ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 7, с. 867–881

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.929

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИНАПСОВ

© 2022 г. С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов

Вводится в рассмотрение новая математическая модель нейронной сети с электрическими связями, представляющая собой сингулярно возмущённую систему дифференциально-разностных уравнений с запаздыванием. Излагаются некоторые методы исследования вопросов о существовании и устойчивости в этой системе релаксационных периодических движений. В случае диффузионных и симметричных полносвязных нейронных сетей устанавливается реализуемость в соответствующих математических моделях известного феномена буферности.

DOI: 10.31857/S0374064122070019, EDN: CDXLYG

1. Постановка задачи. Остановимся сначала на выборе базовой математической модели функционирования отдельного нейрона. Следуя работам [1, 2], в качестве такой возьмём скалярное нелинейное дифференциально-разностное уравнение вида

$$\dot{u} = \lambda f(u(t-1))u \tag{1.1}$$

для мембранного потенциала $u = u(t) > 0$. Здесь параметр $\lambda > 0$, характеризующий скорость протекания электрических процессов в системе, предполагается большим, точка означает дифференцирование по t, а функция $f(u) \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geqslant 0\}$, обладает свойствами

$$f(0) = 1; \quad f(u) + a, \quad uf'(u), u^2 f''(u) = O(1/u) \quad \text{при} \quad u \to +\infty, \tag{1.2}$$

где $a = \mathrm{const} > 0$. Примером такой функции является

$$f(u) = (1-u)/(1+u/a). \tag{1.3}$$

Уравнение (1.1), представляющее собой некоторую модификацию известного уравнения Хатчинсона [3], было предложено и исследовано в статье [4]. В ней показано, что при всех $\lambda \gg 1$ оно допускает экспоненциально орбитально устойчивый релаксационный цикл $u_*(t,\lambda) > 0$, $u_*(0,\lambda) \equiv 1$ периода $T_*(\lambda)$, удовлетворяющий предельным соотношениям

$$\lim_{\lambda\to\infty} T_*(\lambda) = T_0, \qquad \max_{0\leqslant t\leqslant T_*(\lambda)} |x_*(t,\lambda) - x_0(t)| = O(1/\lambda), \quad \lambda \to \infty, \tag{1.4}$$

где $T_0 = (1+a)t_0$, $t_0 = 1+1/a$, $x_*(t,\lambda) = (1/\lambda)\ln(u_*(t,\lambda))$, а T_0-периодическая функция $x_0(t)$ задаётся равенствами

$$x_0(t) = \begin{cases} t & \text{при} \;\; 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 1 - a(t-1) & \text{при} \;\; 1 \leqslant t \leqslant t_0 + 1, \\ t - T_0 & \text{при} \;\; t_0 + 1 \leqslant t \leqslant T_0, \end{cases} \qquad x_0(t+T_0) \equiv x_0(t). \tag{1.5}$$

Наглядное представление о релаксационных свойствах этого цикла даёт его график на плоскости (t,u), построенный численно для случая (1.1), (1.3) при $\lambda = 5$, $a = 2$ (рис. 1). Отметим, что в дальнейшем под релаксационными колебаниями вслед за работами [2, 5] будем понимать колебательные режимы исследуемых моделей, которые сочетают быстрые и медленные движения.

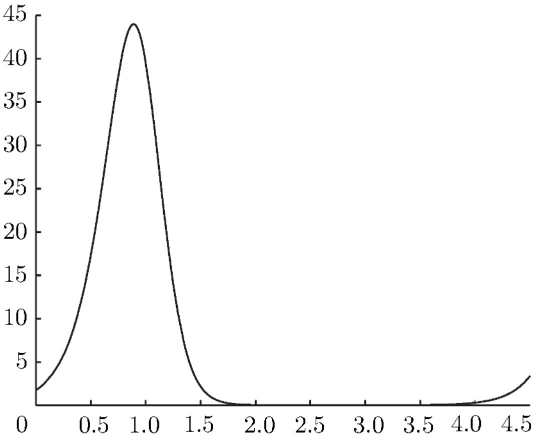

Рис. 1. График $u_*(t,\lambda)$ при $a=2$, $\lambda=5$.

Предположим теперь, что имеется сеть из $m \geqslant 2$ нейронов с потенциалами $u_j = u_j(t)$, $j=\overline{1,m}$. Будем считать, что они электрически взаимодействуют между собой по принципу "каждый со всеми". Тогда согласно общепринятым представлениям о природе электрических синапсов (см., например, монографии [6, с. 39–40; 7, с. 60–65] и статьи [8–10]) связь между нейронами с номерами j и s, $j\neq s$, осуществляется посредством соответствующего тока проводимости $I_{j,s}^{\rm syn}$. Последний, в свою очередь, в силу закона Ома задаётся равенством

$$I_{j,s}^{\rm syn} = d_{j,s}(u_s-u_j), \quad d_{j,s}=\mathrm{const}\in\mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Тем самым, приходим к системе вида

$$\dot u_j = \lambda f(u_j(t-1))u_j + \sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{m} d_{j,s}(u_s-u_j), \quad j=\overline{1,m}, \tag{1.7}$$

которая, собственно, и является одной из возможных математических моделей электрических синапсов. Однако, на наш взгляд, модель (1.7) нуждается в некоторой модификации.

Суть упомянутой модификации состоит в том, чтобы заменить равенство (1.6) соотношением

$$I_{j,s}^{\rm syn} = d_{j,s}\, g\left(\frac{u_s}{u_j}\right)u_j, \quad d_{j,s}=\mathrm{const}\in\mathbb{R}, \tag{1.8}$$

где функция $g(u)\in C^3(\mathbb{R}_+)$ удовлетворяет требованиям

$$g(u)<0 \quad \text{при} \quad u\in[0,1), \quad g(0)=-1, \quad g(u)>0 \quad \text{при} \quad u>1, \quad g(1)=0, \quad g'(1)>0, \tag{1.9}$$

$$g(u)-b, ug'(u), u^2g''(u), u^3g'''(u) = O(1/u) \quad \text{при} \quad u\to+\infty, \quad b=\mathrm{const}>0. \tag{1.10}$$

Что же касается соответствующей модели электрических синапсов, то в данном случае она приобретает вид

$$\dot u_j = \left[\lambda f(u_j(t-1)) + \sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{m} d_{j,s}\, g\left(\frac{u_s}{u_j}\right)\right]u_j, \quad j=\overline{1,m}. \tag{1.11}$$

Следует отметить, что между прежним законом (1.6) и модифицированной омической гипотезой (1.8) имеется определённая согласованность. Действительно, в силу условий (1.9) свойства функции $g(u)$ из (1.8) максимально близки к свойствам функции $g(u)=u-1$ в случае (1.6). В частности, как и система (1.7) новая модель (1.11) в силу свойства $g(1)=0$ допускает так называемый однородный цикл

$$u_1=u_2=\ldots=u_m=u_*(t,\lambda), \tag{1.12}$$

где $u_*(t,\lambda)$ – периодическое решение уравнения (1.1), о котором говорилось выше (см. (1.4), (1.5)). Что же касается отличий нового подхода к моделированию электрических синапсов от общепринятого, то их два. Во-первых, при переходе от отдельного нейрона к соответствующей сети сохраняется вольтерровская структура уравнений; во-вторых, соблюдён так называемый закон насыщающих проводимостей, суть которого – выполнение условий вида (1.2), (1.10) для всех входящих в систему нелинейностей. Тем самым наши модели (как отдельного нейрона (1.1), так и нейронной сети (1.11)) базируются на одних и тех же общих принципах, сформулированных в работе [2]. Под вольтерровской структурой уравнений (1.11) подразумевается возможность записи их правых частей в виде произведения соответствующей зависимой переменной и некоторой неособой в нуле функции. Это свойство гарантирует положительность решений с положительными начальными условиями.

Вопрос о возможных периодических режимах системы (1.11) достаточно сложен. Поэтому, не претендуя на полноту анализа, ниже ограничимся рассмотрением лишь тех из них, которые располагаются в некоторой окрестности её однородного цикла (1.12). Как оказывается, при нахождении таких режимов можно применить специальные асимптотические методы, разработанные ранее в статье [11] для аналогичных (1.7) диффузионных систем

$$\dot{u}_j = \lambda f(u_j(t-1))u_j + d(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}), \quad j = \overline{1,m}, \tag{1.13}$$

где $u_0 = u_1$, $u_{m+1} = u_m$, $d = \mathrm{const} > 0$. Описание упомянутых методов приводится ниже.

2. Базовые теоремы. Прежде всего перейдём в системе (1.11) к новым переменным x, $y_1, \ \ldots, \ y_{m-1}$ по правилу

$$u_1 = \exp(x/\varepsilon), \quad u_j = \exp\biggl(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} y_k\biggr), \quad j = \overline{2,m}, \quad \varepsilon = 1/\lambda.$$

В результате получим релаксационную систему вида

$$\dot{x} = F(x(t-1),\varepsilon) + \varepsilon \sum_{s=2}^{m} d_{1,s} g\biggl(\exp\biggl(\sum_{r=1}^{s-1} y_r\biggr)\biggr), \tag{2.1}$$

$$\dot{y}_j = \sum_{s=1}^{j} d_{j+1,s}\, g\biggl(\exp\biggl(-\sum_{r=s}^{j} y_r\biggr)\biggr) + \sum_{s=j+2}^{m} d_{j+1,s}\, g\biggl(\exp\biggl(\sum_{r=j+1}^{s-1} y_r\biggr)\biggr) - \sum_{s=1}^{j-1} d_{j,s}\, g\biggl(\exp\biggl(-\sum_{r=s}^{j-1} y_r\biggr)\biggr) -$$
$$- \sum_{s=j+1}^{m} d_{j,s}\, g\biggl(\exp\biggl(\sum_{r=j}^{s-1} y_r\biggr)\biggr) + G_j(x(t-1), y_1(t-1),\ldots,y_j(t-1),\varepsilon), \quad j = \overline{1,m-1}, \tag{2.2}$$

где нелинейности $F(x,\varepsilon)$, $G_j(x,y_1,\ldots,y_j,\varepsilon)$ задаются равенствами

$$F(x,\varepsilon) = f(\exp(x/\varepsilon)),$$

$$G_j(x,y_1,\ldots,y_j,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\biggl\{ f\biggl(\exp\biggl(x/\varepsilon + \sum_{k=1}^{j} y_k\biggr)\biggr) - f\biggl(\exp\biggl(x/\varepsilon + \sum_{k=1}^{j-1} y_k\biggr)\biggr)\biggr\}, \quad j = \overline{1,m-1}.$$

Далее, фиксируем постоянную $\sigma_0 : 0 < \sigma_0 < \min(1,a)$ и на отрезке $-\sigma_0 \leqslant t \leqslant T_0 + \sigma_0$ обозначим через

$$y_1^0(t,z),\ldots,y_{m-1}^0(t,z), \quad z = (z_1,\ldots,z_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$$

компоненты решения импульсной задачи Коши

$$\dot{y}_j = \sum_{s=1}^{j} d_{j+1,s}\, g\biggl(\exp\biggl(-\sum_{r=s}^{j} y_r\biggr)\biggr) + \sum_{s=j+2}^{m} d_{j+1,s}\, g\biggl(\exp\biggl(\sum_{r=j+1}^{s-1} y_r\biggr)\biggr) -$$
$$- \sum_{s=1}^{j-1} d_{j,s}\, g\biggl(\exp\biggl(-\sum_{r=s}^{j-1} y_r\biggr)\biggr) - \sum_{s=j+1}^{m} d_{j,s}\, g\biggl(\exp\biggl(\sum_{r=j}^{s-1} y_r\biggr)\biggr), \quad j = \overline{1,m-1}, \tag{2.3}$$

$$y_j(1+0) = y_j(1-0) - (1+a)y_j(0),$$
$$y_j(t_0+1+0) = y_j(t_0+1-0) - (1+1/a)y_j(t_0), \quad j = \overline{1,m-1}, \tag{2.4}$$

$$(y_1,\ldots,y_{m-1})|_{t=0}=z, \tag{2.5}$$

где T_0, t_0 – величины из (1.5). Рассмотрим затем отображение

$$z\mapsto\Phi(z)\stackrel{\text{def}}{=}(y_1^0(t,z),\ldots,y_{m-1}^0(t,z))|_{t=T_0}, \tag{2.6}$$

действующее из $\mathbb{R}^{m-1}$ в $\mathbb{R}^{m-1}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Любой гиперболической неподвижной точке $z=z_*$ отображения (2.6) в системе (2.1), (2.2) при всех достаточно малых $\varepsilon>0$ соответствует релаксационный цикл*

$$(x(t,\varepsilon),y_1(t,\varepsilon),\ldots,y_{m-1}(t,\varepsilon)),\quad x(0,\varepsilon)\equiv 0 \tag{2.7}$$

периода $T(\varepsilon)$, устойчивое и неустойчивое многообразия которого определяются соответствующими многообразиями этой точки. Кроме того, справедливы соотношения

$$\lim_{\varepsilon\to 0}T(\varepsilon)=T_0,\qquad \max_{-\sigma_0\leqslant t\leqslant T_0+\sigma_0}|x(t,\varepsilon)-x_0(t)|=O(\varepsilon),\quad \varepsilon\to 0, \tag{2.8}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\max_{t\in\Sigma(\varepsilon)}|y_j(t,\varepsilon)-y_j^0(t,z_*)|=0,\qquad \max_{-\sigma_0\leqslant t\leqslant T_0+\sigma_0}|y_j(t,\varepsilon)|\leqslant M,\quad j=\overline{1,m-1}, \tag{2.9}$$

где $x_0(t)$ – функция (1.5), $M=\mathrm{const}>0$, а множество $\Sigma(\varepsilon)$ представляет собой отрезок $[-\sigma_0,T_0+\sigma_0]$ с выброшенными интервалами

$$(1-\varepsilon^\delta,1+\varepsilon^\delta),\quad (t_0+1-\varepsilon^\delta,t_0+1+\varepsilon^\delta),\quad \delta=\mathrm{const}\in(0,1).$$

Доказательство данной теоремы опустим, поскольку в аналогичных ситуациях оно подробно изложено в уже упоминавшейся работе [11], а также в статьях [12, 13].

Теорема 1 носит базовый характер, так как сводит интересующую нас проблему нахождения устойчивых периодических решений системы (2.1), (2.2) к поиску устойчивых неподвижных точек отображения (2.6). Однако достаточно очевидно, что в общем случае записать и проанализировать это отображение не представляется возможным. Поэтому сделаем одно упрощающее предположение, а именно будем считать, что коэффициенты синаптических связей малы, т.е.

$$d_{j,s}=\nu d_{j,s}^0,\quad 0<\nu\ll 1,\quad d_{j,s}^0=\mathrm{const}\in\mathbb{R}. \tag{2.10}$$

Это обстоятельство в совокупности с имеющимся минимальным запасом гладкости функции $g(u)$ (см. (1.10)) позволяет асимптотически проинтегрировать систему (2.3), (2.4) на отрезке времени $0\leqslant t\leqslant T_0$.

Действительно, дополнив указанную систему начальным условием (2.5) и учтя гладкость зависимости правых частей (2.3), (2.4) от параметров, приходим к выводу, что компоненты $y_j^0(t,z,\nu)$, $j=\overline{1,m-1}$, решения получившейся задачи Коши допускают при $\nu\to 0$ следующие асимптотические представления:

$$y_j^0(t,z,\nu)=z_j+\nu\psi_j(z)t+O(\nu^2),\quad j=\overline{1,m-1},\quad 0\leqslant t<1; \tag{2.11}$$

$$y_j^0(t,z,\nu)=-az_j+\nu\psi_j(z)+\nu\psi_j(-az)(t-1)+O(\nu^2),\quad j=\overline{1,m-1},\quad 1<t<t_0+1; \tag{2.12}$$

$$y_j^0(t,z,\nu)=z_j-\frac{\nu}{a}\psi_j(z)+\nu\Bigl(1-\frac{1}{a^2}\Bigr)\psi_j(-az)+$$
$$+\nu\psi_j(z)(t-t_0-1)+O(\nu^2),\quad j=\overline{1,m-1},\quad t_0+1<t\leqslant T_0, \tag{2.13}$$

где

$$\psi_j(z)=\sum_{s=1}^{j}d_{j+1,s}^0\,g\Bigl(\exp\Bigl(-\sum_{r=s}^{j}z_r\Bigr)\Bigr)+\sum_{s=j+2}^{m}d_{j+1,s}^0\,g\Bigl(\exp\Bigl(\sum_{r=j+1}^{s-1}z_r\Bigr)\Bigr)-$$

$$-\sum_{s=1}^{j-1} d_{j,s}^0 g\biggl(\exp\biggl(-\sum_{r=s}^{j-1} z_r\biggr)\biggr) - \sum_{s=j+1}^{m} d_{j,s}^0 g\biggl(\exp\biggl(\sum_{r=j}^{s-1} z_r\biggr)\biggr), \quad j=\overline{1,m-1}. \tag{2.14}$$

Добавим ещё, что остатки в (2.11)–(2.13) имеют указанный порядок малости равномерно по t из соответствующих промежутков и по $z\in\Omega$, где $\Omega\subset\mathbb{R}^{m-1}$ – произвольно фиксированный компакт. Кроме того, формулы (2.11)–(2.13) сохраняют силу (вместе с порядками остатков) при дифференцировании по компонентам z_k, $k=\overline{1,m-1}$, вектора z.

Соотношения (2.11)–(2.14) свидетельствуют о том, что в случае (2.10) отображение (2.6) асимптотически близко (в C^1-метрике) к тождественному, а точнее говоря, имеет вид

$$z_j \mapsto z_j + \nu\biggl(1-\frac{1}{a^2}\biggr)(a\psi_j(z)+\psi_j(-az)) + O(\nu^2), \quad j=\overline{1,m-1}. \tag{2.15}$$

В свою очередь, опираясь на асимптотику (2.15), нетрудно заметить, что в рассматриваемой ситуации интересующее нас отображение с точностью до величин порядка ν^2 совпадает с оператором сдвига за время $t=1$ по траекториям системы дифференциальных уравнений

$$\dot z_j = \nu\biggl(1-\frac{1}{a^2}\biggr)(a\psi_j(z)+\psi_j(-az)), \quad j=\overline{1,m-1}. \tag{2.16}$$

Справедливость данного факта следует из непосредственного асимптотического интегрирования системы (2.16) и сравнения получившихся формул с соотношениями (2.15). А это означает справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Предположим, что выполнено неравенство*

$$a>1 \tag{2.17}$$

и модельная система

$$\frac{dz_j}{d\tau} = a\psi_j(z)+\psi_j(-az), \quad j=\overline{1,m-1}, \tag{2.18}$$

получающаяся из (2.16) при замене времени $\tau=\nu(1-1/a^2)t$, *допускает гиперболическое состояние равновесия*

$$z_* = (z_1^*,\ldots,z_{m-1}^*). \tag{2.19}$$

Тогда при всех достаточно малых $\nu>0$ *исходное отображение (2.15) имеет асимптотически близкую к (2.19) гиперболическую неподвижную точку*

$$z_*(\nu) = (z_1^*(\nu),\ldots,z_{m-1}^*(\nu)):\quad z_j^*(\nu)=z_j^*+O(\nu), \quad j=\overline{1,m-1}, \quad \nu\to 0 \tag{2.20}$$

с теми же свойствами устойчивости.

Предположим далее, что выполнено неравенство (2.17) и удалось найти требуемое состояние равновесия (2.19) модельной системы (2.18). Тогда согласно теореме 1 для любых достаточно малых $0<\nu_1<\nu_2$ найдётся такое $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\nu_1,\nu_2)>0$, что при всех $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, $\nu_1\leqslant\nu\leqslant\nu_2$ и при условии (2.10) система (2.1), (2.2) допускает гиперболический цикл

$$(x(t,\varepsilon,\nu), y_1(t,\varepsilon,\nu),\ldots,y_{m-1}(t,\varepsilon,\nu)), \quad x(0,\varepsilon,\nu)\equiv 0 \tag{2.21}$$

периода $T(\varepsilon,\nu)$, свойства устойчивости которого совпадают с аналогичными свойствами неподвижной точки (2.20). Кроме того, справедливы аналогичные (2.8), (2.9) соотношения

$$\lim_{\varepsilon\to 0} T(\varepsilon,\nu)=T_0, \qquad \max_{-\sigma_0\leqslant t\leqslant T_0+\sigma_0}|x(t,\varepsilon,\nu)-x_0(t)| = O(\varepsilon), \quad \varepsilon\to 0, \tag{2.22}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\max_{t\in\Sigma(\varepsilon)}|y_j(t,\varepsilon,\nu)-y_j^0(t,z_*(\nu))|=0, \qquad \max_{-\sigma_0\leqslant t\leqslant T_0+\sigma_0}|y_j(t,\varepsilon,\nu)|\leqslant M, \quad j=\overline{1,m-1}. \tag{2.23}$$

Интересно отметить, что приведённый выше результат может быть усилен, а именно найдутся такие достаточно малые $\varepsilon_0,\nu_0>0$, что цикл (2.21) существует и гиперболичен при всех $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $0 < \nu \leqslant \nu_0$. Что же касается свойств (2.22), (2.23), то они выполняются равномерно по $\nu \in (0, \nu_0]$ и, в частности, постоянная M из (2.23) не зависит от ε, ν.

Справедливость перечисленных фактов обусловлена тем обстоятельством, что в силу (2.10) система (2.1), (2.2) регулярна по параметру ν. Поэтому при независимом стремлении $\varepsilon \to 0$, $\nu \to 0$ цикл (2.21) сохраняется, а его начальные условия в фазовом пространстве $C([-1,0];\mathbb{R}^m)$ имеют пределы $x = t$, $y_j = z_j^*$, $j = \overline{1, m-1}$, $-1 \leqslant t \leqslant 0$, где z_j^* – компоненты вектора (2.19).

Ниже применимость базовых теорем 1, 2 иллюстрируется на двух наиболее популярных нейронных сетях – диффузионной и симметричной полносвязной.

3. Существование и устойчивость дискретных автоволн. Аналогом диффузионной модели (1.13) в нашем случае является система

$$\dot{u}_j = \left[\lambda f(u_j(t-1)) + d\left(g\left(\frac{u_{j+1}}{u_j}\right) + g\left(\frac{u_{j-1}}{u_j}\right)\right)\right]u_j, \quad j = \overline{1, m}, \tag{3.1}$$

где $u_0 = u_1$, $u_{m+1} = u_m$, $d = \mathrm{const} > 0$. Исследование аттракторов этой системы начнём с вопроса об устойчивости её однородного цикла (1.12).

Заметим, что для сети (3.1), в отличие от общего случая (1.11), соответствующая импульсная система (2.3), (2.4) приобретает более простой вид

$$\dot{y}_j = d[g(\exp y_{j+1}) + g(\exp(-y_j)) - g(\exp y_j) - g(\exp(-y_{j-1}))], \quad j = \overline{1, m-1}, \quad y_0 = y_m = 0, \tag{3.2}$$

$$y_j(1+0) = y_j(1-0) - (1+a)y_j(0),$$
$$y_j(t_0+1+0) = y_j(t_0+1-0) - (1+1/a)y_j(t_0), \quad j = \overline{1, m-1}. \tag{3.3}$$

Это обстоятельство позволяет разобраться с устойчивостью нулевой неподвижной точки отображения (2.6), которая в силу свойств (1.9) функции $g(u)$ заведомо существует.

Теорема 3. *Нулевая неподвижная точка отображения (2.6), порождённого системой (3.2), (3.3), экспоненциально устойчива при любом* $d > 0$.

Доказательство. Для нахождения матрицы Якоби $\Phi'(0)$, отвечающей точке $z = 0$, необходимо линеаризовать систему (3.2) и учесть импульсные условия (3.3). В результате получаем, что матрица $\Phi'(0)$ представляет собой оператор сдвига по решениям импульсной системы

$$\dot{h}_j = dg'(1)(h_{j+1} - 2h_j + h_{j-1}), \quad h_j(1+0) = h_j(1-0) - (1+a)h_j(0),$$
$$h_j(t_0+1+0) = h_j(t_0+1-0) - (1+1/a)h_j(t_0), \quad j = \overline{1, m-1}, \quad h_0 = h_m = 0 \tag{3.4}$$

за время от $t = 0$ до $t = T_0$. Далее, применим к (3.4) метод Фурье по собственным векторам разностного оператора Лапласа, а точнее говоря, положим

$$h_j = \sum_{k=1}^{m-1} g_k(t)\sin\left(\frac{\pi k}{m}j\right), \quad j = \overline{1, m-1}. \tag{3.5}$$

В результате убеждаемся в том, что компоненты $g_k(t)$, $k = \overline{1, m-1}$, из (3.5) являются решениями импульсной системы

$$\dot{g} = -\sigma g, \quad g(1+0) = g(1-0) - (1+a)g(0), \quad g(t_0+1+0) = g(t_0+1-0) - (1+1/a)g(t_0) \tag{3.6}$$

при $0 \leqslant t \leqslant T_0$, $\sigma = \sigma_k$, где в силу (1.9) имеем

$$\sigma_k = 4dg'(1)\sin^2\left(\frac{\pi k}{2m}\right) > 0, \quad k = \overline{1, m-1}. \tag{3.7}$$

На завершающем этапе дополним систему (3.6) начальным условием $g = 1$ при $t = 0$, проинтегрируем получившуюся задачу Коши и положим $\mu_k = g|_{t=T_0, \sigma=\sigma_k}$, где σ_k – дискретные значения (3.7) параметра σ. В итоге получаем набор чисел μ_k, $k = \overline{1, m-1}$, который, как нетрудно увидеть, образует спектр интересующей нас матрицы $\Phi'(0)$. Более того, справедливы соотношения $\mu_k = \mu(\sigma)|_{\sigma=\sigma_k}$, $k=\overline{1,m-1}$, где

$$\mu(\sigma) = ((1+a)\exp\sigma - 1)((1+1/a)\exp\sigma - 1)\exp(-\sigma T_0), \quad \mu(0)=1,$$

$$\mu'(\sigma) = ((2-T_0)\exp(2\sigma) + (T_0-1)\exp\sigma - 1)T_0\exp(-\sigma T_0) < 0 \quad \text{при} \quad \sigma\in(0,+\infty),$$

$$\mu(\sigma)\to 0 \quad \text{при} \quad \sigma\to+\infty.$$

Отсюда очевидным образом следует, что $\mu_k\in(0,1)$, $k=\overline{1,m-1}$. Теорема 3 доказана.

В аналогичной (2.1), (2.2) системе, записанной для диффузионного случая, неподвижной точке $z=0$ отвечает цикл вида (2.7) с компонентами $y_1=\ldots=y_{m-1}=0$, а в исходной диффузионной цепочке (3.1) – однородный цикл (1.12). Теоремы 1, 3 приводят к выводу, что этот цикл является экспоненциально орбитально устойчивым при любом фиксированном значении параметра $d>0$ и при всех достаточно больших λ.

Перейдём теперь к другим аттракторам диффузионной системы (3.1). По аналогии с непрерывным случаем дискретной автоволной или просто автоволной назовём любой её стационарный режим, отличный от однородного цикла (1.12).

Нахождение автоволн будем проводить при аналогичном (2.10) предположении

$$d=\nu, \quad 0<\nu\ll 1. \tag{3.8}$$

Напомним, что в случае (2.17), (3.8) в силу базовых теорем 1, 2 интересующий нас вопрос сводится к поиску устойчивых состояний равновесия соответствующей модельной системы (2.18). В свою очередь, несложный подсчёт показывает, что для диффузионной сети (3.1) упомянутая система приобретает вид

$$\frac{dz_j}{d\tau} = \Delta(-z_j) - \Delta(z_j) + \Delta(z_{j+1}) - \Delta(-z_{j-1}), \quad j=\overline{1,m-1}, \quad z_0=z_m=0, \tag{3.9}$$

где

$$\Delta(z) = ag(\exp z) + g(\exp(-az)), \quad z\in\mathbb{R}. \tag{3.10}$$

Исследование автоволн начнём с простейшего случая $m=2$, когда имеем дело с так называемой билокальной моделью

$$\dot u_1 = \lambda f(u_1(t-1))u_1 + dg\left(\frac{u_2}{u_1}\right)u_1, \quad \dot u_2 = \lambda f(u_2(t-1))u_2 + dg\left(\frac{u_1}{u_2}\right)u_2. \tag{3.11}$$

Для того чтобы в случае (2.17), (3.8) применить теоремы 1, 2, обратимся к системе (3.9), которая при $m=2$ состоит из одного скалярного уравнения

$$\frac{dz}{d\tau} = \Psi(z), \quad \Psi(z) \overset{\text{def}}{=} \Delta(-z) - \Delta(z). \tag{3.12}$$

Анализ уравнения (3.12) требует некоторой информации о его правой части $\Psi(z)$. Для получения этой информации объединим факт нечётности $\Psi(z)$ с формулой (3.10) и свойствами (1.9), (1.10) функции $g(u)$. В результате приходим к выводу, что

$$\Psi(0)=\Psi'(0)=\Psi''(0)=0, \quad \Psi'''(0) = 2a(a^2-1)(g'(1)+3g''(1)+g'''(1)), \tag{3.13}$$

$$\lim_{z\to+\infty}\Psi(z) = -(b+1)(a-1). \tag{3.14}$$

Предположим теперь, что наряду с неравенством (2.17) выполнено условие

$$g'(1)+3g''(1)+g'''(1)>0. \tag{3.15}$$

Тогда в силу свойств (3.13), (3.14) для функции $\Psi(z)$ уравнение (3.12) имеет хотя бы одну пару состояний равновесия $z = \pm z_*$, $z_* > 0$, таких, что $\Psi'(z_*) = \Psi'(-z_*) \leqslant 0$. В общем же случае справедливо строгое неравенство

$$\Psi'(z_*) < 0, \tag{3.16}$$

а значит, эти состояния равновесия экспоненциально устойчивы. Добавим, что в силу теорем 1, 2 при условии (3.16) данной паре состояний равновесия в исходной модели (3.11) при $\lambda \gg 1$ и при надлежащем уменьшении параметра d соответствует пара устойчивых автоволновых периодических движений. Отметим ещё, что упомянутые циклы переходят друг в друга при замене переменных $u_1 \to u_2$, $u_2 \to u_1$.

Вопрос о реализуемости ограничений (3.15), (3.16) требует отдельного рассмотрения. Для этого привлечем конкретный пример функции связи $g(u)$, а именно всюду ниже считаем, что

$$g(u) = (u-1)/(1+u/b), \quad b = \mathrm{const} > 0. \tag{3.17}$$

Тогда, как нетрудно увидеть,

$$g'(1) = \frac{b}{b+1}, \quad g''(1) = -\frac{2b}{(b+1)^2}, \quad g'''(1) = \frac{6b}{(b+1)^3},$$

а значит, неравенство (3.15) эквивалентно включению

$$b \in (0, 2-\sqrt{3}) \bigcup (2+\sqrt{3}, +\infty). \tag{3.18}$$

В случае условия устойчивости (3.16) ситуация несколько сложнее. Получить для него явные ограничения на параметры a, b, подобные (3.18), не удаётся. Однако, как показывает численный анализ, оно заведомо справедливо, например, при значениях $a = 2.5$, $b = 15$ (на рис. 2 изображён соответствующий этим параметрам график функции $\Psi(z)$). Что же касается пары устойчивых циклов системы (3.11), существующих у неё согласно нашей теории, то для конкретных нелинейностей (1.3), (3.17) и при $a = 2.5$, $b = 15$, $d = 0.005$, $\lambda = 6$ графики на плоскости (t, u) компонент $u = u_1(t)$, $u = u_2(t)$ одного из них представлены на рис. 3 (сплошной линией показан график $u_1(t)$, а пунктирной – график $u_2(t)$).

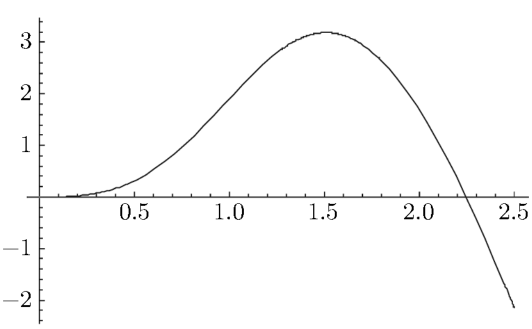

Рис. 2. График $\Psi(z)$ при $a = 2.5$, $b = 15$.

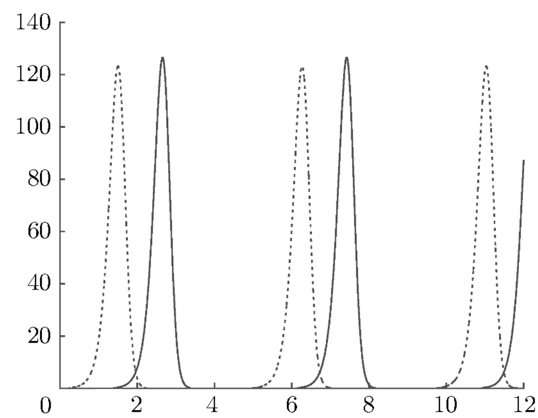

Рис. 3. Графики $u_1(t)$, $u_2(t)$ при $a = 2.5$, $b = 15$, $d = 0.005$, $\lambda = 6$.

Особого внимания заслуживает случай фиксированного $a > 1$ и достаточно больших значений параметра b, когда условие (3.16) всё же удаётся проверить аналитически. Для того чтобы убедиться в этом, сделаем в уравнении (3.12) замены переменных

$$z = \ln b + \widetilde{z}, \quad b\tau \to \tau \tag{3.19}$$

и учтём в его правой части вытекающие из формул (3.10), (3.17) асимптотические представления

$$\Delta(z)|_{z=\ln b+\widetilde{z}} = b\biggl[\frac{a\exp\widetilde{z}}{1+\exp\widetilde{z}} + O(1/b)\biggr], \quad \Delta'(z)|_{z=\ln b+\widetilde{z}} = b\biggl[\frac{a\exp\widetilde{z}}{(1+\exp\widetilde{z})^2} + O(1/b)\biggr], \tag{3.20}$$

$$\Delta(z)|_{z=-\ln b-\widetilde{z}} = b[1+O(b^{-\min(1,a-1)})],$$
$$\Delta'(z)|_{z=-\ln b-\widetilde{z}} = \frac{1}{b}[a\exp(-\widetilde{z}) + O(1/b)] - \frac{a\exp(a\widetilde{z})}{b^{a-2}}[1+O(b^{-\min(1,a-1)})], \tag{3.21}$$

справедливые при условии (2.17) и при $b\to+\infty$ равномерно по $\widetilde{z}$ из любого фиксированного компакта. В результате после отбрасывания асимптотически малых добавок приходим к уравнению

$$\frac{d\widetilde{z}}{d\tau} = 1 - \frac{a\exp\widetilde{z}}{1+\exp\widetilde{z}}, \tag{3.22}$$

допускающему экспоненциально устойчивое состояние равновесия

$$\widetilde{z} = \ln\frac{1}{a-1}. \tag{3.23}$$

Остаётся добавить, что в исходном уравнении (3.12) состоянию равновесия (3.23) отвечает состояние равновесия $z=z_*(b)$ с асимптотикой

$$z_*(b) = \ln b + \ln\frac{1}{a-1} + O(b^{-\min(1,a-1)}), \quad b\to+\infty,$$

удовлетворяющее требуемому условию устойчивости (3.16).

Обратимся теперь к диффузионной цепочке (3.1) при $m\geqslant 3$, считая по-прежнему, что нелинейность $g(u)$ в ней задана равенством (3.17). Далее, фиксируем произвольно индекс j_0 из множества $1\leqslant j_0\leqslant m-2$, выполним во вспомогательной системе (3.9) аналогичные (3.19) замены переменных

$$z_j = \ln b + \widetilde{z}_j, \quad j=\overline{1,j_0}; \quad z_j = -\ln b + \widetilde{z}_j, \quad j=\overline{j_0+1,m-1}; \quad b\tau\to\tau, \tag{3.24}$$

и при условии (2.17) устремим параметр b к бесконечности. В результате, опираясь на асимптотические равенства (3.20), (3.21), для новых переменных $\widetilde{z}_j$, $j=\overline{1,m-1}$, приходим к некоторой предельной системе, которая в зависимости от индексов j_0 и m записывается поразному, а именно все возможные здесь ситуации исчерпываются следующими четырьмя случаями:

1) индекс $j_0=1$, при этом $m\geqslant 4$;
2) средние значения индекса j_0 такие, что $2\leqslant j_0\leqslant m-3$, а $m\geqslant 5$;
3) максимальное значение индекса $j_0=m-2$, причём $m\geqslant 4$;
4) наконец, $m=3$, $j_0=1$.

Рассмотрим подробнее случай 1). Учитывая, что $j_0=1$, для перехода от переменной z_1 к $\widetilde{z}_1$ используется первая формула из замены (3.24), а для всех остальных значений индекса j – вторая. Непосредственная подстановка асимптотических представлений (3.20), (3.21) в формулы (3.9), (3.10) приводит к следующей предельной системе:

$$\frac{d\widetilde{z}_1}{d\tau} = 2 - \frac{a\exp\widetilde{z}_1}{1+\exp\widetilde{z}_1}, \quad \frac{d\widetilde{z}_2}{d\tau} = \frac{a\exp(-\widetilde{z}_2)}{1+\exp(-\widetilde{z}_2)} - 1,$$
$$\frac{d\widetilde{z}_j}{d\tau} = \frac{a\exp(-\widetilde{z}_j)}{1+\exp(-\widetilde{z}_j)} - \frac{a\exp(-\widetilde{z}_{j-1})}{1+\exp(-\widetilde{z}_{j-1})}, \quad 3\leqslant j\leqslant m-2,$$
$$\frac{d\widetilde{z}_{m-1}}{d\tau} = \frac{a\exp(-\widetilde{z}_{m-1})}{1+\exp(-\widetilde{z}_{m-1})} - 1 - \frac{a\exp(-\widetilde{z}_{m-2})}{1+\exp(-\widetilde{z}_{m-2})}. \tag{3.25}$$

В случае 2) $(2 \leqslant j_0 \leqslant m-3,\ \ m \geqslant 5)$ предельная система приобретает вид

$$\frac{d\widetilde{z}_1}{d\tau} = 1 - \frac{a\exp\widetilde{z}_1}{1+\exp\widetilde{z}_1} + \frac{a\exp\widetilde{z}_2}{1+\exp\widetilde{z}_2}, \quad \frac{d\widetilde{z}_j}{d\tau} = -\frac{a\exp\widetilde{z}_j}{1+\exp\widetilde{z}_j} + \frac{a\exp\widetilde{z}_{j+1}}{1+\exp\widetilde{z}_{j+1}}, \quad j = \overline{2, j_0-1},$$

$$\frac{d\widetilde{z}_{j_0}}{d\tau} = 1 - \frac{a\exp\widetilde{z}_{j_0}}{1+\exp\widetilde{z}_{j_0}}, \quad \frac{d\widetilde{z}_{j_0+1}}{d\tau} = \frac{a\exp(-\widetilde{z}_{j_0+1})}{1+\exp(-\widetilde{z}_{j_0+1})} - 1,$$

$$\frac{d\widetilde{z}_j}{d\tau} = \frac{a\exp(-\widetilde{z}_j)}{1+\exp(-\widetilde{z}_j)} - \frac{a\exp(-\widetilde{z}_{j-1})}{1+\exp(-\widetilde{z}_{j-1})}, \quad j_0+2 \leqslant j \leqslant m-2,$$

$$\frac{d\widetilde{z}_{m-1}}{d\tau} = \frac{a\exp(-\widetilde{z}_{m-1})}{1+\exp(-\widetilde{z}_{m-1})} - \frac{a\exp(-\widetilde{z}_{m-2})}{1+\exp(-\widetilde{z}_{m-2})} - 1; \tag{3.26}$$

в случае 3) $(j_0 = m-2,\ \ m \geqslant 4)$ имеем дело с системой

$$\frac{d\widetilde{z}_1}{d\tau} = 1 - \frac{a\exp\widetilde{z}_1}{1+\exp\widetilde{z}_1} + \frac{a\exp\widetilde{z}_2}{1+\exp\widetilde{z}_2}, \quad \frac{d\widetilde{z}_j}{d\tau} = -\frac{a\exp\widetilde{z}_j}{1+\exp\widetilde{z}_j} + \frac{a\exp\widetilde{z}_{j+1}}{1+\exp\widetilde{z}_{j+1}}, \quad 2 \leqslant j \leqslant m-3,$$

$$\frac{d\widetilde{z}_{m-2}}{d\tau} = 1 - \frac{a\exp\widetilde{z}_{m-2}}{1+\exp\widetilde{z}_{m-2}}, \quad \frac{d\widetilde{z}_{m-1}}{d\tau} = \frac{a\exp(-\widetilde{z}_{m-1})}{1+\exp(-\widetilde{z}_{m-1})} - 2; \tag{3.27}$$

в случае 4) $(m = 3,\ \ j_0 = 1)$ получаем

$$\frac{d\widetilde{z}_1}{d\tau} = 2 - \frac{a\exp\widetilde{z}_1}{1+\exp\widetilde{z}_1}, \quad \frac{d\widetilde{z}_2}{d\tau} = \frac{a\exp(-\widetilde{z}_2)}{1+\exp(-\widetilde{z}_2)} - 2. \tag{3.28}$$

Несложный анализ каждого из вариантов (3.25)–(3.28) показывает, что при любых фиксированных $m \geqslant 3,\ \ 1 \leqslant j_0 \leqslant m-2$ и при дополнительном условии

$$a > 2 \tag{3.29}$$

соответствующая предельная система для $\widetilde{z}_j,\ \ j = \overline{1, m-1}$, допускает единственное экспоненциально устойчивое состояние равновесия

$$\widetilde{z}_{(j_0)} = \biggl(\ln\frac{1}{a-2}, \underbrace{\ln\frac{1}{a-1}, \ldots, \ln\frac{1}{a-1}}_{j_0-1}, \underbrace{-\ln\frac{1}{a-1}, \ldots, -\ln\frac{1}{a-1}}_{m-2-j_0}, -\ln\frac{1}{a-2}\biggr). \tag{3.30}$$

Что же касается системы (3.9), то в силу формул (3.20), (3.21), (3.24), (3.30) при условии (3.29) и при всех $b \gg 1$ она имеет $m-2$ экспоненциально устойчивых состояния равновесия

$$\widetilde{z}_{(j_0)}(b) = (\underbrace{\ln b, \ldots, \ln b}_{j_0}, \underbrace{-\ln b, \ldots, -\ln b}_{m-1-j_0}) + \widetilde{z}_{(j_0)} + O(1/b), \quad b \to +\infty, \quad j_0 = \overline{1, m-2}. \tag{3.31}$$

Согласно теоремам 1, 2 в диффузионной цепочке (3.1) с нелинейностью (3.17) состояниям равновесия (3.31) соответствуют экспоненциально орбитально устойчивые автоволновые периодические режимы. Отсюда в силу произвольности m заключаем, что в рамках модели (3.1), (3.17) реализуется известное явление буферности. Суть этого явления в том, что при подходящем подборе параметров a, b, λ, d и при увеличении m можно гарантировать сосуществование в указанной модели любого наперёд заданного конечного числа устойчивых циклов. Добавим ещё, что феномен буферности характерен именно для нейронных систем, поскольку он отражает ситуацию, когда в неокортексе человеческого мозга различные идеи и концепции соревнуются друг с другом в целях доминирования.

4. Случай симметричной полносвязной сети. В максимально симметричном случае, когда все связи равноправны, интересующая нас математическая модель нейронной сети приобретает вид

$$\dot{u}_j = \left[\lambda f(u_j(t-1)) + d\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{m} g\left(\frac{u_s}{u_j}\right)\right]u_j, \quad j=\overline{1,m}, \tag{4.1}$$

где $d=\mathrm{const}>0$. Интересны вопросы существования и устойчивости специальных её периодических решений – так называемых режимов двухкластерной синхронизации.

Для описания упомянутых режимов фиксируем произвольно натуральное $k\colon 1\leqslant k\leqslant m-1$ и предположим, что совокупность индексов $1\leqslant j\leqslant m$ разбита на два непересекающихся множества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, состоящих из k и $m-k$ элементов соответственно, т.е.

$$\{1,2,\ldots,m\} = \mathcal{A}\bigcup\mathcal{B}. \tag{4.2}$$

Тогда, очевидно, система (4.1) допускает решения с компонентами

$$u_j = v(t) \quad \text{при} \quad j\in\mathcal{A}, \quad u_j = w(t) \quad \text{при} \quad j\in\mathcal{B}, \tag{4.3}$$

где переменные v, w удовлетворяют вспомогательной системе

$$\dot{v} = \lambda f(v(t-1))v + (m-k)dg\left(\frac{w}{v}\right)v, \quad \dot{w} = \lambda f(w(t-1))w + kdg\left(\frac{v}{w}\right)w. \tag{4.4}$$

Если же, в свою очередь, система (4.4) имеет непостоянное периодическое решение

$$v = v_{(k)}(t), \quad w = w_{(k)}(t), \quad v_{(k)}(t)\not\equiv w_{(k)}(t), \tag{4.5}$$

то отвечающее ему решение (4.2), (4.3) исходной системы (4.1) назовём периодическим режимом двухкластерной синхронизации.

Нетрудно увидеть, что один и тот же цикл (4.5) порождает целое семейство $\mathcal{U}_k$ периодических режимов двухкластерной синхронизации. Все циклы из этого семейства задаются равенствами (4.2), (4.3) при

$$v = v_{(k)}(t), \quad w = w_{(k)}(t),$$

а их количество очевидно равно C_m^k.

Остановимся сначала на вопросе о существовании семейства циклов $\mathcal{U}_k$. В связи с этим при условиях (2.17), (3.8) применим к системе (4.4) теоремы 1, 2. В результате убедимся в том, что проблема существования и устойчивости её неоднородного цикла (4.5) сводится к отысканию ненулевого устойчивого состояния равновесия аналогичного (3.12) скалярного нелинейного уравнения

$$\frac{dz}{d\tau} = k\Delta(-z) - (m-k)\Delta(z), \tag{4.6}$$

где $\Delta(z)$ – функция (3.10).

Как и ранее, всюду ниже считаем, что нелинейность $g(u)$ в (4.1) задана равенством (3.17). Тогда, выполнив в (4.6) замены (3.19) и устремив при фиксированном $a>1$ параметр b к бесконечности, для новой переменной $\widetilde{z}$ получим аналогичное (3.22) уравнение

$$\frac{d\widetilde{z}}{d\tau} = k - a(m-k)\frac{\exp\widetilde{z}}{1+\exp\widetilde{z}}. \tag{4.7}$$

Заметим, что при условии

$$a > \max\left(1, \frac{k}{m-k}\right) \tag{4.8}$$

уравнение (4.7) допускает экспоненциально устойчивое состояние равновесия

$$z^*_{(k)} = \ln\frac{k}{a(m-k)-k}. \tag{4.9}$$

Что же касается исходного уравнения (4.6), то при выполнении неравенства (4.8) оно имеет экспоненциально устойчивое состояние равновесия $z^*_{(k)}(b) > 0$ с асимптотикой

$$z^*_{(k)}(b) = \ln b + z^*_{(k)} + O(b^{-\min(1,a-1)}), \quad b \to +\infty, \tag{4.10}$$

где величина $z^*_{(k)}$ определяется в (4.9).

Итак, из наших построений следует, что при выполнении условия (3.8) при всех $\lambda \gg 1$ и при фиксированных параметрах a и b, первый из которых удовлетворяет неравенству (4.8), а второй – достаточно большой, система (4.1) с нелинейностью (3.17) имеет искомое семейство $\mathcal{U}_k$ периодических режимов двухкластерной синхронизации. Перейдём теперь к вопросу об устойчивости данных циклов. В связи с этим сделаем два полезных наблюдения.

Во-первых, несложная проверка показывает, что система (4.1) инвариантна относительно замен

$$(u_1, u_2, \ldots, u_m) \to (u_{j_1}, u_{j_2}, \ldots, u_{j_m}), \tag{4.11}$$

где $(j_1, j_2, \ldots, j_m)$ – произвольная перестановка набора индексов $(1, 2, \ldots, m)$. Во-вторых, периодические режимы из семейства $\mathcal{U}_k$ допускают кодирование с помощью бинарных векторов

$$(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_m): \quad \vartheta_j = 1 \quad \text{или} \quad 0, \quad j = \overline{1, m}. \tag{4.12}$$

Точнее говоря, предполагаем, что j-я координата вектора (4.12) равна 1 или 0 при $j \in \mathcal{A}$ или $j \in \mathcal{B}$ соответственно. В этом случае между векторами (4.12), содержащими k единиц и $m-k$ нулей, и циклами семейства $\mathcal{U}_k$ имеет место взаимно-однозначное соответствие.

Суммируя сказанное выше, убеждаемся в том, что любые два цикла из $\mathcal{U}_k$ переходят друг в друга под действием замен (4.11), а значит имеют одинаковые свойства устойчивости. Таким образом, проблема устойчивости всех режимов семейства $\mathcal{U}_k$ сводится к исследованию устойчивости только одного цикла (4.2), (4.3), (4.5), соответствующего бинарному вектору

$$(\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m-k}). \tag{4.13}$$

Для решения поставленной проблемы обратимся к модельной системе (2.18), отвечающей системе (4.1) при условиях (2.17), (3.8), (3.17). Характерная особенность этой системы состоит в том, что нелинейности $\psi_j(z)$ в ней теперь задаются равенствами (2.14), в которых все коэффициенты $d^0_{j,s}$ равны единице. Учитывая данное обстоятельство, нетрудно увидеть, что при достаточно большом фиксированном значении параметра b и при дополнительном условии (4.8) циклу семейства $\mathcal{U}_k$ с кодировкой (4.13) соответствует состояние равновесия указанной системы с компонентами

$$z_j = 0, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad j \neq k; \quad z_k = z^*_{(k)}(b), \tag{4.14}$$

где $z^*_{(k)}(b)$ – состояние равновесия (4.10) уравнения (4.6). Таким образом, свойства устойчивости интересующего нас цикла совпадают с аналогичными свойствами состояния равновесия (4.14).

Несложный подсчёт показывает, что система в вариациях, получающаяся при линеаризации системы (2.18) на упомянутом выше состоянии равновесия, преобразуется к виду

$$\frac{dh_j}{d\tau} = -(m-k)\Delta'(z_k)h_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant k-1, \tag{4.15}$$

$$\frac{dh_k}{d\tau} = -\Delta'(-z_k)\sum_{s=1}^{k}\biggl(\sum_{r=s}^{k}h_r\biggr) - \Delta'(z_k)\sum_{s=k+1}^{m}\biggl(\sum_{r=k}^{s-1}h_r\biggr), \tag{4.16}$$

$$\frac{dh_j}{d\tau} = -k\Delta'(-z_k)h_j, \quad k+1 \leqslant j \leqslant m-1, \tag{4.17}$$

где $z_k = z^*_{(k)}(b)$ (см. (4.10)), $\Delta'(z)$, $z \in \mathbb{R}$, – производная функции (3.10). В свою очередь, из структуры уравнений (4.15)–(4.17) следует, что собственные значения матрицы этой системы задаются равенствами

$$\lambda_j = -(m-k)\Delta'(z_k), \quad 1 \leqslant j \leqslant k-1; \quad \lambda_k = -k\Delta'(-z_k) - (m-k)\Delta'(z_k);$$
$$\lambda_j = -k\Delta'(-z_k), \quad k+1 \leqslant j \leqslant m-1. \tag{4.18}$$

При анализе знаков величин (4.18) будем считать выполненным неравенство

$$a > 3. \tag{4.19}$$

В этом случае в силу соотношений (3.20), (3.21), (4.10) имеем

$$\lambda_j = -(m-k)b\biggl[\frac{a\exp z^*_{(k)}}{(1+\exp z^*_{(k)})^2} + O(1/b)\biggr] < 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant k;$$

$$\lambda_j = -\frac{ka}{b}\exp(-z^*_{(k)})[1 + O(b^{-\min(1,a-3)})] < 0, \quad k+1 \leqslant j \leqslant m-1,$$

отсюда и из (4.8), (4.19), в свою очередь, следует, что при выполнении неравенства

$$a > \max\biggl(3, \frac{k}{m-k}\biggr) \tag{4.20}$$

все циклы семейства $\mathcal{U}_k$ являются экспоненциально орбитально устойчивыми.

В итоге отметим, что, как и в предыдущем случае, в рамках модели (4.1) с нелинейностью (3.17) наблюдается феномен буферности. Действительно, из условия (4.20) следует, что при $d \ll 1$, $\lambda \gg 1$ при достаточно большом фиксированном $b > 0$ и при $a > \max(3, m-1)$ в указанной модели существуют все семейства $\mathcal{U}_k$, $k = \overline{1, m-1}$, периодических режимов двухкластерной синхронизации и все режимы из этих семейств устойчивы. Отсюда в силу произвольности m заключаем, что можно добиться сосуществования любого конечного числа устойчивых циклов.

5. Заключение. Интересно отметить, что система (1.11) может иметь и другие аттракторы, отличные от тех, которые описывает теорема 1. Для пояснения сути дела предположим, что коэффициенты синаптических связей заданы равенствами

$$d_{j,s} = \lambda d^0_{j,s}, \quad d^0_{j,s} = \mathrm{const} \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

Далее с учётом соотношения (5.1) произведём в (1.11) замены

$$u_j = \exp(x_j/\varepsilon), \quad j = \overline{1,m}, \quad \varepsilon = 1/\lambda \ll 1.$$

В результате приходим к системе вида

$$\dot{x}_j = F(x_j(t-1), \varepsilon) + \sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{m} d^0_{j,s}H(x_s - x_j, \varepsilon), \quad j = \overline{1,m}, \tag{5.2}$$

где $F(x,\varepsilon)$ – функция из (2.1), $H(x,\varepsilon) = g(\exp(x/\varepsilon))$.

Обратим внимание, что в силу свойств (1.2), (1.9), (1.10) справедливы предельные равенства

$$\lim_{\varepsilon\to 0} F(x,\varepsilon) = R_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{при } x<0, \\ f(1) & \text{при } x=0, \\ -a & \text{при } x>0, \end{cases} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} H(x,\varepsilon) = H_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} -1 & \text{при } x<0, \\ 0 & \text{при } x=0, \\ b & \text{при } x>0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что при $\varepsilon\to 0$ исходная релаксационная система (5.2) переходит в релейную систему

$$\dot{x}_j = R_0(x_j(t-1)) + \sum_{\substack{s=1 \\ s\neq j}}^{m} d^0_{j,s} H_0(x_s - x_j), \quad j=\overline{1,m}. \tag{5.3}$$

Наличие предельного объекта (5.3) представляет собой ещё одну характерную особенность нашего подхода к математическому моделированию электрических синапсов. Опираясь на эту особенность, для отыскания аттракторов системы (5.2) можем воспользоваться общими результатами из статьи [5] о соответствии между устойчивыми циклами релейной и релаксационной систем. Однако для того чтобы применить эти результаты сначала необходимо изучить свойства предельной релейной системы. К сожалению, пока имеется весьма скудная информациия об её аттракторах.

В первую очередь отметим, что система (5.3) допускает однородный цикл

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_m = x_0(t), \tag{5.4}$$

где $x_0(t)$ – периодическая функция (1.5). Вопрос же о нахождении у неё циклов, отличных от (5.4), представляет собой отдельную и пока не решённую проблему. Добавим только, что, как показывают численные эксперименты, такие циклы могут существовать даже в простейшем случае $m=2$.

Для того чтобы убедиться в этом, обратимся к системе

$$\dot{x}_1 = R_0(x_1(t-1)) + d_1 H_0(x_2 - x_1), \quad \dot{x}_2 = R_0(x_2(t-1)) + d_2 H_0(x_1 - x_2), \tag{5.5}$$

где $d_1, d_2 = \text{const} > 0$. Отметим сразу, что в симметричном случае $d_1 = d_2$ кроме однородного цикла (5.4) никаких других аттракторов в ней обнаружить не удалось. Однако в несимметричном случае численный анализ данной системы при значениях параметров $a = 2.5$, $b = 0.07$, $d_1 = 1.5$, $d_2 = 0.1$ и при начальных условиях $x_1 = -1$, $x_2 = t$, заданных на отрезке $-1 \leqslant t \leqslant 0$, показал наличие у неё устойчивого неоднородного цикла. Характерная особенность этого цикла состоит в том, что его компоненты $x_1(t)$, $x_2(t)$ имеют по четыре переключения на промежутке времени длины периода.

Напомним (см. работы [5, 14]), что согласно общепринятой в теории релейных систем терминологии точками переключения компоненты $x_j(t)$ системы (5.5) называются моменты времени, при прохождении через которые производная $\dot{x}_j(t)$ претерпевает конечные скачки, а сама функция $x_j(t)$ остаётся непрерывной. В случае найденного нами цикла у его компонент $x_1(t)$, $x_2(t)$ на отрезке длины периода имеются по две точки переключения, связанные с переменами знаков запаздывающих компонент $x_1(t-1)$ и $x_2(t-1)$ соответственно, и ещё две общие для обеих компонент точки переключения, обусловленные переменами знаков функции $x_1(t) - x_2(t)$.

Проекция упомянутого устойчивого цикла на плоскость (x_1, x_2) представлена на рис. 4. Вопрос о его аналитическом построении пока остаётся открытым.

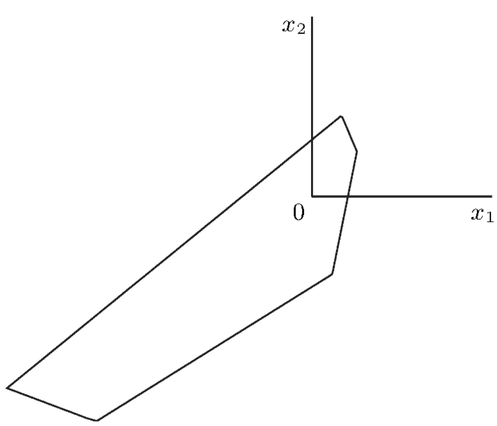

Рис. 4. График кривой $(x_1(t), x_2(t))$ при $a = 2.5$, $b = 0.07$, $d_1 = 1.5$, $d_2 = 0.1$.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00209).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Об одном способе математического моделирования химических синапсов // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 10. С. 1227–1244.
2. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Релаксационные автоколебания в сетях импульсных нейронов // Успехи мат. наук. 2015. Т. 70. Вып. 3 (423). С. 3–76.
3. *Hutchinson G.E.* Circular causal systems in ecology // Ann. N.Y. Acad. of Sci. 1948. V. 50. P. 221–246.
4. *Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Об одной модификации уравнения Хатчинсона // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2010. Т. 50. № 12. С. 2099–2112.
5. *Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х.* Реле с запаздыванием и его C^1-аппроксимация // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова 1997. Т. 216. С. 126–153.
6. *Scott A.C.* Neuroscience: a Mathematical Primer. New York, 2002.
7. *Кащенко С.А., Майоров В.В.* Модели волновой памяти. М., 2013.
8. *Абарбанель Г.Д.И., Рабинович М.И., Селверстон А., Баженов М.В., Хуэрта Р., Сущик М.М., Рубчинский Л.Л.* Синхронизация в нейронных ансамблях // Успехи физ. наук. 1996. Т. 166. № 4. С. 363–390.
9. *Леванова Т.А., Казаков А.О., Коротков А.Г., Осипов Г.В.* Влияние электрической связи на динамику ансамбля нейроноподобных элементов с синаптическими тормозящими связями // Изв. вузов. Прикл. нелин. динамика. 2018. Т. 26. № 5. С. 101–112.
10. *Щапин Д.С., Некоркин В.И.* Параметрически возбуждаемые хаотические спайковые последовательности и информационные аспекты в ансамбле нейронов ФитцХью–Нагумо // Письма в Журн. эксп. и теор. физики. 2021. Т. 113. Вып. 6. С. 415–420.
11. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Автоволновые процессы в цепочках диффузионно связанных уравнений с запаздыванием // Успехи мат. наук. 2012. Т. 67. Вып. 2 (404). С. 109–156.
12. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Релаксационные автоколебания в нейронных системах. II // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 12. С. 1675–1692.
13. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Дискретные автоволны в системах дифференциально-разностных уравнений с запаздыванием из экологии // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 2012. Т. 277. С. 101–143.
14. *Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Релаксационные автоколебания в нейронных системах. I // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 7. С. 919–932.

Ярославский государственный университет
имени П.Г. Демидова

Поступила в редакцию 16.11.2021 г.
После доработки 20.05.2022 г.
Принята к публикации 25.05.2022 г.