ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 6, с. 850–864

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МОСКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ*)

Ниже публикуются**) аннотации докладов, заслушанных в весеннем семестре 2022 г. (предыдущее сообщение о работе семинара см. в журнале “Дифференц. уравнения”. 2021. Т. 57. № 11).

DOI: 10.31857/S0374064122060115, EDN: CDVNQG

А. Н. Ветохин (Москва) “Бэровская классификация асимптотической топологической энтропии семейств неавтономных динамических систем, непрерывно зависящих от параметра” (25 февраля 2022 г.).

Пусть (X,d) – компактное метрическое пространство, а $\mathcal{F}\equiv(f_1,f_2,\ldots)$ – последовательность непрерывных отображений из X в X. Для каждого натурального n через F_n обозначим подпоследовательность $(f_n,f_{n+1},\ldots)$ последовательности $\mathcal{F}$. Наряду с исходной метрикой d определим на X дополнительную систему метрик

$$d_k^{F_n}(x,y)=\max_{0\leqslant i<n} d(f_n^{\circ i}(x),f_n^{\circ i}(y)),\quad f_n^{\circ 0}\equiv \mathrm{id}_X,\quad f_n^{\circ(i+1)}\equiv f_{n+i}\circ f_n^{\circ i},\quad x,y\in X,\quad k,n\in\mathbb{N}.$$

Для каждых $k,n\in\mathbb{N}$ и $\varepsilon>0$ обозначим через $N_d(F_n,\varepsilon,k)$ максимальное число точек в X, попарные $d_k^{F_n}$-расстояния между которыми больше, чем ε. Тогда *топологическая энтропия* и *асимптотическая топологическая энтропия* неавтономной динамической системы $\mathcal{F}$ определяются формулами [1]

$$h_{\mathrm{top}}(\mathcal{F})=\lim_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\ln N_d(F_1,\varepsilon,k),\tag{1}$$

$$h^*_{\mathrm{top}}(\mathcal{F})=\sup_{n\in\mathbb{N}}\lim_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\ln N_d(F_n,\varepsilon,k).\tag{2}$$

Отметим, что величины (1) и (2) не зависят от выбора метрики, порождающей на X ту же, что и d, топологию; это и объясняет, почему энтропии (1) и (2) называются топологическими.

Непосредственно из формул (1) и (2) вытекает неравенство $h_{\mathrm{top}}(\mathcal{F})\leqslant h^*_{\mathrm{top}}(\mathcal{F})$. Величины (1) и (2) могут не совпадать. Кроме того, точную верхнюю грань в формуле (2) (по $n\in\mathbb{N}$) нельзя заменить максимумом, как показывает следующая

Лемма. *Если X – канторово совершенное множество, то для некоторой динамической системы $\mathcal{F}$ выполнены неравенства*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\ln N(F_n,\varepsilon,k)<h^*_{\mathrm{top}}(\mathcal{F}),\quad n\in\mathbb{N}.$$

По метрическому пространству $\mathcal{M}$ и семейству последовательностей непрерывных отображений

$$\mathcal{F}(\mu,\cdot\,)\equiv(f_1(\mu,\cdot\,),f_2(\mu,\cdot\,),\ldots),\quad \mu\in\mathcal{M},\quad f_i:\mathcal{M}\times X\to X,\quad i\in\mathbb{N},\tag{3}$$

*) Семинар основан В.В. Степановым в 1930 г., впоследствии им руководили В.В. Немыцкий, Б.П. Демидович, В.А. Кондратьев, В.М. Миллионщиков, Н.Х. Розов. В настоящее время руководители семинара – И.Н. Сергеев, И.В. Асташова, А.В. Боровских, учёный секретарь семинара – В.В. Быков, e-mail: vvbykov@gmail.com.

**) Составитель хроники И.Н. Сергеев.

образуем функции

$$\mu \mapsto h_{\mathrm{top}}(\mathcal{F}(\mu, \cdot\,)), \tag{4}$$

$$\mu \mapsto h^*_{\mathrm{top}}(\mathcal{F}(\mu, \cdot\,)). \tag{5}$$

Для произвольных метрических пространств $\mathcal{M}$ и X и семейства стационарных последовательностей (3) функция (4) принадлежит второму классу Бэра [2], а если $\mathcal{M}$ и X – множества Кантора на отрезке $[0,1]$, то для некоторого семейства стационарных последовательностей (3) функция (4) всюду разрывна и не принадлежит первому классу Бэра [3].

Для произвольных $\mathcal{M}$ и X и любого семейства (3) функция (4) принадлежит третьему классу Бэра [4], а если X – отрезок прямой и $\mathcal{M}$ – множество иррациональных чисел на отрезке $[0,1]$, то для некоторого семейства (3) функция (4) всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра [5]. Аналогичные результаты верны и для функции (5).

Теорема 1. *Для любых метрических пространств $\mathcal{M}$ и X и семейства (3) функция (5) принадлежит третьему классу Бэра на $\mathcal{M}$.*

Теорема 2. *Если X – канторово совершенное множество, а $\mathcal{M}$ – множество иррациональных чисел на отрезке $[0,1]$ со стандартной метрикой, то для некоторого семейства (3) функция (5) всюду разрывна и не принадлежит второму классу Бэра на $\mathcal{M}$.*

Литература. 1. Kolyada S., Snoha L. Topological entropy of nonautonomous dynamical systems // Random & Comput. Dynamics. 1996. V. 4. № 2–3. P. 205–233. 2. Ветохин А.Н. Типичное свойство топологической энтропии непрерывных отображений компактов // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 4. С. 448–453. 3. Ветохин А.Н. Непринадлежность первому классу Бэра топологической энтропии на пространстве гомеоморфизмов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2016. Т. 2. № 4. С. 44–48. 4. Ветохин А.Н. Точный бэровский класс топологической энтропии неавтономных динамических систем // Мат. заметки. 2019. Т. 106. № 3. С. 341–348. 5. Ветохин А.Н. О непринадлежности второму бэровскому классу одного семейства гладких неавтономных динамических систем на отрезке, непрерывно зависящих от параметра // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 1. С. 133–136.

М. В. Шамолин (Москва) “Тензорные инварианты систем с переменной диссипацией на касательном расслоении гладкого многообразия” (4 марта 2022 г.).

Известно [1–3], что знание достаточного количества не только первых интегралов, но и других тензорных инвариантов системы дифференциальных уравнений позволяет полностью её проинтегрировать. Например, наличие инвариантной дифференциальной формы фазового объёма позволяет понизить порядок рассматриваемой системы. Для консервативных систем этот факт достаточно естественен. Для систем же, обладающих притягивающими или отталкивающими предельными множествами, не только некоторые первые интегралы, но и коэффициенты имеющихся инвариантных дифференциальных форм должны, вообще говоря, состоять из трансцендентных (в смысле комплексного анализа) функций [4–6].

Задача о движении n-мерного маятника на обобщённом сферическом шарнире в неконсервативном поле сил, т.е. в потоке набегающей среды, заполняющей объемлющее n-мерное пространство, приводит к системе на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере, причём метрика специального вида на ней индуцирована дополнительными группами симметрий [7]. Динамические системы, описывающие движение такого маятника, обладают знакопеременной диссипацией, а полный список первых интегралов состоит из трансцендентных функций, представимых с помощью алгебраических операций над конечными композициями элементарных функций.

Разобраны задачи о движении точки по n-мерным поверхностям вращения, в пространстве Лобачевского и т.д. Полученные результаты особенно важны по причине присутствия в системе именно неконсервативного поля сил [5].

Предъявлены тензорные инварианты (в частности, дифференциальные формы) для однородных динамических систем на касательных расслоениях к гладким многообразиям. Показана связь данных инвариантов с полным набором первых интегралов, необходимых для интегрирования геодезических, потенциальных и диссипативных систем. При этом вводимые силовые поля делают рассматриваемые системы диссипативными с диссипацией разного знака и обобщают системы, рассмотренные ранее.

Литература. 1. Poincaré H. Calcul des probabilités. Paris, 1912. 2. Колмогоров А.Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Докл. АН СССР. 1953. Т. 93. № 5. С. 763–766. 3. Козлов В.В. Тензорные инварианты и интегрирование дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 2019. Т. 74. Вып. 1. С. 117–148. 4. Шамолин М.В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // Успехи мат. наук. 1998. Т. 53. Вып. 3. С. 209–210. 5. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемости геодезических, потенциальных и диссипативных систем на касательном расслоении конечномерного многообразия // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 500. № 1. С. 78–86. 6. Шамолин М.В. Новые случаи интегрируемых систем нечётного порядка с диссипацией // Докл. РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 491. № 1. С. 95–101. 7. Шамолин М.В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твёрдого тела в неконсервативном поле при учете линейного демпфирования // Докл. РАН. 2012. Т. 444. № 5. С. 506–509.

И. Н. Сергеев (Москва) “Особенности почти массивных свойств устойчивости и неустойчивости одномерных и автономных дифференциальных систем” (11 марта 2022 г.).

Для заданной окрестности нуля $G \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x \in G, \quad f(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G). \tag{1}$$

Через S_* и S_δ будем обозначать множества всех непродолжаемых ненулевых решений x системы (1) и, соответственно, тех из них, для начального условия $x(0)$ которых выполняется неравенство $|x(0)| < \delta$.

Определение 1 [1, 2]. Будем говорить, что система (1) обладает *верхнепредельной*:

1) *устойчивостью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in S_\delta$ удовлетворяет требованию

$$\varlimsup_{t\to+\infty} |x(t)| \leqslant \varepsilon, \tag{2}$$

молчаливо предполагающему, что решение x определено на всей полуоси $\mathbb{R}^+$;

2) *полной* или *глобальной неустойчивостью*, если для некоторых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ любое решение $x \in S_\delta$ или, соответственно, $x \in S_*$ не удовлетворяет требованию (2);

3) *асимптотической* или *глобальной устойчивостью*, если при $\varepsilon = 0$ для некоторого $\delta > 0$ любое решение $x \in S_\delta$ или, соответственно, $x \in S_*$ удовлетворяет требованию (2).

Для определения аналогичных *перроновских* свойств системы (1) нужно:

4) в пп. 1)–3) заменить требование (2) требованием

$$\varliminf_{t\to+\infty} |x(t)| \leqslant \varepsilon, \tag{3}$$

а для определения аналогичных *ляпуновских* свойств [3, гл. II, § 1] нужно:

5) в пп. 1) и 2) заменить требование (2) требованием

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} |x(t)| \leqslant \varepsilon, \tag{4}$$

а в п. 3) в дополнение к соответствующему верхнепредельному свойству потребовать наличие у системы (1) ляпуновской устойчивости.

Определение 2 [4]. Все перечисленные в определении 1 ляпуновские, перроновские и верхне-предельные свойства системы (1) назовём *массивными* – при их описании сразу на все решения $x \in S$, где $S = S_\delta, S_*$ (допускается даже $S = S_* \setminus S_\delta$ [5]), накладывается определённое условие – требование (2)–(4) или его отрицание. Массивным свойствам из определения 1 поставим в соответствие их *почти массивные* аналоги, а именно: *почти устойчивость*, *почти полную* или *почти глобальную неустойчивость* и *почти асимптотическую* или *почти глобальную устойчивость*, в описании которых соответствующее условие накладывается уже не на все решения $x \in S$, а только на те, начальные значения которых не принадлежат некоторому множеству (назовём его *множеством вырождения*) нулевой меры Лебега и первой категории Бэра (представимому в виде счётного объединения нигде не плотных множеств).

Добавка “почти” из определения 2 применительно к ляпуновской устойчивости роли не играет [4]: если система (1) ляпуновски почти устойчива, то и устойчива. В одномерном же случае эта добавка не работает вообще, как показывает

Теорема 1. *Если при $n = 1$ система (1) обладает каким-либо почти массивным свойством из определения 2, то она обладает и соответствующим массивным свойством.*

Любая глобальная устойчивость чувствительна к сужению фазовой области, причём даже к самому незначительному, о чём свидетельствует

Теорема 2. *Любая система (1), обладающая какой-либо глобальной устойчивостью, перестаёт быть таковой при удалении из её фазовой области любой ненулевой точки.*

В автономном же случае теорема 2 распространяется и на почти глобальную устойчивость – в том смысле, который подразумевает

Теорема 3. *Любая автономная система (1), обладающая какой-либо почти глобальной устойчивостью, перестаёт быть таковой при удалении из её фазовой области любой гиперповерхности, трансверсальной к векторному полю этой системы хотя бы в одной точке.*

Из полной ляпуновской неустойчивости автономной системы вытекает её полная, и даже глобальная, перроновская неустойчивость [6]. Однако для тех же свойств с добавкой "почти" аналогичная импликация уже места не имеет, о чём и говорит

Теорема 4 [6]. *При $n = 2$ существует автономная система (1), обладающая перроновской устойчивостью, даже почти глобальной, но ляпуновской и верхнепредельной неустойчивостью, даже почти глобальной, причём множество вырождения всех её почти массивных свойств представляет собой луч, выходящий из нуля и заполненный неподвижными точками, а для любого решения $x \in S_*$, начинающегося не на этом луче, выполнены соотношения*

$$0 = \varliminf_{t\to+\infty} |x(t)| < \varlimsup_{t\to+\infty} |x(t)| = +\infty. \tag{5}$$

Если в формулировке теоремы 4 отменить последнее из требований (5), то в этом примере можно ещё и снять добавку "почти" с перроновской глобальной устойчивости, т.е. верна

Теорема 5. *При $n = 2$ существует автономная система (1), обладающая перроновской глобальной устойчивостью, но ляпуновской и верхнепредельной неустойчивостью, даже почти глобальной, причём множество её вырождения представляет собой окружность, проходящую через нуль.*

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856. 2. Сергеев И.Н. Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557. 3. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М., 1967. 4. Сергеев И.Н. Массивные и почти массивные свойства устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1576–1578. 5. Бондарев А.А. Существование вполне неустойчивой по Ляпунову дифференциальной системы, обладающей перроновской и верхнепредельной массивной частной устойчивостью // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 6. С. 858–859. 6. Сергеев И.Н. Некоторые особенности перроновских и ляпуновских свойств устойчивости автономных систем // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 830–831.

Е. А. Барабанов (Минск)**, В. В. Быков** (Москва) "Описание показателя Перрона линейной дифференциальной системы с неограниченными коэффициентами как функции начального вектора решения" (18 марта 2022 г.).

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ через $\widetilde{\mathcal{M}}_n$ обозначим класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными коэффициентами, через $\mathcal{M}_n$ – его подкласс, состоящий из систем с ограниченными на полуоси коэффициентами, а через $x(\,\cdot\,, \xi)$ – решение системы (1) с начальным вектором $x(0, \xi) = \xi \in \mathbb{R}^n_* \equiv \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Обозначим через $\overline{\mathbb{R}}$ расширенную числовую прямую $\mathbb{R} \bigsqcup \{-\infty, +\infty\}$ с естественным порядком и порядковой топологией.

Показателем Перрона, или *нижним показателем*, ненулевого решения $x(\,\cdot\,, \xi)$ системы (1) называется [1] величина

$$\pi[x(\,\cdot\,, \xi)] = \varliminf_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t, \xi)\|, \tag{2}$$

а функция начального вектора $\pi_A\colon \mathbb{R}^n_* \to \overline{\mathbb{R}}$, определяемая равенством $\pi_A(\xi) = \pi[x(\,\cdot\,,\xi)]$, – *показателем Перрона* системы (1). Показатели Перрона представляют собой один из многочисленных примеров асимптотических характеристик решений дифференциальных систем, отражающих те или иные их качественные или асимптотические свойства. Важнейшая из них – характеристический показатель Ляпунова (получаемый заменой в определении (2) нижнего предела верхним), от которого показатель Перрона по ряду свойств принципиально отличается.

А.М. Ляпунов установил, что число различных показателей Ляпунова системы из $\mathcal{M}_n$ не превосходит её размерности n, а О. Перрон обнаружил [1], что на нижние показатели это утверждение не распространяется. Для диагональных систем из $\mathcal{M}_n$ количество различных значений показателя Перрона не превосходит $2^n - 1$ [2], причём может быть любым таким натуральным числом [3]. В общем случае множество P является множеством значений показателей Перрона некоторой системы из $\mathcal{M}_n$ тогда и только тогда, когда P – ограниченное суслинское множество, содержащее свою точную верхнюю грань [4].

Ставится задача теоретико-множественного описания для каждого натурального n класса функций $\widetilde{\mathcal{P}}_n = \{\pi_A : A \in \widetilde{\mathcal{M}}_n\}$. При $n = 1$ класс $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ состоит из всех постоянных функций $\mathbb{R}^1_* \to \overline{\mathbb{R}}$, а при $n \geqslant 2$ – это подкласс второго, но не первого класса Бэра [5], заведомо содержащий [6] все непрерывные функции $f\colon \mathbb{R}^n_* \to \mathbb{R}$, которые удовлетворяют условию

$$f(c\xi) = f(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n_*, \quad c \in \mathbb{R}^1_*. \tag{3}$$

Описание класса $\widetilde{\mathcal{P}}_n$ завершает

Теорема. *Для каждого $n \geqslant 2$ функция $f\colon \mathbb{R}^n_* \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит классу $\widetilde{\mathcal{P}}_n$, если и только если она удовлетворяет условию (3) и при любом $r \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}([-\infty, r])$ является G_δ-множеством.*

Литература. 1. Perron O. Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme // Math. Zeitschr. 1930. Bd. 31. Hf. 5. S. 748–766. 2. Изобов Н.А. О множестве нижних показателей линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1. № 4. С. 469–477. 3. Барабанов Е.А. Достижимость оценки числа нижних показателей линейной дифференциальной диагональной системы // Докл. АН БССР. 1982. Т. 26. № 12. С. 1069–1072. 4. Барабанов Е.А. Структура множества нижних показателей Перрона линейной дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 11. С. 1843–1853. 5. Барабанов Е.А. Точность некоторых утверждений о нижних показателях Перрона // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34. № 3. С. 200–203. 6. Гаргянц А.Г. К вопросу о распределении значений показателей Перрона по решениям систем с неограниченными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 11. С. 1567.

И. В. Асташова, Д. А. Лашин, А. В. Филиновский (Москва) “Об управляющей функции в параболической задаче управления с точечным наблюдением” (25 марта 2022 г.).

Рассмотрим краевую задачу для параболического уравнения

$$u_t = (a(x,t)u_x)_x + b(x,t)u_x + h(x,t)u, \quad (x,t) \in Q_T = (0,1) \times (0,T), \quad T > 0, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u_x(1,t) = \psi(t), \quad 0 < t < T, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \xi(x), \quad 0 < x < 1, \tag{3}$$

с гладкими в $\overline{Q}_T$ коэффициентами a, b, h, где $0 < a_1 \leqslant a(x,t) \leqslant a_2 < +\infty$, а также граничными $\varphi \in W_2^1(0,T)$, $\psi \in W_2^1(0,T)$ и начальной $\xi \in L_2(0,1)$ функциями.

Ставим задачу управления с точечным наблюдением: управляя температурой φ на левом конце отрезка (при фиксированных функциях ξ и ψ), стараемся сделать температуру $u(x_0,t)$ в некоторой точке $x_0 \in (0,1)$ близкой к заданной функции $z(t)$ на всём интервале времени $(0,T)$. Экстремальные задачи для параболических уравнений рассматривались в работах [1, 2], при этом наиболее изученными являются задачи с финальным или распределённым наблюдением. Продолжая исследования [3, 4], мы изучаем качественные свойства управляющей функции и получаем оценки её нормы через значение функционала качества. В отличие от [5], здесь мы рассматриваем начальные и граничные функции произвольного знака.

Пусть $V_2^{1,0}(Q_T)$ – банахово пространство таких функций $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} = \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(\,\cdot\,,t)\|_{L_2(0,1)} + \|u_x\|_{L_2(Q_T)},$$

для которых $t \mapsto u(\,\cdot\,,t)$ – непрерывное отображение $[0,T] \to L_2(0,1)$ [6, с. 15], а $\widetilde{W}_2^1(Q_T)$ – множество функций $\eta \in W_2^1(Q_T)$, удовлетворяющих условиям $\eta(x,T) = 0 = \eta(0,t)$. *Слабым решением* задачи (1)–(3) будем называть функцию $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую условию $u(0,\cdot\,) = \varphi$ и для всех $\eta \in \widetilde{W}_2^1(Q_T)$ интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T} (a(x,t)u_x(x,t)\eta_x(x,t) - b(x,t)u_x(x,t)\eta(x,t) - h(x,t)u(x,t)\eta(x,t) - u(x,t)\eta_t(x,t))\,dx\,dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \xi(x)\eta(x,0)\,dx + \int\limits_0^T a(1,t)\psi(t)\,\eta(1,t)\,dt.$$

Теорема 1 [7]. *Задача (1)–(3) имеет единственное слабое решение* $u \in V_2^{1,0}(Q_T)$, *причём для некоторой постоянной* C_1 *(не зависящей от* φ, ψ, ξ*) оно удовлетворяет неравенству*

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q_T)} \leqslant C_1(\|\varphi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\psi\|_{W_2^1(0,T)} + \|\xi\|_{L_2(0,1)}).$$

Теорема 2 (принцип неотрицательности). *Если* u *– решение задачи (1)–(3) при условиях* $\operatorname*{ess\,inf}\limits_{t\in(0,T)} \varphi(t) \geqslant 0$, $\operatorname*{ess\,inf}\limits_{t\in(0,T)} \psi(t) \geqslant 0$ *и* $\operatorname*{ess\,inf}\limits_{x\in(0,1)} \xi(x) \geqslant 0$, *то* $\operatorname*{ess\,inf}\limits_{(x,t)\in Q_T} u(x,t) \geqslant 0$.

С использованием теоремы 2 получена следующая

Теорема 3. *Если* $a_t(x,t) \geqslant 0$ *и* $b_x(x,t) - h(x,t) \geqslant 0$ *при* $(x,t) \in Q_T$, *а также* $b(x,t) \geqslant 0$ *при* $(x,t) \in [0,x_0] \times [0,T]$, *где* $x_0 \in (0,1]$ *– некоторое число, и при этом* $b(1,t) \leqslant 0$ *при* $t \in [0,T]$, *то решение* u *задачи (1)–(3) удовлетворяет неравенству*

$$\|u(x_0,\cdot)\|_{L_1(0,T)} \leqslant \|\varphi\|_{L_1(0,T)} + \frac{x_0}{a_1}(a_2\|\psi\|_{L_1(0,T)} + \|\xi\|_{L_1(0,1)}).$$

Следствие 1. *Если выполнены условия теоремы 3 и* $\psi = 0 = \xi$, *то решение* u *задачи (1)–(3) удовлетворяет неравенству*

$$\|u(x_0,\cdot)\|_{L_1(0,T)} \leqslant \|\varphi\|_{L_1(0,T)}.$$

Пусть $\Phi \subset W_2^1(0,T)$ – множество управляющих функций φ, а $Z \subset L_2(0,T)$ – множество целевых функций z. Считая далее множество Φ непустым, замкнутым, выпуклым и ограниченным, рассмотрим квадратичный функционал

$$J[z,\rho,\varphi] = \int\limits_0^T (u_\varphi(x_0,t) - z(t))^2\rho(t)dt, \quad \varphi \in \Phi, \quad z \in Z,$$

где u_φ – решение задачи (1)–(3) с заданной управляющей функцией φ, а $\rho \in L_\infty(0,T)$ – весовая функция и $\operatorname*{ess\,inf}\limits_{t\in(0,T)} \rho(t) = \rho_1 > 0$. Фиксируя функции z и ρ, рассмотрим задачу минимизации

$$m[z,\rho,\Phi] = \inf_{\varphi\in\Phi} J[z,\rho,\varphi].$$

Теорема 4 [5, 7]. *Для любой функции* $z \in L_2(0,T)$ *существует единственная функция* $\varphi_0 \in \Phi$, *для которой*

$$m[z,\rho,\Phi] = J[z,\rho,\varphi_0].$$

Оценку снизу нормы управляющей функции через значение функционала качества даёт
Теорема 5. *В условиях теоремы 3 имеет место неравенство*

$$\|\varphi\|_{L_1(0,T)} \geqslant |z\|_{L_1(0,T)} - \left(\frac{TJ[\varphi,\rho,z]}{\rho_1}\right)^{1/2} - \frac{x_0}{a_1}(a_2\|\psi\|_{L_1(0,T)} + \|\xi\|_{L_1(0,1)}).$$

Следствие 2. *Если выполнены условия теоремы 3 и* $\psi = 0 = \xi$, *то имеет место неравенство*

$$\|\varphi\|_{L_1(0,T)} \geqslant \|z\|_{L_1(0,T)} - \left(\frac{TJ[\varphi,\rho,z]}{\rho_1}\right)^{1/2}.$$

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272).

Литература. 1. Troltzsch F. Optimal Control of Partial Differential Equations: Theory, Methods and Applications. Graduate Studies in Mathematics. V. 112. Providence, 2010. 2. Lurie K.A. Applied Optimal Control Theory of Distributed Systems. Berlin, 2013. 3. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. On the dense controllability for the parabolic problem with time-distributed functional // Tatra Mt. Math. Publ. 2018. V. 71. P. 9–25. 4. Astashova I.V., Filinovskiy A.V. On properties of minimizers of a control problem with time-distributed functional related to parabolic equations // Opuscula Math. 2019. V. 39. № 5. P. 595–609. 5. Astashova I., Filinovskiy A., Lashin D. On the estimates in various spaces to the control function of the extremum problem for parabolic equation // WSEAS. J. Appl. Theor. Mech. 2021. V. 16. P. 187–192. 6. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. 7. Асташова И.В., Лашин Д.А., Филиновский А.В. Об управлении с точечным наблюдением для параболической задачи с конвекцией // Тр. Моск. мат. о-ва. 2019. Т. 80. № 2. С. 258–274.

И. Н. Сергеев (Москва) “О некоторых затруднениях при исследовании по первому приближению сферических и шаровых показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости” (1 апреля 2022 г.).

Для области G евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ рассмотрим дифференциальную (вообще говоря, нелинейную) систему вида

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x \in G, \quad f(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \quad f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G). \tag{1}$$

С системой (1) свяжем линейную однородную систему её *первого приближения*

$$\dot{x} = A(t)x \equiv f_\prime(t,x), \quad A(t) \equiv f'_x(t,0), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

причём на нелинейную добавку $h(t,x) \equiv f(t,x) - A(t)x = o(x)$ $(x \to 0)$ обычное требование её равномерной малости по $t \in \mathbb{R}_+$ мы здесь не накладываем. Через $x_f(\,\cdot\,,x_0)$ обозначаем непродолжаемое решение системы (1) с начальным условием $x_f(0,x_0) = x_0$, а через $S(f)$ и $S_*(f)$ – множество всех и, соответственно, всех ненулевых решений системы (1).

Ниже в определении 1 вводятся [1] три основных разновидности функционала K, по которым затем в определении 2 строятся соответствующие им показатели $\varkappa$.

Определение 1. *Функционалы* $\mathrm{K}(t,u)$, определённые на парах $t \in \mathbb{R}_+$ и $u : [0,t] \to \mathbb{R}^n$, принимающие значение $+\infty$ всякий раз, когда функция определена не на всём отрезке $[0,t]$, отвечают *показателям*

$$\varkappa = \nu, \theta, \rho, \text{ при } \mathrm{K} = \mathrm{N}, \Theta, \mathrm{P} \text{ соответственно} \tag{3}$$

и описывают следующие свойства решений:

1) *колеблемость* $(\varkappa = \nu)$, если $\mathrm{K}(t,u) = \mathrm{N}(t,u)$ – умноженное на π число нулей на промежутке $[0,t]$ функции P_1u, где P_1 – ортогональный проектор на фиксированную прямую, причём если хотя бы один из этих нулей *кратен* (т.е. является нулём ещё и производной $(P_1u)^\cdot$), то считаем $\mathrm{N}(t,u) = +\infty$;

2) *вращаемость* (*ориентированная*, $\varkappa = \theta$), если $\mathrm{K}(t,u) = \Theta(t,u) \equiv |\varphi(t,P_2u)|$ – модуль *ориентированного* угла $\varphi(t,P_2u)$ (непрерывного по t, с начальным условием $\varphi(0,P_2u)=0$) между вектором $P_2u(t)$ и начальным вектором $P_2u(0)$, где P_2 – ортогональный проектор на фиксированную плоскость, причём если $P_2u(\tau)=0$ хотя бы при одном $\tau\in[0,t]$, то считаем $\Theta(t,u)=+\infty$;

3) *блуждаемость* ($\varkappa=\rho$), если

$$\mathrm{K}(t,u) = \mathrm{P}(t,u) \equiv \int\limits_0^t \left|(u(\tau)/|u(\tau)|)^{\cdot}\right| d\tau, \quad u(\tau)\neq 0, \quad \tau\in[0,t].$$

Известны и другие функционалы, отвечающие за *неориентированную* и *частотную вращаемость* [1], *поворачиваемость k-го ранга* [2], а также *плоскую вращаемость* [3].

Определение 2. Для каждого функционала из числа описанных в определении 1 и соответствующего ему свойства *колеблемости, вращаемости* или *блуждаемости* зададим:

а) [1] *слабый* и *сильный нижние линейные* показатели (3) решения $x\in S_*(f)$, определённого на всей полуоси $\mathbb{R}_+$, – по формулам

$$\check{\varkappa}^{\circ}(x) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} t^{-1}\mathrm{K}(t,Lx), \quad \check{\varkappa}^{\bullet}(x) \equiv \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \varliminf_{t\to+\infty} t^{-1}\mathrm{K}(t,Lx); \tag{4}$$

б) [4] *слабый* и *сильный нижние сферические* показатели (3) задачи Коши системы (1) с начальным значением $x_0\in G$ – по формулам

$$\check{\varkappa}_s^{\circ}(f,x_0) \equiv \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \mathrm{K}_s(f,x_0,t,L), \quad \check{\varkappa}_s^{\bullet}(f,x_0) \equiv \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathrm{K}_s(f,x_0,t,L), \tag{5}$$

где для $t\in\mathbb{R}_+$, $L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$ и ортогонального проектора $P_x^{\perp}$ на гиперплоскость, ортогональную вектору $x\in\mathbb{R}^n$, обозначено

$$\mathrm{K}_s(f,x_0,t,L) = \mathrm{K}(t,Lx_{f_s}(\,\cdot\,,x_0)), \quad f_s(t,x)\equiv P_x^{\perp}\cdot f(t,x),$$

причём *сферической* называем и систему с правой частью f_s (без радиальной составляющей);

в) [5] *слабый* и *сильный нижние шаровые* показатели (3) системы (1) – по формулам

$$\check{\varkappa}_b^{\circ}(f) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} t^{-1}\check{\mathrm{K}}_b(f,t,L), \quad \check{\varkappa}_b^{\bullet}(f) \equiv \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \varliminf_{t\to+\infty} t^{-1}\check{\mathrm{K}}_b(f,t,L), \tag{6}$$

где для $t\in\mathbb{R}_+$ и $L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$ обозначено

$$\check{\mathrm{K}}_b(f,t,L) \equiv \varliminf_{x_0\to 0} \mathrm{K}(t,Lx_f(\,\cdot\,,x_0)) \quad \Big(\hat{\mathrm{K}}_b(f,t,L) \equiv \varlimsup_{x_0\to 0} \mathrm{K}(t,Lx_f(\,\cdot\,,x_0))\Big);$$

г) *слабый* и *сильный верхние линейные* $\hat{\varkappa}^{\circ}(x)$, $\hat{\varkappa}^{\bullet}(x)$, *сферические* $\hat{\varkappa}_s^{\circ}(f,x_0)$, $\hat{\varkappa}_s^{\bullet}(f,x_0)$ и *шаровые* $\hat{\varkappa}_b^{\circ}(f)$, $\hat{\varkappa}_b^{\bullet}(f)$ показатели – по тем же формулам (4)–(6) соответственно, но с заменой в них нижних пределов при $t\to+\infty$ верхними, а функционалов $\check{\mathrm{K}}_b$ – функционалами $\hat{\mathrm{K}}_b$;

д) *точные* или *абсолютные* разновидности тех же показателей, которые возникают при совпадении значений нижнего и верхнего показателей или соответственно слабого и сильного показателей: в первом случае будем опускать в их обозначении галочку и крышечку, а во втором – пустой и заполненный кружок.

Необходимость введения сферических и шаровых, а также радиальных [6] показателей обусловлена тем, что решения нелинейной системы (1) не всегда определены на всей временно́й полуоси. Некоторые свойства всех этих показателей описаны в работе [7]. Ниже приводятся случаи отсутствия связи между сферическими или шаровыми показателями нелинейной системы (1) и системы её первого приближения (2). В докладе [8] исследована аналогичная связь для радиальных показателей.

Никакие сферические показатели из перечня (3), вообще говоря, не оцениваются ни с какой определённой стороны соответствующими показателями системы первого приближения, причём уже в двумерном автономном случае, что и подтверждают следующие теоремы.

Теорема 1. *При $n = 2$ и $G = \mathbb{R}^2$ существует такая автономная система (1), что значения всех её сферических показателей (3) и всех линейных показателей системы её первого приближения (2) точны, абсолютны и для любого решения $x \in S_*(f_\prime)$ удовлетворяют соотношениям*

$$+\infty > \varkappa_s(f, x(0)) > \varkappa(x) = \varkappa_s(f_\prime, x(0)) = 0.$$

Теорема 2. *При $n = 2$ и $G = \mathbb{R}^2$ существует такая автономная система (1), что значения всех её сферических показателей (3) и всех линейных показателей системы её первого приближения (2) точны, абсолютны и для любого решения $x \in S_*(f_\prime)$ удовлетворяют соотношениям*

$$0 < \varkappa_s(f, x(0)) < \varkappa(x) = \varkappa_s(f_\prime, x(0)) = 1.$$

Шаровые показатели колеблемости могут отличаться от соответствующих показателей системы первого приближения уже в двумерном случае, а в трёхмерном и даже автономном случае наблюдается также несовпадение шаровых показателей вращаемости с соответствующими показателями системы первого приближения, как показывают следующие теоремы.

Теорема 3. *При $n = 2$ и $G = \mathbb{R}^2$ существует такая система (1), что значения всех её шаровых показателей колеблемости и всех линейных показателей колеблемости системы её первого приближения (2) точны, абсолютны и для любого решения $x \in S_*(f_\prime)$ удовлетворяют соотношениям*

$$0 = \nu_b(f) < \nu(x) = \nu_b(f_\prime) = 1.$$

Теорема 4. *При $n = 3$ и $G = \mathbb{R}^3$ существует такая автономная система (1), что значения всех её шаровых показателей вращаемости и всех линейных показателей вращаемости системы её первого приближения (2) точны, абсолютны и для любого решения $x \in S_*(f_\prime)$ и некоторого двумерного подпространства $S \subset S(f_\prime)$ удовлетворяют соотношениям*

$$0 = \theta_b(f) \leqslant \theta(x) = \begin{cases} \hat{\theta}_b(f_\prime) = 1, & x \in S \setminus \{0\}; \\ \check{\theta}_b(f_\prime) = 0, & x \in S_*(f_\prime) \setminus S. \end{cases}$$

Литература. 1. Сергеев И.Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 177–219. 2. Сергеев И.Н. Характеристики поворачиваемости решений дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 10. С. 1353–1361. 3. Сергеев И.Н. Показатели плоской вращаемости линейной дифференциальной системы // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2019. Вып. 32. С. 325–348. 4. Сергеев И.Н. Определение сферических показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 839–840. 5. Сергеев И.Н. Определение шаровых показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 6. С. 859–861. 6. Сергеев И.Н. Определение радиальных показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1560–1562. 7. Сергеев И.Н. Определение показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости нелинейных дифференциальных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 3. С. 41–46. 8. Сергеев И.Н. Исследование по первому приближению радиальных показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1574–1576.

А. Х. Сташ (Майкоп) "О множествах значений показателей вращаемости решений автономных дифференциальных систем" (8 апреля 2022 г.).

Для заданного $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{M}^n$ множество линейных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

с ограниченными непрерывными оператор-функциями $A\colon \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} \mathbb{R}^n$ (каждую из которых будем отождествлять с соответствующей системой). Подмножество множества $\mathcal{M}^n$, состоящее из *автономных* систем, обозначим через $\mathcal{C}^n$. Линейное пространство решений системы $A \in \mathcal{M}^n$ обозначим через $\mathcal{S}(A)$, а подмножество всех ненулевых решений – через $\mathcal{S}_*(A)$. Далее, звёздочкой снизу помечаем любое линейное пространство, в котором выколот нуль. Положим

$$\mathcal{S}_*^n = \bigcup_{A \in \mathcal{M}^n} \mathcal{S}_*(A).$$

Определение 1 [1]. Для функции $x \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$ определим функционал $\Theta(x,t)$ как взятую по абсолютной величине непрерывную по $t \in \mathbb{R}_+$ ветвь ориентированного угла между векторами $x(t)$ и $x(0)$, для которой $\Theta(x,0) = 0$, причём если для некоторого $\tau \in [0,t]$ имеет место равенство $x(\tau) = 0$, то по определению считаем, что $\Theta(x,t) = +\infty$. *Нижние* (*верхние*) *сильный* и *слабый показатели ориентированной вращаемости* вектор-функции $x \in \mathcal{S}_*^n$ зададим соответственно формулами

$$\check{\theta}^\bullet(x) = \inf_{L \in \mathrm{End}_2\mathbb{R}^n} \varliminf_{t \to +\infty} \frac{1}{t}\Theta(Lx,t) \quad \left(\hat{\theta}^\bullet(x) = \inf_{L \in \mathrm{End}_2\mathbb{R}^n} \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t}\Theta(Lx,t)\right),$$

$$\check{\theta}^\circ(x) = \varliminf_{t \to +\infty} \inf_{L \in \mathrm{End}_2\mathbb{R}^n} \frac{1}{t}\Theta(Lx,t) \quad \left(\hat{\theta}^\circ(x) = \varlimsup_{t \to +\infty} \inf_{L \in \mathrm{End}_2\mathbb{R}^n} \frac{1}{t}\Theta(Lx,t)\right),$$

где $\mathrm{End}_2\mathbb{R}^n$ – подмножество векторного пространства $\mathrm{End}\,\mathbb{R}^n$, состоящее из линейных операторов ранга 2. В случае совпадения верхнего и нижнего значений $\hat{\omega}(x) = \check{\omega}(x)$ какого-либо из перечисленных показателей ω будем называть показатель $\omega(x)$ *точным*, а в случае совпадения слабого и сильного значений $\omega^\circ(x) = \omega^\bullet(x)$ – *абсолютным*.

У автономной системы *спектр* (множество всех значений на ненулевых решениях) любого из показателей ориентированной вращаемости содержит множество модулей мнимых частей собственных значений матрицы системы, но, вообще говоря, не совпадает с ним [2]. В докладе [2] поставлен вопрос о типичных значениях показателя ориентированной вращаемости и о структуре его возможного спектра. В [3] показано, что для широкого класса автономных систем (имеющих действительные собственные значения или два комплексных с несоизмеримыми мнимыми частями) нуль является типичным значением этого показателя, и найден спектр для систем с простыми чисто мнимыми собственными значениями. Тем самым, задача нахождения спектров для автономных систем была решена лишь частично. Приводим здесь полное решение этой задачи.

Определение 2 [3]. Введём *наибольший нечётно-общий делитель* $\gcd^*(S)$ множества S чисел $s_1, \ldots, s_r \geqslant 0$: если существует такое α, что множество $S/\alpha = \{s_1/\alpha, \ldots, s_r/\alpha\}$ состоит из нечётных целых чисел, то в качестве $\gcd^*(S)$ возьмём наибольшее из таких α, а в противном случае положим $\gcd^*(S) = 0$.

Теорема 1. *Для любой системы $A \in \mathcal{C}^n$ показатель $\theta(x)$ любого решения $x \in \mathcal{S}_*(A)$ является точным и абсолютным, а его спектр имеет вид*

$$\mathrm{Spec}_\theta(A) = \{\gcd^*(S) \,:\, \varnothing \neq S \subset \{|\mathrm{Im}\,\lambda_1(A)|, \ldots, |\mathrm{Im}\,\lambda_n(A)|\}\},$$

где $\lambda_1(A)$, $\ldots$, $\lambda_n(A)$ – корни характеристического многочлена системы A, упорядоченные по нестрогому возрастанию модулей их мнимых частей.

Следствие 1. *Для произвольной системы $A \in \mathcal{C}^n$ спектр показателя θ является дискретным, причём его мощность не превосходит $2^{n/2} - 1$.*

Следствие 2. *Спектры всех показателей ориентированной вращаемости любой автономной системы с симметричной матрицей состоят из одного нулевого значения.*

Определение 3 [4]. Для каждого $\omega = \check{\theta}^\bullet, \hat{\theta}^\bullet, \check{\theta}^\circ, \hat{\theta}^\circ$ назовём *i-м верхним* $\omega_{\bar{i}}(A)$ и *нижним* $\omega_{\underline{i}}(A)$ *главными* (*регуляризованными* по Миллионщикову) значениями соответствующего показателя системы $A \in \mathcal{M}^n$ величины, задаваемые равенствами

$$\omega_{\bar{i}}(A) \equiv \inf_{V \in G^i(A)} \sup_{x \in V_*} \omega(x), \quad \omega_{\underline{i}}(A) \equiv \sup_{V \in G^{n-i+1}(A)} \inf_{x \in V} \omega(x), \quad i = \overline{1,n},$$

где $G^i(A)$ – множество i-мерных подпространств пространства $\mathcal{S}(A)$.

Теорема 2. *Для каждой системы* $A \in \mathcal{C}^n$ *и любого* $\omega = \check{\theta}^{\bullet}, \hat{\theta}^{\bullet}, \check{\theta}^{\circ}, \hat{\theta}^{\circ}$ *выполнены соотношения*

$$\omega_{\underline{1}}(A) = \omega_{\overline{1}}(A) = \omega_{\underline{2}}(A) = \omega_{\overline{2}}(A) = \ldots = \omega_{\underline{n-1}}(A) = \omega_{\overline{n-1}}(A) \leqslant \omega_{\underline{n}}(A) = \omega_{\overline{n}}(A) = |\mathrm{Im}\, \lambda_n(A)|.$$

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение характеристик вращаемости решений дифференциальных систем и уравнений // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 11. С. 1501–1503. 2. Сергеев И.Н. Вопросы о спектрах показателей вращаемости и блуждаемости автономных систем // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 6. С. 844–845. 3. Бурлаков Д.С. Спектры показателей вращения и вращаемости автономных систем с простыми чисто мнимыми собственными числами // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 6. С. 845. 4. Сергеев И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294.

А. А. Бондарев (Москва) “Пример глобально неустойчивой по Ляпунову системы с перроновской и верхнепредельной глобальной устойчивостью” (15 апреля 2022 г.).

В пространстве $\mathbb{R}^2$ (с евклидовой нормой $|\cdot|$) рассматривается система вида

$$\dot{x} = f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{1}$$

с правой частью, удовлетворяющей условиям

$$f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2), \quad f(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Настоящий доклад посвящён недавно введённому [1, 2] понятию устойчивости по Перрону и развивает результаты работ [2–5], окончательным итогом которых явилось построение системы, имеющей нулевое линейное приближение вдоль нулевого решения (в теореме 1 [2] приближение было неограниченным) и обладающей одновременно как перроновской, так и верхнепредельной (см. выше определения из доклада И.Н. Сергеева от 11 марта):

– полной неустойчивостью, а значит, и ляпуновской глобальной неустойчивостью;

– массивной частной устойчивостью (в примерах [2–4] она была лишь точечной).

Ниже утверждается существование системы, имеющей нулевое линейное приближение и обладающей одновременно следующими двумя свойствами (которые, на первый взгляд, могут показаться противоречащими друг другу):

– ляпуновской глобальной неустойчивостью (присущей примерам из работ [2–5]);

– перроновской и верхнепредельной глобальной устойчивостью (в отличие от всех предыдущих примеров).

Теорема. *Существует такая система (1), что её правая часть удовлетворяет условию*

$$f'_x(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

и верны следующие два утверждения:

1) для каждого решения x *системы (1) справедливо равенство*

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0;$$

2) для каждого ненулевого решения x *системы (1) выполняется неравенство*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |x(t)| > 1.$$

Таким образом, абсолютно все решения системы, существование которой утверждается в теореме, сходятся к нулю при неограниченном росте времени, но при этом фазовая кривая каждого ненулевого решения хотя бы однажды покидает 1-окрестность начала координат.

Заметим, что описанная система неавтономна, неодномерна и нелинейна, и не случайно:

– автономной такой системы не существует [6], поскольку в автономном случае уже ляпуновская полная (а тем более глобальная) неустойчивость влечёт за собой сразу и перроновскую, и верхнепредельную глобальную неустойчивость;

– ни одномерной, ни линейной такой системы не существует [7], поскольку для них верхнепредельная глобальная устойчивость влечёт за собой и ляпуновскую глобальную устойчивость.

Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (проект 21-8-2-4-1).

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856. 2. Сергеев И.Н. Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 636–646. 3. Бондарев А.А. Один пример неустойчивой системы // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 899. 4. Бондарев А.А. Пример полной, но не глобальной неустойчивости по Перрону // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 2. С. 43–47. 5. Бондарев А.А. Пример дифференциальной системы с перроновской и верхнепредельной полной неустойчивостью, но массивной частной устойчивостью // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58. № 2. С. 147–152. 6. Сергеев И.Н. Ляпуновские, перроновские и верхнепредельные свойства устойчивости автономных дифференциальных систем // Изв. Ин-та математики и информатики Удмуртского гос. ун-та. 2020. Вып. 2 (56). С. 63–78. 7. Сергеев И.Н. Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557.

Н. А. Лобода, А. Х. Сташ (Майкоп) “Об отсутствии свойства остаточности у сильных показателей колеблемости на множестве решений дифференциальных уравнений третьего порядка” (22 апреля 2022 г.).

Для заданного натурального n рассмотрим множество $\mathcal{E}^n$ линейных однородных уравнений n-го порядка

$$y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(t)\dot y+a_n(t)y=0,\quad t\in\mathbb{R}_+\equiv[0,+\infty),$$

задаваемых ограниченными непрерывными вектор-функциями $a\equiv(a_1,\ldots,a_n)\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^n$, с которыми в дальнейшем и будем отождествлять сами уравнения. Множество всех ненулевых решений уравнения $a\in\mathcal{E}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(a)$ и положим

$$\mathcal{S}_*^n=\bigcup_{a\in\mathcal{E}^n}\mathcal{S}_*(a).$$

Определение 1 [1–4]. Точку $t>0$ назовём точкой *строгой* (*нестрогой*) *смены знака* функции $y\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, если в любой проколотой окрестности этой точки функция y принимает как положительные (неотрицательные), так и отрицательные (неположительные) значения. Для момента $t>0$, вектора $m\in\mathbb{R}_*^n$ и функции $y\in\mathcal{S}_*^n$ введём следующие обозначения:

$\nu^-(y,m,t)$ – число точек *строгой смены знака* функции $\langle\psi y(\cdot),m\rangle$ на промежутке $(0,t]$;

$\nu^\sim(y,m,t)$ – число точек *нестрогой смены знака* функции $\langle\psi y(\cdot),m\rangle$ на промежутке $(0,t]$;

$\nu^0(y,m,t)$ – число *нулей* функции $\langle\psi y(\cdot),m\rangle$ на промежутке $(0,t]$;

$\nu^+(y,m,t)$ – число *корней* (т.е. нулей с учётом их *кратности*) функции $\langle\psi y(\cdot),m\rangle$ на промежутке $(0,t]$;

$\nu^*(y,m,t)$ – число *гиперкратных корней* функции $\langle\psi y(\cdot),m\rangle$ на промежутке $(0,t]$: при его подсчёте каждый некратный корень берётся ровно один раз, а кратный – бесконечно много раз, где $\psi y=(y,\dot y,\ldots,y^{(n-1)})$, а $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ – скалярное произведение.

Верхние (*нижние*) *сильный* и *слабый показатели колеблемости знаков, нулей, корней* и *гиперкорней* функции $y\in\mathcal{S}_*^n$ при $\alpha\in\{-,\sim,0,+,*\}$ соответственно зададим формулами

$$\hat\nu_\bullet^\alpha(y)\equiv\inf_{m\in\mathbb{R}_*^n}\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(y,m,t)\quad\left(\check\nu_\bullet^\alpha(y)\equiv\inf_{m\in\mathbb{R}_*^n}\varliminf_{t\to\infty}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(y,m,t)\right),$$

$$\hat\nu_\circ^\alpha(y)\equiv\varlimsup_{t\to\infty}\inf_{m\in\mathbb{R}_*^n}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(y,m,t)\quad\left(\check\nu_\circ^\alpha(y)\equiv\varliminf_{t\to\infty}\inf_{m\in\mathbb{R}_*^n}\frac{\pi}{t}\nu^\alpha(y,m,t)\right).$$

Определение 2 [5]. Для множества $F\subset\{f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}^n\}$ назовём функционал $\lambda\colon F\to\mathbb{R}$ *остаточным*, если для любых функций $f,g\in F$, удовлетворяющих хотя бы при одном $t_0\in\in\mathbb{R}_+$ и всех $t\geqslant t_0$ условию $f(t)=g(t)$, имеет место равенство $\lambda(f)=\lambda(g)$. Далее считаем $F=\mathcal{S}_*^n$.

Слабые показатели колеблемости любых решений, как оказалось [2], всегда совпадают с их показателями блуждаемости, которые являются остаточными. Для решений линейных однородных уравнений первого порядка все показатели колеблемости равны нулю, так как эти решения не имеют нулей, а для всех решений любого уравнения второго порядка все верхние (равно как и все нижние) показатели равны между собой [4]. Следовательно, на множестве решений уравнений первого и второго порядков все показатели колеблемости остаточны.

На множестве решений дифференциальных уравнений третьего порядка сильные показатели колеблемости гиперкорней не являются остаточными [6]. Об остаточности остальных сильных показателей колеблемости информации пока не было.

Теорема 1. *Ни один из функционалов* $\hat{\nu}_\bullet^-, \check{\nu}_\bullet^-, \hat{\nu}_\bullet^\sim, \check{\nu}_\bullet^\sim, \hat{\nu}_\bullet^0, \check{\nu}_\bullet^0, \hat{\nu}_\bullet^+, \check{\nu}_\bullet^+ : \mathcal{S}_*^3 \to \mathbb{R}$ *не остаточен.*

Теорема 2. *Существует уравнение* $a \in \mathcal{E}^3$, *хотя бы одно решение* $x \in \mathcal{S}_*(a)$ *которого удовлетворяет соотношениям*

$$\nu_\bullet^-(x) = \nu_\bullet^\sim(x) = \nu_\bullet^0(x) = \nu_\bullet^+(x) > \nu_\circ^-(x) = \nu_\circ^\sim(x) = \nu_\circ^0(x) = \nu_\circ^+(x).$$

Литература. 1. Сергеев И.Н. Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2006. Вып. 25. С. 249–294. 2. Сергеев И.Н. Замечательное совпадение характеристик колеблемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Мат. сб. 2013. Т. 204. № 1. С. 119–138. 3. Сергеев И.Н. Определение полных частот решений линейного уравнения // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 11. С. 1577. 4. Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76. № 1. С. 149–172. 5. Сергеев И.Н. К теории показателей Ляпунова линейных систем дифференциальных уравнений // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 111–166. 6. Сташ А.Х. Об отсутствии свойства остаточности у полных гиперчастот решений дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2017. № 2. С. 65–68.

А. Е. Артисевич, А. Х. Сташ (Майкоп) “О множествах значений показателей колеблемости знаков решений дифференциальных уравнений третьего порядка” (22 апреля 2022 г.).

Для заданного натурального n рассмотрим множество $\mathcal{E}^n$ линейных однородных уравнений n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty),$$

задаваемых ограниченными непрерывными вектор-функциями $a \equiv (a_1, \ldots, a_n)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, с которыми в дальнейшем и будем отождествлять сами уравнения. Множество всех ненулевых решений уравнения $a \in \mathcal{E}^n$ обозначим через $\mathcal{S}_*(a)$, а кроме того, используем все обозначения из определения 1 представленного выше доклада (авторы Н.А. Лобода, А.Х. Сташ).

Для решений линейных однородных уравнений первого порядка все показатели колеблемости [1]

$$\hat{\nu}_\bullet^\alpha(y), \check{\nu}_\bullet^\alpha(y), \hat{\nu}_\circ^\alpha(y), \check{\nu}_\circ^\alpha(y), \quad \alpha \in \{-, \sim, 0, +, *\},$$

равны нулю (так как эти решения не имеют нулей), а для всех решений любого уравнения второго порядка все верхние (равно как и все нижние) показатели равны между собой [2].

В работе [3] для сколь угодно большого наперёд заданного числа N доказано существование уравнения третьего порядка с периодическими коэффициентами, спектры показателей колеблемости которого содержат конечные наборы, состоящие из N чисел. Кроме того, построено линейное однородное дифференциальное уравнение третьего порядка с переменными ограниченными коэффициентами, спектры показателей колеблемости которого содержат одно и то же счётное множество значений. В [4] приводится линейное однородное дифференциальное уравнение третьего порядка с неограниченными коэффициентами, спектры показателей колеблемости которого содержат один и тот же отрезок числовой прямой.

В работе [5] построены примеры двух линейных дифференциальных уравнений третьего порядка с непрерывными на временно́й полуоси коэффициентами, спектры характеристических частот нулей и знаков одного из которых состоят из множества рациональных чисел отрезка $[0, 1]$, а спектры другого – из множества иррациональных чисел отрезка $[0, 1]$ и числа нуль. В докладе показано, что такими же свойствами обладают и показатели колеблемости знаков.

Теорема 1. *Для любого не более чем счётного множества неотрицательных чисел* X *существует дифференциальное уравнение* $a \in \mathcal{E}^3$, *обладающее свойством*

$$\hat{\nu}^-_\bullet(\mathcal{S}_*(a)) = \check{\nu}^-_\bullet(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\nu}^-_\circ(\mathcal{S}_*(a)) = \check{\nu}^-_\circ(\mathcal{S}_*(a)) = X \bigcup \{0\}.$$

Следствие. *Существует дифференциальное уравнение* $a \in \mathcal{E}^3$, *обладающее свойством*

$$\hat{\nu}^-_\bullet(\mathcal{S}_*(a)) = \check{\nu}^-_\bullet(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\nu}^-_\circ(\mathcal{S}_*(a)) = \check{\nu}^-_\circ(\mathcal{S}_*(a)) = [0,1] \bigcap \mathbb{Q}.$$

Теорема 2. *Существует дифференциальное уравнение* $a \in \mathcal{E}^3$, *обладающее свойством*

$$\hat{\nu}^-_\bullet(\mathcal{S}_*(a)) = \check{\nu}^-_\bullet(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\nu}^-_\circ(\mathcal{S}_*(a)) = \check{\nu}^-_\circ(\mathcal{S}_*(a)) = [0,1).$$

Теорема 3. *Существует дифференциальное уравнение* $a \in \mathcal{E}^3$, *обладающее свойством*

$$\hat{\nu}^-_\bullet(\mathcal{S}_*(a)) = \check{\nu}^-_\bullet(\mathcal{S}_*(a)) = \hat{\nu}^-_\circ(\mathcal{S}_*(a)) = \check{\nu}^-_\circ(\mathcal{S}_*(a)) = ([0,1] \setminus \mathbb{Q}) \bigcup \{0\}.$$

Литература. 1. Сергеев И.Н. Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 2016. Вып. 31. С. 177–219. 2. Сергеев И.Н. Характеристики колеблемости и блуждаемости решений линейной дифференциальной системы // Изв. РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76. № 1. С. 149–172. 3. Сташ А.Х. О существенных значениях характеристик колеблемости решений линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестн. Адыгейского гос. ун-та. Сер. Естеств.-мат. и техн. науки. 2013. Вып. 2 (119). С. 9–22. 4. Сташ А.Х. О существовании линейного дифференциального уравнения третьего порядка с континуальными спектрами полной и векторной частот // Вестн. Адыгейского гос. ун-та. Сер. Естеств.-мат. и техн. науки. 2013. Вып. 3 (122). С. 9–17. 5. Войделевич А.С. Существование бесконечных всюду разрывных спектров верхних характеристических частот нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2015. № 3. С. 17–23.

Н. А. Изобов (Минск)**, А. В. Ильин** (Москва) “Существование антиперроновского эффекта смены положительных характеристических показателей на отрицательные при исчезающих на бесконечности линейных возмущениях” (29 апреля 2022 г.).

Рассматриваем линейные системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant t_0, \tag{1_n}$$

первого приближения с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями $\lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(A)$, а также возмущённые системы

$$\dot{y} = A(t)y + Q(t)y, \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant t_0, \tag{2_n}$$

с аналогичными матрицами $Q(t)$.

В двумерном случае О. Перроном [1; см. также 2, с. 50–51] построены система (1_2) с отрицательными показателями и двумерное бесконечно дифференцируемое возмущение $f(t,y)$ второго порядка малости такие, что все нетривиальные решения возмущённой системы

$$\dot{y} = A(t)y + f(t,y), \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geqslant t_0,$$

оказываются бесконечно продолжимыми вправо и принимающими лишь два значения показателей: одно по-прежнему отрицательное, совпадающее со старшим показателем $\lambda_2(A)$ исходной системы (1_2), и второе – некоторое положительное число.

Исследованию этого эффекта Перрона смены отрицательных показателей системы линейного приближения на положительные для решений возмущённой системы с возмущениями высшего порядка малости посвящены наши предыдущие совместные работы, в том числе и с С.К. Коровиным, завершившиеся [3, 4] полным описанием множеств как $\Lambda_+(A,f)$ положительных, так и $\Lambda_-(A,f)$ отрицательных показателей всех этих нетривиальных решений. В частности, реализован и вариант $\operatorname{mes}\Lambda_+(A,f)>0,\ \ \Lambda_-(A,f)=\varnothing$.

Для возможных приложений бо́льший интерес представляют противоположный (который мы называем *антиперроновским*) эффект смены малыми возмущениями (линейными как исчезающими на бесконечности, так и экспоненциально убывающими; нелинейными высшего порядка малости) всех положительных характеристических показателей линейного приближения на отрицательные для решений возмущённой системы.

В работе [5] исследован этот эффект для экспоненциально убывающих линейных возмущений: доказано существование линейных систем (1_n) со всеми положительными показателями и возмущённой (2_n) с матрицей $Q(t)$, удовлетворяющей условию

$$\|Q(t)\|\leqslant c_Qe^{-\sigma t},\quad \sigma>0,\quad c_Q=\mathrm{const},\quad t\geqslant t_0, \tag{3}$$

и характеристическими показателями

$$\lambda_1(A+Q)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_{n-1}(A+Q)<0<\lambda_n(A+Q).$$

При этом остаётся открытым вопрос о существовании системы (2_n) с возмущением (3) и отрицательным старшим показателем $\lambda_n(A+Q)$.

Нельзя ли при более общем возмущении $Q(t)\to 0,\ \ t\to+\infty$, одновременно реализовать все необходимые неравенства

$$\lambda_i(A)>0,\quad \lambda_i(A+Q)<0,\quad i=\overline{1,n}?$$

Положительный ответ на этот вопрос содержит следующая

Теорема. *Для любых параметров*

$$\lambda_n\geqslant\ldots\geqslant\lambda_1>0,\quad \mu_1\leqslant\ldots\leqslant\mu_n<0,\quad 2\leqslant n\in\mathbb{N},$$

существуют:

1) линейная система (1_n) с ограниченными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами и характеристическими показателями $\lambda_i(A)=\lambda_i,\ \ i=\overline{1,n}$;

2) бесконечно дифференцируемая $n\times n$-матрица $Q(t)\to 0$ при $t\to+\infty$,

такие, что возмущённая система (2_n) имеет характеристические показатели $\lambda_i(A+Q)=\mu_i,\ \ i=\overline{1,n}$.

Литература. 1. Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen // Math. Zeitschr. 1930. Bd. 32. Hf. 5. S. 703–728. 2. Леонов Г.А. Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. М.; Ижевск, 2006. 3. Изобов Н.А., Ильин А.В. О бэровской классификации положительных характеристических показателей в эффекте Перрона смены их значений // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 11. С. 1435–1439. 4. Изобов Н.А., Ильин А.В. Построение произвольного суслинского множества положительных характеристических показателей в эффекте Перрона // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 4. С. 464–472. 5. Изобов Н.А., Ильин А.В. О существовании линейных дифференциальных систем со всеми положительными характеристическими показателями первого приближения и экспоненциально убывающими возмущениями и решениями // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1450–1457.