ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 7, с. 882–889

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.6

О КРАТНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА НА ГРАФЕ

© 2022 г. Р. Ч. Кулаев, А. А. Уртаева

Изучаются свойства собственных значений краевой задачи для дифференциального уравнения четвёртого порядка на геометрическом графе, моделирующей упругие деформации стержневой системы с условиями упругошарнирного соединения в узлах. Устанавливаются условия простоты точек спектра соответствующего дифференциального оператора. Выводятся оценки кратности собственных значений. Эти оценки даются в терминах топологических характеристик графа. В рамках этих понятий полученные оценки являются точными.

DOI: 10.31857/S0374064122070020, EDN: CEADRF

Введение. В настоящей работе рассматривается краевая задача для дифференциального уравнения четвёртого порядка на геометрическом графе (пространственной сети) Γ:

$$L_\lambda u \equiv \frac{d^2}{d\Gamma^2}\biggl(p(x)\frac{d^2u}{d\Gamma^2}\biggr) = \lambda\rho(x)u, \quad u|_{\partial\Gamma} = u'|_{\partial\Gamma} = 0, \tag{1}$$

где $\partial\Gamma$ – множество граничных вершин Γ. Задача (1) представляет собой модель балочной конструкции [1–7]. Во внутренних точках рёбер производная $du/d\Gamma$ имеет классическую форму u', а в узлах сети оператор L_λ задаётся наборами условий для упругого шарнирного соединения балок. Мы изучаем вопрос о кратности собственных значений задачи (1) и даём точную оценку кратности собственных значений этой задачи.

Давно замечено, что оценка кратности собственных значений краевых задач на графах существенно зависит от топологии графа. На сегодняшний день хорошо изучены спектральные свойства задачи Штурма–Лиувилля на графе с различными условиями стыковки в узловых вершинах графа (см. работы [8–12]).

Стоит сразу отметить, что изучение свойств решений дифференциальных уравнений четвёртого порядка на сети является существенно более сложной задачей, по сравнению с аналогичной задачей для уравнения Штурма–Лиувилля. Даже модели физического происхождения оказываются очень трудными для анализа (см., например, [4, 5, 13–15]). Наибольшие продвижения в изучении качественных свойств краевых задач четвёртого порядка на графах имеются для уравнения с условиями упругошарнирного сочленения стержней. Для такой краевой задачи в статьях [4, 5] получены условия разрешимости, установлен принцип максимума, на основе которого доказана положительная обратимость краевой задачи и положительность её функции Грина. В [16, 17] изучались свойства решений уравнения (1) (положительность, колеблемость, распределение нулей, неосцилляция). Как показывают результаты этих работ, дифференциальный оператор L_λ задачи (1), порождаемый условиями упругошарнирного сочленения, наследует основные качественные свойства оператора Штурма–Лиувилля на сети. В связи с этим естественным становится вопрос об исследованиях осцилляционных свойств спектра оператора L_λ. Одним из первых шагов на этом пути является изучение вопроса о кратности собственных значений. Ниже устанавливаются условия, обеспечивающие простоту собственных значений оператора L_λ, а также оценки кратностей собственных значений. В частности, показывается, что для точек спектра оператора L_λ имеют место оценки их кратностей, аналогичные оценкам для собственных значений задачи Штурма–Лиувилля (см. [12]). При этом получаемые оценки являются неулучшаемыми.

1. Постановка задачи. Далее используем терминологию и обозначения работ [2, 5]. На протяжении всей статьи $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ обозначает связный и конечный *геометрический граф* без петель с множеством вершин $V(\Gamma)$ и множеством точек рёбер графа $E(\Gamma)$. *Ребро* графа – это интервал конечной длины, а *вершина* графа – это концевая точка одного или нескольких ребер. Ребра графа обозначаются γ_i, вершины – a, b и т.д. Для любой вершины $a \in V(\Gamma)$ через $I(a)$ обозначим множество индексов ребер, инцидентных вершине a, через $|I(a)|$ – количество элементов множества $I(a)$. Элементы множеств $J(\Gamma) = \{a \in V(\Gamma) : |I(a)| \geqslant 2\}$ и $\partial\Gamma = \{a \in V(\Gamma) : |I(a)| = 1\}$ называются *внутренними* и *граничными* вершинами соответственно. Через $|\partial\Gamma|$ обозначаем число граничных вершин графа Γ. Предполагаем, что $\Gamma = E(\Gamma) \bigcup J(\Gamma)$. Обратим внимание, что граничные вершины не включены в граф. *Подграфом* графа Γ называется любое непустое связное подмножество Γ, которое попадает под определение графа. Граф, не имеющий циклов, называется *деревом.* Граф-дерево Γ называем *цепочкой*, если $|I(a)| = 2$ для любой вершины $a \in J(\Gamma)$.

Введём функциональные пространства:

$$C[\Gamma] = \{u : \Gamma \to \mathbb{R} : u \text{ равномерно непрерывна на каждом ребре } \gamma_i \subset E(\Gamma)\};$$

$$C[E(\Gamma)] = \{u : E(\Gamma) \to \mathbb{R} : u \text{ равномерно непрерывна на каждом ребре } \gamma_i \subset E(\Gamma)\}.$$

Каждая функция $u \in C[\Gamma]$ (или $C[E(\Gamma)]$) имеет предел $\lim\limits_{\gamma_i \ni x \to a} u_i(x)$, $i \in I(a)$, в каждой вершине $a \in V(\Gamma)$; обозначим его через $u_i(a)$. Обратим внимание, что $u_k(a)$ не обязательно равны $u_i(a)$ или $u(a)$, где $k, i \in I(a)$ $(k \neq i)$. Пространство непрерывных на Γ функций определяется равенством

$$C(\Gamma) = \{u \in C[\Gamma] : u_i(a) = u(a) \text{ для всех } a \in J(\Gamma) \text{ и всех } i \in I(a)\}.$$

Теперь определим производную функции на графе. Для этого зададим функцию $\mu(x) \in \in C[E(\Gamma)]$, линейно отображающую каждое ребро $\gamma_i \subset E(\Gamma)$ на интервал $(0, l_i) \subset \mathbb{R}$, где l_i – длина γ_i. Положим $u_i'(x) := \lim\limits_{\gamma_i \ni y \to x} (u_i(y) - u_i(x))/(\mu_i(y) - \mu_i(x))$, $x \in \overline{\gamma}_i$. Аналогично определяются производные более высокого порядка.

Через $C^n[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$) мы обозначаем пространство функций $u(x) \in C[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$), производные которых до порядка n включительно существуют и принадлежат пространству $C[E(\Gamma)]$. Для функции $u(x) \in C^n[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$) в любой вершине $a \in V(\Gamma)$ определено множество производных $u_i^{(j)}(a)$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $i \in I(a)$, вдоль ребер, смежных с a. Производные нечётного порядка зависят от ориентации ребер. В дальнейшем при записи условий связи с производными в вершинах графа нам будет удобно использовать производные по направлению “от вершины”, которые мы будем обозначать $u_{i\nu}^{(k)}(a)$ (одномерный аналог производных по внутренней нормали). Для чётной производной ориентация не важна, и поэтому для краткости вместо $u_{i\nu}''(a)$ пишем $u_i''(a)$.

Изучение вопроса о кратности точек спектра задачи (1) будет связано с исследованием свойств решений следующего уравнения:

$$Lu \equiv \frac{d^2}{d\Gamma^2}\left(p(x)\frac{d^2u}{d\Gamma^2}\right) - r(x)u = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{2}$$

При этом под дифференциальным уравнением (2) (совпадающим с уравнением (1) при $r = \lambda\rho$) подразумевается набор обыкновенных дифференциальных уравнений на ребрах графа

$$(p_i(x)u_i'')'' - r_i(x)u = 0, \quad x \in \gamma_i \subset E(\Gamma), \tag{3}$$

и набор условий согласования в каждой внутренней вершине $a \in J(\Gamma)$

$$u_i(a) = u(a), \quad \beta_i(a)u_i''(a) - \vartheta_i(a)u_{i\nu}'(a) = 0, \quad i \in I(a), \tag{4}$$

$$\sum_{i \in I(a)} (p_i u_i'')_\nu'(a) - r(a)u(a) = 0, \quad a \in J(\Gamma). \tag{5}$$

Задача (3)–(5) моделирует малые деформации стержневой системы с условиями упругошарнирного соединения (см. [2, 5] и [7, п. 4.2]). В этом случае равенства (3)–(5) можно трактовать следующим образом: $u(x)$ обозначает смещение балки при выходе из состояния равновесия; условия (4) описывают классические локальные условия в узлах графа – перемещения всех стержней системы являются непрерывными и имеется упругошарнирное сочленение в вершине a (см. [18, раздел 5.18]. Последнее условие – это условие динамического равновесия.

Решением дифференциального уравнения (2) будем называть всякую функцию $u(x) \in \in C^4[\Gamma]\bigcap C(\Gamma)$, удовлетворяющую на каждом ребре графа соответствующему обыкновенному дифференциальному уравнению (3), а в каждой внутренней вершине – условиям (4), (5).

Всюду далее полагаем

$$p\in C^2[E(\Gamma)], \quad \inf_{x\in E(\Gamma)} p(x)>0 \quad \text{и} \quad r,\rho\in C[\Gamma], \quad r(x)>0, \quad \rho(x)>0 \quad \text{на} \quad \Gamma;$$

$$\beta_i(a)\geqslant 0, \quad \vartheta_i(a)\geqslant 0 \quad \text{и} \quad \beta_i(a)+\vartheta_i(a)>0 \quad \text{для любых} \quad a\in V(\Gamma), \quad i\in I(a).$$

2. Вспомогательные утверждения. На протяжении всей статьи будем опираться на следующие результаты.

Лемма 1 [19]. *Пусть $u(x)$ – нетривиальное решение уравнения*

$$(p(x)u'')''-r(x)u=0, \quad x\in[a,b]\subset\mathbb{R}. \tag{6}$$

Если u, u', u'', $(pu'')'$ неотрицательны в точке a, то все эти функции положительны на промежутке $(a,b]$.

Следствие 1. *Пусть $u(x)$ – нетривиальное решение уравнения (6), удовлетворяющее граничным условиям*

$$u(a)(\beta(a)u''(a)-\vartheta(a)u'(a))=0, \quad u(b)(\beta(b)u''(b)+\vartheta(b)u'(b))=0. \tag{7}$$

Тогда $u(x)$ не имеет кратных нулей на интервале (a,b), а в концевых точках a и b не может иметь нуль кратности большей двух.

Определение 1. *S-зоной* функции $u(x)\in C(\Gamma)$ назовём подграф $\Gamma_0\subset\Gamma$ такой, что $u(x)\neq 0$ на Γ_0; $u(x)=0$ на $\partial\Gamma_0$; $u(x)$ имеет нуль на любом подграфе $\Gamma_1\supset\Gamma_0$, $\Gamma_1\neq\Gamma_0$.

Теорема 1 [16]. *Пусть $u(x)$ – решение краевой задачи*

$$Lu=0, \quad x\in\Gamma, \quad u|_{\partial\Gamma}=(\beta u''-\vartheta u'_\nu)|_{\partial\Gamma}=0, \tag{8}$$

имеющее S-зону $\Gamma_0\subset\Gamma$. Тогда любое решение задачи (8) либо пропорционально $u(x)$ на Γ_0, либо меняет знак в Γ_0.

3. Условия простоты собственных значений. Сначала опишем структуру спектра краевой задачи (1).

Лемма 2. *При $\lambda<0$ краевая задача (1) имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. Пусть u – решение задачи (1). Умножим u на $L_\lambda u$ и проинтегрируем дважды по частям. Использовав условия согласования (4), (5), получим

$$0=\int\limits_\Gamma u(x)L_\lambda u(x)\,dx=\int\limits_\Gamma p(x)(u'')^2(x)-\lambda\rho(x)u^2(x)\,dx-\sum_{a\in V(\Gamma)}\lambda\rho(a)u^2(a)-$$

$$-\sum_{a\in V(\Gamma)}u(a)\biggl(\sum_{i\in I(a)}(p_iu''_i)'_\nu(a)-\lambda\rho(a)u\biggr)+\sum_{a\in V(\Gamma)}\sum_{\substack{i\in I(a)\\ \beta_i(a)\neq 0}}\frac{p_i(a)\vartheta_i(a)}{\beta_i(a)}(u'_i)^2(a)=$$

$$=\int\limits_\Gamma p(x)(u'')^2(x)-\lambda\rho(x)u^2(x)\,dx-\sum_{a\in V(\Gamma)}\lambda\rho(a)u^2(a)+\sum_{a\in V(\Gamma)}\sum_{\substack{i\in I(a)\\ \beta_i(a)\neq 0}}\frac{p_i(a)\vartheta_i(a)}{\beta_i(a)}(u'_i)^2(a).$$

С учётом неотрицательности всех функций p, ρ и β, ϑ, а также неравенства $\lambda < 0$, получим

$$0 \geqslant \int\limits_{\Gamma} \rho(x) u^2(x)\, dx \geqslant 0.$$

Поскольку $\rho(x) > 0$ на $E(\Gamma)$, то $u \equiv 0$ на $E(\Gamma)$. Теперь для завершения доказательства леммы остаётся сослаться на непрерывность функции u.

Путём стандартных рассуждений (см., например, [6, 13, 20]) можно доказать следующий классический результат.

Теорема 2. *Дифференциальный оператор L_λ, порождённый соотношениями (1), (4) и (5), является самосопряжённым. Спектр Λ оператора L_λ дискретен, т.е. существует неограниченная последовательность положительных собственных значений $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ такая, что*

$$0 \leqslant \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \ldots$$

Поскольку дифференциальный оператор L_λ является самосопряжённым, то кратность его собственных значений совпадает с размерностью соответствующего собственного подпространства. Поэтому вопрос о кратности точки спектра оператора L_λ удобно обсуждать в форме вопроса о размерности пространства всех решений краевой задачи (8). Обозначим это пространство через $\mathcal{S}(L)$. Очевидно, что $\dim \mathcal{S}(L) \leqslant 4n$, где n – число рёбер графа Γ. В контексте последующего изучения осцилляционных свойств спектра дифференциального оператора L_λ мы интересуемся условиями, обеспечивающими равенство

$$\dim \mathcal{S}(L) = 1, \tag{9}$$

что означает простоту соответствующей точки спектра Λ.

Лемма 3. *Пусть $u \in \mathcal{S}(L)$ и $a \in V(\Gamma)$. Если для некоторого индекса $i \in I(a)$ выполнены равенства $u(a) = (p_i u_i'')'(a) = 0$, то функция $u(x)$ равна тождественно нулю на соответствующем ребре γ_i.*

Доказательство. Пусть $\gamma_i = (a, b)$. Тогда из условий (4) в вершине a и условий леммы следует, что значения $u_i(a)$, $u'_{i\nu}(a)$, $u''_i(a)$ и $(p_i u''_i)'_\nu(a)$ либо все неотрицательны, либо все неположительны, а из условий (4) в вершине b следует, что $u'_{i\nu}(b) u''_i(b) \geqslant 0$. В силу леммы 1 $u_i \equiv 0$. Лемма доказана.

Следствие 2. *Если $\dim \mathcal{S}(L) \geqslant 2$, то для всякой граничной вершины $a \in \partial\Gamma$ существует нетривиальное решение задачи (8), тождественно равное нулю на примыкающем к a ребре.*

Следствие 3. *Если всякое нетривиальное решение задачи (8) имеет в Γ только изолированные нули, то справедливо равенство (9).*

Лемма 4. *Пусть $u \in \mathcal{S}(L)$ и для некоторой вершины $a \in J(\Gamma)$ выполнены равенства*

$$u(a) = 0, \quad (p_i u''_i)'_\nu(a) = 0, \quad i \in I(a) \setminus i_0, \quad i_0 \in I(a). \tag{10}$$

Тогда $u(x)$ равна тождественно нулю на всех ребрах графа, примыкающих к вершине a.

Доказательство. Из леммы 3 следует, что $u_i \equiv 0$ для всех $i \in I(a) \setminus i_0$. Тогда из условия (5) в вершине $a \in J(\Gamma)$ получаем

$$\sum_{i \in I(a)} (p_i u''_i)'_\nu(a) = (p_{i_0} u''_{i_0})'_\nu(a) = 0.$$

Из леммы 3 имеем $u_{i_0} \equiv 0$. Лемма доказана.

Следствие 4. *Пусть Γ является графом-цепочкой. Тогда* $\dim \mathcal{S}(L) = 1$.

Доказательство. Пусть $a \in \partial\Gamma$. Тогда для любого нетривиального решения $u \in \mathcal{S}(L)$ выполнено неравенство $(pv'')'_\nu(a) \neq 0$, иначе в противном случае из лемм 3 и 4 будет следовать тождество $u \equiv 0$ на всей цепочке Γ.

Возьмём теперь два произвольных ненулевых решения $u, v \in \mathcal{S}(L)$ и рассмотрим нетривиальную линейную комбинацию

$$w(x) = (pv'')'_\nu(a) u(x) - (pu'')'_\nu(a) v(x).$$

Очевидно, что $w \in \mathcal{S}(L)$ и $w(a) = 0$, $(pw'')'(a) = 0$. Опять же, ввиду лемм 3 и 4, имеем $w \equiv 0$ на Γ. Следствие доказано.

Определение 2. Точку $x_0 \in \Gamma$ назовём *нетривиальным нулём* функции $u \in C(\Gamma)$, если $u(x_0) = 0$, а в любой окрестности точки x_0 функция u не тождественна нулю.

Следствие 5. *Пусть $u \in \mathcal{S}(L)$. Если вершина $a \in J(\Gamma)$ является нетривиальным нулём функции $u(x)$, то $u(x)$ не равна тождественно нулю по крайней мере на двух ребрах, примыкающих к вершине a.*

Введём обозначение $J_{3+}(\Gamma) = \{a \in J(\Gamma) : |I(a)| \geqslant 3\}$.

Лемма 5. *Пусть $u(x)$ – нетривиальное решение (8), равное тождественно нулю на некотором ребре. Если $|\partial\Gamma| \geqslant 3$, то найдётся вершина $a \in J_{3+}(\Gamma)$ такая, что $u(a) = 0$.*

Доказательство. Пусть $u \equiv 0$ на ребре γ_1. Так как $u \not\equiv 0$ на Γ, то найдётся ребро $\gamma_j \subset E(\Gamma)$ такое, что $u_j(x) \not\equiv 0$. Рассмотрим произвольную цепочку $\Gamma(\gamma_1, \gamma_j)$ графа Γ, соединяющую ребра γ_1 и γ_j. Без ограничения общности можно считать, что ребра и вершины графа занумерованы так, что цепочка $\Gamma(\gamma_1, \gamma_j)$ состоит из рёбер $\gamma_i = (a_i, a_{i+1})$, $a_i \in V(\Gamma)$, с индексами $1 \leqslant i \leqslant j$. Если $a_2 \in J_{3+}(\Gamma)$, то лемма доказана. В противном случае $|I(a_2)| = 2$ и тождество $u_1 \equiv 0$ вместе со следствием 5 дают $u_2 \equiv 0$. Поскольку $u_j \not\equiv 0$, то найдётся ребро $\gamma_i \subset \Gamma(\gamma_1, \gamma_j)$ такое, что соответствующая концевая точка a_i этого ребра принадлежит множеству $J_{3+}(\Gamma)$. Лемма доказана.

Определение 3. Назовём точку $x_0 \in \Gamma$ *простой*, если $x_0 \notin J_{3+}(\Gamma)$ и множество $\Gamma \setminus \{x_0\}$ не связно.

Отметим, что если Γ является деревом, то любая точка $x \in \Gamma \setminus J_{3+}(\Gamma)$ является простой.

Определение 4. Будем говорить, что задача (8) *простая*, если у некоторого её решения все нули в Γ являются простыми. В частности, если существует решение задачи (8) без нулей в Γ, то такая задача также называется простой.

Теорема 3. *Если задача (8) простая, то выполнено равенство (9).*

Доказательство. С учётом следствия 4 нужно рассмотреть случай $|\partial\Gamma| \geqslant 3$. Пусть $v \in \mathcal{S}(L)$ и v имеет нули только в простых точках Γ, либо вообще не имеет нулей в Γ. Число нулей v конечно. Действительно, иначе $v_{i_0} \equiv 0$ на некотором ребре $\gamma_{i_0} = (a_1, a_2)$ и, как следует из леммы 5, существует вершина $a \in J_{3+}(\Gamma)$ такая, что $v(a) = 0$. Получим противоречие.

Через $\{\Gamma_i\}_{i=1}^k$ обозначим множество всех S-зон функции v. Будем говорить, что S-зоны Γ_i и Γ_j $(i \neq j)$ смежны, если $\partial\Gamma_i \bigcap \partial\Gamma_j \neq \varnothing$. Поскольку все нули функции v в Γ простые, то для каждой пары смежных S-зон пересечение $\partial\Gamma_i \bigcap \partial\Gamma_j$ является одноточечным. Отношение смежности на множестве $\{\Gamma_i\}_{i=1}^k$ позволяет рассматривать это объединение S-зон как алгебраический граф: S-зоны являются вершинами, нули v являются рёбрами. Обозначим этот граф через $S\Gamma$. При этом мы допускаем, что $S\Gamma$ является нуль-графом, т.е. не содержит рёбер (в случае, когда v не имеет нулей в Γ). Легко видеть, что $S\Gamma$ является связным и не имеет циклов.

Для дальнейшего доказательства теоремы введём следующую терминологию. Граничные вершины графа $S\Gamma$ назовём *вершинами нулевого порядка.* Обозначим через $S_1\Gamma$ алгебраический граф, полученный из $S\Gamma$ удалением всех вершин степени 1 вместе с инцидентными рёбрами. Тогда граничные вершины подграфа $S_1\Gamma$ назовём *вершинами первого порядка.* Обозначим через $S_2\Gamma$ граф, полученный из $S_1\Gamma$ удалением всех его вершин степени 1 вместе с инцидентными рёбрами. Граничные вершины подграфа $S_2\Gamma$ называем *вершинами второго порядка* и т.д.

Пусть $u(x)$ – произвольная нетривиальная функция из $\mathcal{S}(L)$, а Γ_{i_0}-произвольная вершина нулевого порядка графа $S\Gamma$. Тогда $\partial\Gamma_{i_0} \setminus \partial\Gamma = x_1$, где x_1 – нуль функции v. Поэтому

$$u(x) = \beta(x)u''(x) - \vartheta(x)u'_\nu(x) = 0, \quad x \in \partial\Gamma_{i_0} \setminus x_1.$$

В силу теоремы 1 получаем $u(x) = C_{i_0}v(x)$ при $x \in \Gamma_{i_0}$. Действительно, если решения u и v не пропорциональны на подграфе Γ_{i_0}, то согласно теореме 1 решение $u \in \mathcal{S}(L)$ имеет в подграфе Γ_{i_0} S-зону $\widetilde{\Gamma}_{i_0} \subset \Gamma_{i_0}$, причём $\widetilde{\Gamma}_{i_0} \neq \Gamma_{i_0}$. Но тогда, опять же в силу теоремы 1, функция v должна иметь нули в $\widetilde{\Gamma}_{i_0}$. Получим противоречие.

Таким образом, если Γ_{i_0} – произвольная вершина нулевого порядка алгебраического графа $S\Gamma$, то $u(x)=0$ на $\partial\Gamma_{i_0}$.

Возьмём произвольную вершину первого порядка Γ_{i_1} графа $S\Gamma$. Легко видеть, что $u(x) = 0$ для каждого $x\in\partial\Gamma_{i_1}\setminus x_2$, где $x_2=\partial\Gamma_{i_1}\bigcap E(S_1\Gamma)$. В силу теоремы 1 получаем $u(x) = C_{i_1}v(x)$ на $\partial\Gamma_{i_1}$ и так далее. Таким образом, мы можем заключить, что на любой зоне знакопостоянства функции v решения v и u пропорциональны.

Поскольку $u\not\equiv 0$, то существует S-зона Γ_0 функции v такая, что $u=C_0v$ на Γ_0 и $C_0\neq 0$. Если других S-зон функция v не имеет, то теорема доказана. В противном случае рассмотрим функцию $w(x)=u(x)-C_0v(x)$ и произвольную точку $x_0\in\partial\Gamma_0\bigcap\Gamma$. Очевидно, что $w(x)\equiv 0$ на Γ_0, а точка x_0 является простой. Из определения 3 и следствия 5 получаем $w(x)\equiv 0$ в некоторой окрестности x_0. Отсюда следует, что $w(x)\equiv 0$ на всех S-зонах функции v, смежных с Γ_0. Этот факт позволяет рассмотреть функцию w на каждой смежной с Γ_0 зоной знакопостоянства функции v и провести те же рассуждения, что и на Γ_0.

Поскольку $S\Gamma$ – конечный граф, мы заключаем, что $w(x)\equiv 0$ на Γ. Теорема доказана.

Следствие 6. *Пусть граф* Γ *является деревом. Если существует функция из* $\mathcal{S}(L)$, *не имеющая нулей в* Γ, *то* $\dim\mathcal{S}(L)=1$.

4. Оценки кратности собственных значений. Пусть $\widetilde{\Gamma}$ – подграф графа Γ. Множество функций из $\mathcal{S}(L)$, обращающихся в нуль на $\Gamma\setminus\widetilde{\Gamma}$, обозначим через $\mathcal{S}(L_{\widetilde{\Gamma}})$. Нетрудно видеть, что для любой функции $u\in\mathcal{S}(L)$ её сужение на $\widetilde{\Gamma}$ является решением краевой задачи

$$Lu=0,\quad x\in\widetilde{\Gamma},\quad u|_{\partial\widetilde{\Gamma}}=(\beta u''-\vartheta u'_\nu)|_{\partial\widetilde{\Gamma}}=0.$$

Теорема 4. *Пусть граф* Γ *является деревом. Тогда* $\dim\mathcal{S}(L)\leqslant d-1$, *где* d *– число граничных вершин графа* Γ.

Доказательство. При $d=2$ доказываемое утверждение следует из следствия 4.

Пусть $d\geqslant 3$ и a_1, a_2, $\ldots$, a_d – все граничные вершины графа Γ. Предположив противное, можно фиксировать линейно независимый набор $\{u^i(x)\}_{i=1}^d$ функций из $\mathcal{S}(L)$. Рассмотрим вершину $a_1\in\partial\Gamma$. Поскольку $d\geqslant 3$, то в силу леммы 5 вершина a_1 обязательно является концевой вершиной некоторой цепочки $\Gamma(a_1,b_1)$ (возможно, состоящей из одного ребра), промежуточные вершины которой имеют кратность два в исходном графе Γ, соединяющей a_1 с некоторой вершиной $b_1\in J_{3+}(\Gamma)$. Рассуждая как и в доказательстве следствия 4, линейными комбинациями из функций $\{u^i(x)\}_{i=1}^d$ можно построить $d-1$ линейно независимых решений $\{v^i(x)\}_{i=1}^{d-1}$, обращающихся в нуль на цепочке $\Gamma(a_1,b_1)$.

Положим $\Gamma_1=\Gamma\setminus(\Gamma(a_1,b_1)\bigcup a_1)$. Очевидно, что $\partial\Gamma_1=\{a_2,a_3,\ldots,a_d\}$, а все функции v^i принадлежат $\mathcal{S}(L_{\Gamma_1})$. Теперь можно рассмотреть вершину a_2 и повторить предыдущие рассуждения. Продолжая этот процесс, мы придём к графу-цепочке $\Gamma_{d-1}\subset\Gamma$, соединяющему a_{d-1} с a_d, и двум решениям $w^1,w^2\in\mathcal{S}(L_{\Gamma_{d-1}})$. Из следствия 4 легко следует, что функции w^1 и w^2 линейно зависимы, что противоречит сделанному выше предположению о линейной независимости набора $\{u^i(x)\}_{i=1}^d$. Теорема доказана.

Следующий пример показывает, что полученная оценка является точной.

Пример. Рассмотрим граф Γ, состоящий из трёх рёбер $\gamma_i=(a_i,b)$, $i\in\{1,2,3\}$, с одним общим концом b (внутренняя вершина графа). Предполагая, что ребра γ_i направлены в сторону от граничных вершин a_i, мы рассмотрим спектральную краевую задачу на Γ:

$$u_i^{IV}-\lambda u_i=0,\quad x\in\gamma_i,$$

$$u\in C(\Gamma)\bigcap C^4[\Gamma],\quad u_i''(b)=0,\quad u_{1\nu}'''(b)+u_{2\nu}'''(b)+u_{3\nu}'''(b)=0;$$

$$u(a_i)=u'(a_i)=0,\quad a_i\in\partial\Gamma.$$

Пусть все три ребра графа имеют единичную длину. Используя метрическую функцию $\mu = \mu(x)$, построим характеристический определитель краевой задачи:

$$\Delta(\lambda)=8(1+\cos\sqrt[4]{\lambda}\,\mathrm{ch}\,\sqrt[4]{\lambda})\sin^2\sqrt[4]{\lambda}\,\mathrm{sh}^2\sqrt[4]{\lambda}.$$

Нули $\Delta(\lambda)$ являются собственными значениями краевой задачи. Мы имеем две последовательности собственных значений:

$$\lambda_k^{(1)} = \left(\pi k - \frac{\pi}{2} + o(k^{-1})\right)^4, \quad \lambda_k^{(2)} = (\pi k)^4, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Кратность каждого собственного значения $\lambda_k^{(1)}$ равна единице, а каждое из $\lambda_k^{(2)}$ имеет кратность два.

Лемма 6. *Пусть $x_0 \in \Gamma$ и существует функция из $\mathcal{S}(L)$, не равная нулю в точке x_0. Тогда размерность пространства решений из $\mathcal{S}(L)$, которые обращаются в нуль в точке x_0 равна $\dim \mathcal{S}(L) - 1$.*

Доказательство леммы 6 следует из того факта, что множество $\{u \in \mathcal{S}(L) : u(x_0) = 0\}$ является гиперплоскостью, порождаемой линейным функционалом $l(u) = u(x_0)$ на конечномерном пространстве $\mathcal{S}(L)$.

Лемма 7. *Для любой вершины $a \in J(\Gamma)$ размерность пространства решений из $\mathcal{S}(L)$, которые обращаются в нуль на всех ребрах, примыкающих к a, не меньше $\dim \mathcal{S}(L) - |I(a)|$.*

Доказательство. Содержательную часть утверждения леммы несет случай $\dim \mathcal{S}(L) > |I(a)|$. Обозначая $m = \dim \mathcal{S}(L)$ и привлекая лемму 6, мы всегда можем выбрать $m-1$ линейно независимых решений из $\mathcal{S}(L)$, каждое из которых равно нулю в вершине a. Далее, переходя, как обычно, к линейным комбинациям, из этих функций можно построить $m - |I(a)|$ линейно независимых решений, удовлетворяющих условиям (10), с последующим привлечением леммы 4. Для этого опять можно применить рассуждение из следствия 4. Лемма доказана.

Лемма 7 позволяет перенести основной результат работы [12, теорема 3], относящийся к задаче Штурма–Лиувилля на сети, на краевую задачу четвёртого порядка (1). Прежде чем сформулировать соответствующий результат, напомним некоторые определения из [12].

Пусть теперь Γ – произвольный граф. Вершину $a \in J(\Gamma)$, лежащую на каком-либо цикле, назовём *разбивающей*, если $\Gamma \setminus a$ не связно. Пусть $\Gamma_i(a)$ – одна из компонент связности множества $\Gamma \setminus a$. Множество $\Gamma_i = \Gamma_i(a) \bigcup a$ является подграфом графа Γ, который также может иметь циклы. Он также может разбиваться на связные компоненты некоторыми вершинами, лежащими на его циклах. Во избежание недоразумений подчеркнём, что выбрасываются только вершины, лежащие на циклах. После такого разбиения снова образуем подграфы типа Γ_i, присоединяя к ним вершины, с помощью которых они разбивались. Продолжая этот процесс и далее, мы получаем некоторое количество подграфов. Каждый из них является либо деревом, либо связным объединением циклов, не допускающим дальнейшего разбиения описанного выше типа. Такое объединение циклов назовём *гнездом*.

Обозначим через $\zeta(\Gamma)$ количество гнёзд графа, содержащих ровно по одной разбивающей вершине, а через $\eta(\Gamma)$ – цикломатическое число графа Γ.

Теорема 5. *Кратность любого собственного значения краевой задачи (1) не превосходит величины $|\partial\Gamma| + \zeta(\Gamma) + \eta(\Gamma) - 1$.*

Доказательство теоремы 5 почти дословно повторяет доказательство соответствующего результата из работы [12], поскольку для рассматриваемой задачи (1) лемма 7 обеспечивает выполнение условий теоремы 3 из статьи [12].

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение 075-02-2022-890).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боровских А.В., Мустафокулов Р., Лазарев К.П., Покорный Ю.В.* Об одном классе дифференциальных уравнений четвёртого порядка на пространственной сети // Докл. РАН. 1995. Т. 345. № 6. С. 730–732.
2. *Кулаев Р.Ч.* О функции Грина краевой задачи на графе-пучке // Изв. вузов. Математика. 2013. № 2. С. 56–66.
3. *Кулаев Р.Ч.* Неосцилляция уравнения четвертого порядка на графе // Мат. сб. 2015. Т. 206. № 12. С. 79–118.

4. *Покорный Ю.В., Мустафокулов Р.* О положительности функции Грина линейных краевых задач для уравнений четвёртого порядка на графе // Изв. вузов. Математика. 1999. № 2. С. 75–82.
5. *Borovskikh A.V., Lazarev K.P.* Fourth-order differential equations on geometric graphs // J. of Math. Sci. 2004. V. 119. № 6. P. 719–738.
6. *Mercier D., Régnier V.* Control of a network of Euler–Bernoulli beams // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 342. № 2. P. 874–894.
7. *Xu Gen Qi, Mastorakis N.E.* Differential Equations on Metric Graph. Boston, 2010.
8. *Lubary J.A.* On the geometric and algebraic multiplicities for eigenvalue problems on graphs // Lect. Not. in Pure and Appl. Math. V. 219. New York, 2001. P. 135–146.
9. *Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М., 2007.
10. *Kuchment P.* Quantum graphs. I. Some basic structures // Waves in Random Media. 2004. V. 14. № 1. P. 107–128.
11. *Kuchment P.* Quantum graphs. II. Some spectral properties of quantum and combinatouial graphs // J. Phys. A. 2005. V. 38. № 22. P. 4887–4900.
12. *Диаб А.Т., Калдыбекова Б.К., Пенкин О.М.* О кратности собственных значений в задаче Штурма–Лиувилля на графах // Мат. заметки. 2016. Т. 99. № 4. С. 489–501.
13. *Кулаев Р.Ч.* Необходимое и достаточное условия положительности функции Грина для уравнения четвёртого порядка на графе // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 3. С. 302–316.
14. *Кулаев Р.Ч.* О свойстве неосцилляции уравнения на графе // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57. № 1. С. 85–97.
15. *Кулаев Р.Ч.* К вопросу о неосцилляции уравнения на графе // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 11. С. 1563–1565.
16. *Кулаев Р.Ч., Уртаева А.А.* Теоремы Штурма о распределении нулей для уравнения четвёртого порядка на графе // Мат. заметки. 2022. Т. 111. № 6. С. 947–952.
17. *Kulaev R.Ch.* The qualitative theory of fourth-order differential equations on a graph // Mediterr. J. Math. 2022. V. 19. № 73. P. 1–15.
18. *Timoshenko S.P., Young D.H., Weaver Jr.W.* Vibration Problems in Engineering. Chichester, 1990.
19. *Leighton W., Nehari Z.* On the oscillation of solutions of self-adjoint linear differential equations of the fourth order // Trans. Amer. Math. Soc. 1958. V. 89. P. 325–377.
20. *Castro C., Zuazua E.* Exact boundary controllability of two Euler–Bernoulli beams connected by a point mass // Math. Comput. Model. 2000. V. 32. P. 955–969.

Южный математический институт –
филиал Владикавказского научного центра РАН,
Северо-Осетинский государственный университет
имени К.Л. Хетагурова, г. Владикавказ

Поступила в редакцию 14.03.2022 г.
После доработки 14.03.2022 г.
Принята к публикации 25.05.2022 г.