geqslant 2$.

**Замечание.** Заметим, что класс систем вида (2) ранее получен в работах [6, 7].

Отметим и один из основных результатов, касающихся проблемы изохронности центра, который состоит в следующем (см., например, [8, теорема 2]): *для того чтобы система (1) имела в особой точке $O(0,0)$ изохронный центр, необходимо и достаточно существование голоморфного в окрестности точки $x = y = 0$ преобразования*

$$u = x + \sum_{i+j=2}^{\infty} \alpha_{ij} x^i y^j = x + \alpha(x,y), \quad v = y + \sum_{i+j=2}^{\infty} \beta_{ij} x^i y^j = y + \beta(x,y), \tag{3}$$

*приводящего систему (1) к виду*

$$\dot{u} = -v, \quad \dot{v} = u. \tag{4}$$

Приведём и используемое ниже такое утверждение [9, теорема 2]: *для того чтобы система (1) имела в особой точке $O(0,0)$ изохронный центр и была гамильтоновой системой, необходимо и достаточно, чтобы существовали функции вида (3) такие, что справедливы тождества*

$$y + P(x,y) \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(u^2 + v^2), \ x + Q(x,y) \equiv \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(u^2 + v^2)$$

*и*

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \equiv 1. \tag{5}$$

Наконец, сформулируем ещё одно утверждение [4, теорема 2.3], на которое будем ссылаться в дальнейшем: *пусть $\Phi$ – полиномиальное отображение с не обращающимся в нуль определителем Якоби такое, что $\Phi(0,0) = (0,0)$. Тогда следующие свойства эквивалентны:*

*(i) особая точка $O(0,0)$ является глобальным центром для гамильтоновой дифференциальной системы ($1'$), т.е. системы (1) с условием $P'_x(x,y) \equiv Q'_y(x,y)$;*

*(ii) отображение $\Phi$ является глобальным диффеоморфизмом плоскости $\mathbb{R}^2$ на себя.*

**Основные результаты.** Адаптируя отмеченные выше утверждения из работ [8, 9] к полиномиальному случаю, докажем, что верна следующая

**Теорема 1.** *Для того чтобы полиномиальная система ($1'$) имела в особой точке $O(0,0)$ глобальный изохронный центр, необходимо и достаточно, чтобы она с точностью до невырожденного линейного преобразования имела вид (2).*

**Доказательство. Необходимость.** Пусть с точностью до невырожденного линейного преобразования полиномиальная система ($1'$) имеет в особой точке $O(0,0)$ глобальный изохронный центр. Тогда, считая, что в формулах (3) голоморфные функции $\alpha$ и $\beta$ определяются степенными рядами с сопряжёнными радиусами сходимости $r_1 = r_2 = +\infty$ (т.е. рассматривая случай общего положения) и имея в виду систему (4), получаем такие соотношения:

$$(y + P(x,y))\frac{\partial u}{\partial x} - (x + Q(x,y))\frac{\partial u}{\partial y} = v,$$

$$-(y + P(x,y))\frac{\partial v}{\partial x} + (x + Q(x,y))\frac{\partial v}{\partial y} = u, \tag{6}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – произвольные полиномы степени $k \geqslant 2$.

Из тождеств (6) следует, что

$$y + P(x,y) = \frac{(x + Q(x,y))u'_y + v}{u'_x} \equiv \frac{(x + Q(x,y))\alpha'_y(x,y) + (y + \beta(x,y))}{1 + \alpha'_x(x,y)},$$

$$x + Q(x,y) = \frac{(y + P(x,y))v'_x + u}{v'_y} \equiv \frac{(y + P(x,y))\beta'_x(x,y) + (x + \alpha(x,y))}{1 + \beta'_y(x,y)}. \qquad (7)$$

Так как $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – полиномы, то

$$u = x + \alpha(y), \;\; v = y + \beta(x). \qquad (8)$$

Но из представлений (7) и (8) вытекают равенства

$$u = x, \quad v = y + \beta(x), \qquad (9)$$

где $\beta(x)$ – полином. Соотношения (9) означают, что выполняется тождество (5), а

$$(y + P(x,y)) \equiv (y + \beta(x)), \quad x + Q(x,y) \equiv x + (y + P(x))P'(x),$$

т.е. получаем правые части системы (2).

Отметим, в частности, что система (2) всегда имеет нечётную степень $2k-1$.

**Достаточность.** Пусть с точностью до невырожденного линейного преобразования полиномиальная система $(1')$ имеет вид (2). Отображение $u = x$, $v = y + P(x)$, где $P(x)$ – произвольный полином степени $k \geqslant 2$, имеет определитель Якоби, тождественно равный единице, и определяет биголоморфизм плоскости на себя. При этом, как показано, например, в [4], любое решение соответствующей системы (2), отличное от тривиального, является $2\pi$-периодическим решением, а значит, рассматриваемая система имеет глобальный изохронный центр. Теорема доказана.

Далее, приведём уже ставшие очевидными такие утверждения:

1) *пара Якоби* $(x, y + P(x))$ *является полиномиальным автоморфизмом плоскости* $\mathbb{R}^2$, *где соответствующая система Гамильтона – это система (2);*

2) *гамильтониан системы (2) имеет вид*

$$H(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + (y + P(x))^2)$$

*(в этом случае говорят, что центр* $O(0,0)$ *системы (2) является тривиальным);*

3) *дифференцирование по* $t$ *первого уравнения системы (2) в силу самой системы приводит к линейному дифференциальному уравнению второго порядка* $\ddot{x} + x = 0$, *а значит, как это следует, например, из работы [10], система (2) имеет в особой точке* $O(0,0)$ *сильно изохронный центр.*

Теорема 1 и приведённые утверждения позволяют сделать следующие выводы.

**Теорема 2.** *С точностью до невырожденного линейного преобразования система (2) является единственной среди полиномиальных систем вида* $(1')$, *имеющей в особой точке* $O(0,0)$ *глобальный изохронный центр, который оказывается глобальным сильно изохронным центром.*

Из теорем 1 и 2, утверждения 1) настоящей работы и теоремы 2.3 работы [4], сформулированной выше, следует, что гипотеза якобиана в двумерном случае равносильна уже доказанному факту, что система (2) с точностью до невырожденного линейного преобразования является единственной среди полиномиальных систем вида $(1')$, которая имеет в особой точке $O(0,0)$ глобальный изохронный (глобальный сильно изохронный) центр.

Таким образом, имеет место следующий принципиальный результат.

**Теорема 3.** *Гипотеза якобиана верна в двумерном случае. Все невырожденные полиномиальные отображения* $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ *с постоянным якобианом исчерпываются отображениями, представимыми конечным числом композиций линейных преобразований и пар Якоби вида* $(x, y + P(x))$, *где* $P(x)$ *– произвольный многочлен степени не меньшей двух.*

Отметим, что указанная в теореме 3 пара Якоби использовалась и при решении другой гипотезы (см. работу [11]) из теории полиномиальных изохронных (сильно изохронных) центров систем Льенара

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x + A(x) - yB(x), \tag{10}$$

исследуемых во всей фазовой плоскости (т.е. глобально). Следует, однако, отметить, что область единственного изохронного (сильно изохронного) центра $O(0,0)$ систем Льенара (10), будучи областью неограниченной, глобальной не является.

Указанная пара Якоби использовалась автором и в работе [12] при исследовании изохронных (сильно изохронных) фокусов систем Льенара (10).

В заключение рассмотрим гамильтонову систему [5]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - x^2 - 3x^2y - x^4 - 3x^4y - x^6y, \\ \dot{y} &= x + 2xy + 3xy^2 + 4x^3y + 6x^3y^2 + 3x^5y^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Эта система линеаризуется локальной голоморфной в окрестности особой точки $O(0,0)$ заменой

$$u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad v = \frac{x^2 + (1+x^2)^2}{\sqrt{1+x^2}}y. \tag{12}$$

Особо подчеркнём, что якобиан $J$ матрицы Якоби преобразования (12) единичный, т.е. $J = u'_x v'_y - u'_y v'_x \equiv 1$. Приведённая система (11) имеет неглобальный нетривиальный изохронный центр $O(0,0)$. Гамильтонианом системы (11) является

$$H(x,y) = \frac{x^2}{2} + x^2(1+x^2)y + \frac{1}{2}(1+x^2)^3y^2,$$

а линия уровня $H(x,y) = 1/2$ представляет собой неограниченную кривую.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Keller O.H.* Ganze Cremona–Transformationen // Monats. Math. Physik. 1939. V. 47. P. 299–306.
2. *Chavarriga J.A, Sabatini M.* A survey of isochronous centers // Qual. Th. Dynam. Systems. 1999. V. 1. № 1. P. 1–70.
3. *Bass H., Connell E.H., Wright D.* The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 7. P. 287–330.
4. *Sabatini M.* A connection between isochronous Hamiltonian centres and the Jacobian Conjecture // Nonl. Anal. 1998. V. 34. P. 829–838.
5. *Cima A., Manosaš F., Villadelprat J.* Isochronicity for several classes of Hamiltonian systems // J. Differ. Equat. 1999. V. 157. P. 373–413.
6. *Амелькин В.В., Лукашевич Н.А.* О периодах решений некоторых автономных систем // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6. № 12. С. 2115–2120.
7. *Амелькин В.В., Лукашевич Н.А.* Признаки существования центра и его изохронность // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10. № 4. С. 585–590.
8. *Воробьев А.П.* Об изохронных системах двух дифференциальных уравнений // Докл. АН БССР. 1963. Т. 7. № 3. С. 155–156.
9. *Воробьев А.П.* Построение изохронных систем двух дифференциальных уравнений // Докл. АН БССР. 1963. Т. 7. № 8. С. 513–515.
10. *Руденок А.Е.* Сильная изохронность центра. О периодах предельных циклов системы Льенара // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 5. С. 811–819.
11. *Амелькин В.В.* Положительное решение одной гипотезы в теории полиномиальных изохронных центров систем Льенара // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 2. С. 147–152.
12. *Амелькин В.В.* Изохронные и сильно изохронные фокусы полиномиальных систем Льенара // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 1. С. 3–10.


Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию 10.01.2022 г.
После доработки 10.01.2022 г.
Принята к публикации 09.03.2022 г.