ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 7, с. 890–911

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.95

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ ТРЕТЬЕГО РОДА ДЛЯ АБСТРАКТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2022 г. И. В. Тихонов, М. Алмохамед

В банаховом пространстве рассматривается линейная обратная задача для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка. Стационарное неоднородное слагаемое в уравнении предполагается неизвестным. В начальный момент времени заданы стандартные условия Коши. К ним добавляется дополнительное условие – финальное переопределение третьего рода. Оно содержит комбинацию значений эволюционной функции и её производной в выбранный финальный момент времени. Для изучаемой задачи установлен критерий единственности решения, выраженный в спектральных терминах – через нули характеристической целой функции. Результат носит универсальный характер и не требует ограничений на тип дифференциального уравнения. Отдельно обсуждается вопрос о распределении нулей характеристической функции. Посредством проведённого анализа получен ряд эффективных достаточных признаков единственности (и неединственности) решения. Все они просты и удобны на практике.

DOI: 10.31857/S0374064122070032, EDN: CECRGN

1. Постановка задачи. Пусть E – комплексное банахово пространство и A – линейный замкнутый оператор в E с областью определения $D(A)\subset E$ (не обязательно плотной в E). Зафиксируем вещественное число $T>0$. На интервале $(0,T)$ рассмотрим абстрактное дифференциальное уравнение второго порядка

$$u''(t)=Au(t)+g,\quad 0<t<T, \tag{1}$$

с неизвестным элементом $g\in E$.

Для одновременного нахождения функции $u\colon [0,T]\to E$ и элемента g добавим условия Коши

$$u(0)=u_0,\quad u'(0)=u_1 \tag{2}$$

и специальное переопределение

$$\alpha u(T)+\beta u'(T)=u_2. \tag{3}$$

Элементы $u_0,u_1,u_2\in E$ и числовые значения $\alpha,\beta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ считаем заданными.

Условие (3) будем называть *финальным переопределением третьего рода.* Задача (1)–(3) относится к классу *обратных задач* (см. [1, 2]). Модельная форма (1)–(3), простая по виду, но общая по характеру, позволяет охватить единым методом широкий круг примеров из математической физики. Главное, чтобы изучаемое дифференциальное уравнение имело второй порядок по выделенной переменной t, неформально полагаемой *временем.* Цель нашей работы – получить критерий единственности решения обратной задачи (1)–(3) без ограничений на оператор A, кроме отмеченных *линейности* и *замкнутости.* Поясним понятие решения.

Пару $(u(t),g)$ назовём *ослабленным решением* обратной задачи (1)–(3), если

$$u\in C^2((0,T),E)\bigcap C^1([0,T],E),\quad u(t)\in D(A)\quad \text{при}\quad 0<t<T,\quad g\in E, \tag{4}$$

и все соотношения (1)–(3) выполнены. При этом автоматически $Au\in C((0,T),E)$.

Повышая требования, будем считать ослабленное решение $(u(t),g)$ *классическим*, если

$$u\in C^2([0,T],E),\quad u(t)\in D(A)\quad \text{при}\quad 0\leqslant t\leqslant T,\quad g\in E. \tag{5}$$

При этом уравнение (1) должно выполняться на отрезке $[0,T]$, а в соотношениях (2) для согласования условий естественно выбирать элемент u_0 из $D(A)$.

В основном мы будем рассматривать именно ослабленные решения (4), называя их далее просто *решениями*. Тогда, установив критерий единственности для ослабленных решений (4), получим результат, пригодный и для классических решений (5).

По-видимому, поставленная обратная задача ещё не изучена с должной подробностью. Нам известны лишь прежние результаты [2; п. 8.3], где для уравнений “эллиптического типа” с позитивным оператором A (в смысле П.Е. Соболевского, см. [3; с. 275]) обсуждался аналог обратной задачи (1)–(3) со значениями $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$.

Отметим ещё, что специальные случаи $\alpha\neq 0$, $\beta=0$ (*финальное переопределение первого рода*) и $\alpha=0$, $\beta\neq 0$ (*финальное переопределение второго рода*) более известны, и общие критерии единственности для них получены в работах [4] и [5] соответственно. Поэтому далее, не снижая общности, ограничимся предположением $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$, как и было указано при постановке задачи. Точнее, наша постановка задачи (1)–(3) зависит от трёх числовых параметров $\alpha,\beta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ и $T>0$. Как мы увидим в дальнейшем, картина с единственностью решения по-сути обусловлена одним “безразмерным” параметром $p\equiv 2\beta/(\alpha T)$.

Завершая этот вводный раздел, отметим роль А.И. Прилепко, интерес и настойчивость которого во многом сформировали подходы к изучению подобных обратных задач. Первоначальный импульс развитию дал, возможно, обзор [6], где был намечен переход от обратных задач теории потенциала к некоторым идейно близким обратным задачам для эволюционных уравнений (см. также [7]). Кроме того, выделим работы [8–12], идейно повлиявшие на наше исследование и посвящённые различным неклассическим задачам с теми или иными финальными условиями (см. также [13–15]).

Теперь, использовав методику работы [4] и некоторые факты из теории целых функций, установим универсальный критерий единственности решения для обратной задачи (1)–(3), действующий без ограничений на тип дифференциального уравнения (1).

2. Однородная обратная задача. Допустим, что обратная задача (1)–(3) с некоторыми элементами $u_0,u_1,u_2\in E$ разрешима. Поставим вопрос о единственности её ослабленного решения. Он очевидно сводится к вопросу об отсутствии нетривиальных решений у однородной обратной задачи для уравнения (1) с условиями

$$u(0)=0,\quad u'(0)=0,\quad \alpha u(T)+\beta u'(T)=0. \tag{6}$$

Как обычно, *тривиальным решением* однородной задачи (1), (6) считаем пару

$$u(t)\equiv 0,\quad g=0. \tag{7}$$

Все другие решения задачи (1), (6) (если они есть) называем тогда *нетривиальными**).

Укажем простой способ, позволяющий строить нетривиальные решения однородной обратной задачи (1), (6). Рассмотрим её “операционный аналог”, состоящий из скалярной задачи Коши

$$y''(t)=\lambda y(t)+1,\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{8}$$

$$y(0)=0,\quad y'(0)=0 \tag{9}$$

и финального условия

$$\alpha y(T)+\beta y'(T)=0. \tag{10}$$

Здесь λ – спектральный параметр. Требуется найти значения $\lambda\in\mathbb{C}$, при которых в скалярной задаче (8)–(10) существуют решения $y\in C^2[0,T]$.

*) Очевидно, что у таких нетривиальных решений $(u(t),g)$ функция $u(t)$ не должна обращаться в тождественный нуль на $[0,T]$, в то время как возможность $g=0$ изначально исключать нельзя. Эта возможность действительно реализуется в некоторых специальных ситуациях, когда собственные значения оператора A заполняют всю комплексную плоскость, и не реализуется, если хотя бы одна точка из $\mathbb{C}$ не является собственным значением оператора A (подробнее см. [16]).

Нетрудно понять, что каждому такому λ отвечает лишь одно возможное решение $y(t)$ (причём последнее не будет тождественным нулём). Этим спектральная задача (8)–(10) отличается от привычных спектральных задач типа Штурма–Лиувилля, где есть естественное свойство линейности, и собственные функции можно умножать на ненулевые константы.

Анализ спектральной задачи (8)–(10) не сложен. Решение задачи Коши (8), (9) может быть записано в виде

$$y(t) = y(t, \lambda) = \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}t) - 1}{\lambda} \qquad (y(t) = t^2/2 \ \text{ при } \ \lambda = 0). \tag{11}$$

При этом

$$y'(t) = y'_t(t, \lambda) = \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}} \qquad (y'(t) = t \ \text{ при } \ \lambda = 0). \tag{12}$$

Последующая подстановка выражений (11), (12) в финальное условие (10) даёт уравнение

$$\alpha\,\frac{\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}T) - 1}{\lambda} + \beta\,\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}T)}{\sqrt{\lambda}} = 0. \tag{13}$$

Именно корни $\lambda \in \mathbb{C}$ уравнения (13) служат спектральными значениями задачи (8)–(10).

Поясним одно обстоятельство. Функции (11), (12) представимы степенными рядами

$$\frac{\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}t) - 1}{\lambda} = \frac{t^2}{2!} + \lambda\frac{t^4}{4!} + \lambda^2\frac{t^6}{6!} + \ldots + \lambda^n\frac{t^{2n+2}}{(2n+2)!} + \ldots, \tag{14}$$

$$\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}} = \frac{t}{1!} + \lambda\frac{t^3}{3!} + \lambda^2\frac{t^5}{5!} + \ldots + \lambda^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \tag{15}$$

т.е. они являются *целыми* как по переменной t, так и по параметру λ. Тем самым никакой “многозначности”, связанной с присутствием $\sqrt{\lambda}$, в формулах (11)–(13) не возникает. Отметим также связь разложений (14), (15) с теорией так называемых *обобщённых экспонент* и теорией *функций типа Миттаг-Лёффлера* (подробнее см. [17]; см. также [18; с. 33]).

Для последующего использования удобно ввести целые функции*)

$$L_1(\lambda) = L_1(\lambda; T) \equiv \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}T) - 1}{\lambda}, \quad L_2(\lambda) = L_2(\lambda; T) \equiv \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}T)}{\sqrt{\lambda}} \tag{16}$$

переменной $\lambda \in \mathbb{C}$. Составим из функций (16) следующую *характеристическую функцию* изучаемой обратной задачи:

$$L(\lambda) = L(\lambda; T, \alpha, \beta) \equiv \alpha L_1(\lambda) + \beta L_2(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{17}$$

Здесь числа α, β те же, что в условии (3) (а также в последнем из соотношений (6) и в формуле (10)). Нули функции (17) совпадают с корнями уравнения (13) и со спектральными значениями λ скалярной задачи (8)–(10).

Поскольку $L(\lambda)$ есть целая функция нецелого порядка $\rho = 1/2$, то множество нулей

$$\Lambda = \Lambda(T, \alpha, \beta) \equiv \{\lambda \in \mathbb{C}\colon L(\lambda) = 0\} \tag{18}$$

должно быть бесконечным (см. [19; с. 38–41]). Ясно, что это счётное множество с единственной предельной точкой на бесконечности. Структура множества Λ и вопрос о правильной индексации нулей будут рассмотрены отдельно, в пп. 8, 9 ниже. Там, в частности, отмечено, что

*) Это элементарные целые функции порядка $\rho = 1/2$ по переменной $\lambda \in \mathbb{C}$. Все необходимые сведения из теории целых функций см. в [19, 20].

нули функции (17) являются, как правило, простыми, и особых проблем с кратностью точек в множестве (18) не возникает.

Выберем фиксированное значение λ из множества (18), обозначив его временно через λ_0. Поскольку это некоторый нуль функции $L(\lambda)$ и, автоматически, спектральное значение скалярной задачи (8)–(10), то при $\lambda = \lambda_0$ задача (8)–(10) имеет решение

$$y(t) = y(t, \lambda_0) = \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda_0}t) - 1}{\lambda_0} \equiv \frac{t^2}{2!} + \lambda_0 \frac{t^4}{4!} + \ldots + \lambda_0^n \frac{t^{2n+2}}{(2n+2)!} + \ldots, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Допустим, что то же число $\lambda_0 \in \Lambda$ оказалось собственным значением оператора A из уравнения (1), т.е. $Af_0 = \lambda_0 f_0$ с собственным вектором $f_0 \in D(A)$, $f_0 \neq 0$. Тогда пара

$$u(t) = y(t, \lambda_0) f_0 = \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda_0}t) - 1}{\lambda_0} f_0, \quad g = f_0 \tag{19}$$

удовлетворяет всем соотношениям (1), (6), образуя нетривиальное решение этой задачи. Такие решения (если они есть) будем называть *элементарными решениями* однородной обратной задачи (1), (6). Зафиксируем точное утверждение.

Лемма 1. *Пусть некоторый нуль* λ_0 *характеристической функции (17) является собственным значением оператора* A *с собственным вектором* $f_0 \in D(A)$, $f_0 \neq 0$. *Тогда однородная обратная задача (1), (6) имеет нетривиальное элементарное решение вида (19). Точнее, подобных решений будет бесконечно много, так как собственный вектор* f_0 *можно умножать на любую ненулевую константу.*

Лемма проверяется непосредственно. Понятно, что в её условиях единственность решения обратной задачи будет нарушаться, поскольку в однородной версии (1), (6) появятся нетривиальные решения вида (19). Эти решения оказываются даже классическими, так как для них требования (5) очевидно выполнены и уравнение (1) действует на всём отрезке $[0, T]$.

Итак, для единственности решения в обратной задаче *необходимо*, чтобы ни один нуль характеристической функции $L(\lambda)$ из формулы (17) не совпадал с собственным значением оператора A. Наработанный прежде опыт (см. [4, 5]) подсказывает, что такое условие может быть ещё и *достаточным*, и результат – критерий единственности решения – не исключён в максимальной общности. Покажем, что эта надежда вполне обоснована.

3. Формулировка главного результата. Рассматриваем задачу (1)–(3) в исходных предположениях из п. 1. Главный результат работы состоит в следующем.

Теорема 1. *Пусть* A *– линейный замкнутый оператор в* E. *Предположим, что при некоторых* $u_0, u_1, u_2 \in E$ *обратная задача (1)–(3) имеет ослабленное решение* $(u(t), g)$. *Для того чтобы это решение было единственным необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль характеристической функции (17) не являлся собственным значением оператора* A.

При выборе $u_0 = u_1 = u_2 = 0$ теорема 1 приобретает следующий специальный вид.

Теорема 2. *Пусть* A *– линейный замкнутый оператор в* E. *Для того чтобы однородная обратная задача (1), (6) имела только тривиальное решение (7) и не имела других ослабленных решений необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль характеристической функции (17) не являлся собственным значением оператора* A.

Ввиду очевидной линейности изучаемой обратной задачи теоремы 1 и 2 эквивалентны, и можно ограничиться доказательством только теоремы 2. При этом *необходимость* в ней получается ссылкой на лемму 1 и элементарные решения вида (19). Итак, зафиксируем логику: нужный критерий будет установлен, если обосновать *достаточность* условия из теоремы 2 для единственности решения однородной обратной задачи (1), (6).

Последующее довольно объёмное доказательство существенно использует соображения из теории целых функций. Чтобы не прерывать изложение, удобно сразу обсудить несколько технических фактов, связанных с функциями $L_1(\lambda)$, $L_2(\lambda)$ из формулы (16) и с образованной из них характеристической функцией $L(\lambda)$ вида (17).

4. Элементарные целые функции и их поведение на мнимой оси. Рассматриваем целые функции $L_1(\lambda)$, $L_2(\lambda)$ из формулы (16). Нам нужно охарактеризовать их поведение на мнимой оси. Заметим, что обе эти функции являются *вещественными* в том смысле, что их тейлоровские разложения по переменной λ содержат только вещественные коэффициенты (см. формулы (14), (15), взятые при $t = T > 0$). Поэтому для каждой из функций значения в комплексно сопряжённых точках плоскости будут комплексно сопряжены. Как следствие имеем $|L_1(+i\tau)| = |L_1(-i\tau)|$ и $|L_2(+i\tau)| = |L_2(-i\tau)|$ в симметричных точках $\pm i\tau$ на мнимой оси. Здесь и всюду далее обозначаем через i мнимую единицу.

Введём характеристики

$$V_1(\tau) \equiv |L_1(i\tau)|, \quad V_2(\tau) \equiv |L_2(i\tau)|, \tag{20}$$

зависящие от переменной $\tau \in \mathbb{R}$ или, точнее, от $|\tau| \geqslant 0$.

Прямой подсчёт показывает, что

$$V_1(\tau) \equiv \left|\frac{\operatorname{ch}(\sqrt{i\tau}T) - 1}{i\tau}\right| = \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{|\tau|/2}T) - \cos(\sqrt{|\tau|/2}T)}{|\tau|}, \tag{21}$$

$$V_2(\tau) \equiv \left|\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{i\tau}T)}{\sqrt{i\tau}}\right| = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2(\sqrt{|\tau|/2}T) - \cos^2(\sqrt{|\tau|/2}T)}{|\tau|}}. \tag{22}$$

Затем, использовав формулы $\operatorname{ch}^2 a = (1 + \operatorname{ch} 2a)/2$ и $\cos^2 a = (1 + \cos 2a)/2$, заметим связь

$$V_2(\tau) = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}(\sqrt{2|\tau|}T) - \cos(\sqrt{2|\tau|}T)}{2|\tau|}} = \sqrt{2V_1(4\tau)}. \tag{23}$$

Отметим также степенное разложение

$$V_1(\tau) = \frac{T^2}{2!} + \frac{\tau^2}{2^2}\frac{T^6}{6!} + \frac{\tau^4}{2^4}\frac{T^{10}}{10!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^{2n}}{2^{2n}}\frac{T^{4n+2}}{(4n+2)!}, \quad \tau^{2n} = |\tau|^{2n}, \tag{24}$$

элементарно получаемое из (21). Перечисленные соотношения дают такой результат.

Лемма 2. *Пусть функции $L_1(\lambda)$, $L_2(\lambda)$ определены по формулам (16). Тогда их характеристики $V_1(\tau)$, $V_2(\tau)$ вида (20) являются строго положительными при $\tau \in \mathbb{R}$ и строго возрастающими при возрастании $|\tau| \geqslant 0$. При $|\tau| \to \infty$ верны асимптотики*

$$V_1(\tau) \sim \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{|\tau|/2}T)}{|\tau|}, \quad V_2(\tau) \sim \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{|\tau|/2}T)}{|\tau|^{1/2}}, \tag{25}$$

откуда $V_1(\tau) = o(V_2(\tau))$ при $|\tau| \to \infty$.

Доказательство. То, что функция $V_1(\tau)$ строго положительна при $\tau \in \mathbb{R}$ и строго возрастает при возрастании $|\tau|$, очевидно следует из формулы (24). Затем, глядя на формулу (23), делаем аналогичные выводы относительно $V_2(\tau)$. И, наконец, асимптотики (25), действующие при $|\tau| \to \infty$ вместе с соотношением $V_1(\tau) = o(V_2(\tau))$, без труда выводятся из явных представлений (21), (22). Лемма доказана.

Обратимся теперь к характеристической функции $L(\lambda) = \alpha L_1(\lambda) + \beta L_2(\lambda)$, построенной по правилу (17) с фиксированными значениями $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. По аналогии с (20) введём величину

$$V(\tau) \equiv |L(i\tau)| = |\alpha L_1(i\tau) + \beta L_2(i\tau)|, \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{26}$$

Так как коэффициенты α, β могут быть невещественными, то утверждать, что функция $V(\tau)$ зависит лишь от $|\tau|$ здесь уже, конечно, нельзя. Кроме того, неотрицательная функция $V(\tau)$ уже не обязательно строго положительна при $\tau \in \mathbb{R}$ (ибо какие-то нули функции $L(\lambda)$ могут оказаться на мнимой оси). Но поведение $V(\tau)$ при $|\tau| \to \infty$ легко охарактеризовать.

Действительно, имеем оценку сверху

$$V(\tau) = |\alpha L_1(i\tau) + \beta L_2(i\tau)| \leqslant |\alpha||L_1(i\tau)| + |\beta||L_2(i\tau)| = |\alpha|V_1(\tau) + |\beta|V_2(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R},$$

и соответствующую оценку снизу

$$V(\tau) = |\alpha L_1(i\tau) + \beta L_2(i\tau)| \geqslant |\beta||L_2(i\tau)| - |\alpha||L_1(i\tau)| = |\beta|V_2(\tau) - |\alpha|V_1(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Отсюда получаем, что

$$1 - \frac{|\alpha|V_1(\tau)}{|\beta|V_2(\tau)} \leqslant \frac{V(\tau)}{|\beta|V_2(\tau)} \leqslant 1 + \frac{|\alpha|V_1(\tau)}{|\beta|V_2(\tau)}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \tag{27}$$

где $V_1(\tau) = o(V_2(\tau))$ при $|\tau| \to \infty$ согласно лемме 2. Поэтому, переходя к пределу в (27) и используя вторую асимптотику (25), замечаем, что

$$V(\tau) \equiv |L(i\tau)| = |\alpha L_1(i\tau) + \beta L_2(i\tau)| \sim |\beta|V_2(\tau) = |\beta||L_2(i\tau)| \sim |\beta|\frac{\operatorname{ch}(\sqrt{|\tau|/2}T)}{|\tau|^{1/2}} \tag{28}$$

при $|\tau| \to \infty$. Зафиксируем нужный результат в следующей форме.

Лемма 3. *Пусть функции $L_1(\lambda)$, $L_2(\lambda)$ определены по формуле (16) и неотрицательная величина $V(\tau)$ определена по формуле (26) с фиксированными значениями $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда $V(\tau)$ строго положительна при достаточно больших $|\tau| > 0$, и верно соотношение*

$$\lim_{|\tau|\to\infty} \frac{|\alpha|V_1(\tau) + |\beta|V_2(\tau)}{V(\tau)} = \lim_{|\tau|\to\infty} \frac{|\alpha||L_1(i\tau)| + |\beta||L_2(i\tau)|}{|\alpha L_1(i\tau) + \beta L_2(i\tau)|} = 1. \tag{29}$$

Доказательство. Строгая положительность $V(\tau)$ при достаточно больших $|\tau| > 0$ следует из асимптотики (28). Для вычисления предела (29) достаточно заметить, что числитель и знаменатель фигурирующей там дроби образуют величины, эквивалентные при $|\tau| \to \infty$ (см. асимптотические формулы (25) и (28)). Лемма доказана.

Соотношение (29) играет важную роль в дальнейшем. Вернёмся теперь к обратной задаче.

5. Начало доказательства главного результата: операторное тождество. Критерий единственности решения доказываем в форме теоремы 2. Напомним, что в силу леммы 1 осталось установить *достаточность* условия из этого критерия.

Итак, предположим, что ни один нуль характеристической функции (17) не является собственным значением оператора A. Возьмём произвольное ослабленное решение $(u(t), g)$ однородной обратной задачи (1), (6) и покажем, что $u(t) \equiv 0$ на $[0, T]$ и $g = 0$, т.е. что решение может быть только тривиальным.

Для реализации нашего плана потребуется ряд вспомогательных функций. Их построение должно быть согласовано с изучаемой задачей (1), (6). Это означает, что функции должны зависеть от выбора значений $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Поскольку в конкретной ситуации такие значения можно считать фиксированными, мы не указываем на α и β в используемых далее обозначениях. Другими словами, вместо $Y(t, \lambda; \alpha, \beta)$ или $Z(t, \lambda; \alpha, \beta)$ пишем просто $Y(t, \lambda)$, $Z(t, \lambda)$ и т.п. Аналогично всюду в доказательстве считаем фиксированным значение $T > 0$.

Начнём с того, что, комбинируя выражения (11) и (12), составим функцию

$$Y(t, \lambda) = \alpha\,\frac{\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}t) - 1}{\lambda} + \beta\,\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}} \tag{30}$$

с аргументами $t \in [0, T]$ и $\lambda \in \mathbb{C}$. Отметим, что

$$Y(0, \lambda) \equiv 0, \quad Y(T, \lambda) = L(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{31}$$

Первое соотношение в (31) очевидно следует из определения (30); второе получается сравнением с формулами (16), (17), задающими характеристическую функцию $L(\lambda)$.

Центральную роль в этом разделе играет даже не сама функция $Y(t, \lambda)$, а её производная по переменной t. Введём обозначение

$$Z(t, \lambda) \equiv Y'_t(t, \lambda) = \alpha\,\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}t)}{\sqrt{\lambda}} + \beta\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}t). \tag{32}$$

Продифференцировав дальше, получим

$$Z_t'(t,\lambda) = \alpha\,\mathrm{ch}\,(\sqrt{\lambda}t) + \beta\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sh}\,(\sqrt{\lambda}t), \tag{33}$$

$$Z_{tt}''(t,\lambda) = \alpha\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sh}\,(\sqrt{\lambda}t) + \beta\lambda\,\mathrm{ch}\,(\sqrt{\lambda}t) = \lambda Z(t,\lambda). \tag{34}$$

Выделим значения

$$Z(0,\lambda) = \beta, \quad Z_t'(0,\lambda) = \alpha, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{35}$$

Отметим также то, что все функции $Y(t,\lambda)$, $Z(t,\lambda)$, $Z_t'(t,\lambda)$, $Z_{tt}''(t,\lambda)$ являются целыми по переменным t и λ, разложимыми в степенные ряды наподобие (14), (15).

Теперь, сочетая функцию $Z(t,\lambda)$ из формулы (32) и функцию $u(t)$ – первый компонент выбранного решения $(u(t),g)$, определим векторную целую функцию

$$f(\lambda) = \int\limits_0^T Z(t,\lambda)u(T-t)\,dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{36}$$

Поскольку поведение $u(t)$ вблизи границ отрезка $[0,T]$ может в определённом смысле "портиться" (см. условия (4)), возьмём малое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим аппроксимацию

$$f_\varepsilon(\lambda) = \int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} Z(t,\lambda)u(T-t)\,dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{37}$$

Тогда

$$f_\varepsilon(\lambda) = \int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} Z(t,\lambda)u(T-t)\,dt \to \int\limits_0^T Z(t,\lambda)u(T-t)\,dt = f(\lambda) \tag{38}$$

при $\varepsilon \to 0+0$ для любого фиксированного $\lambda \in \mathbb{C}$. В предельном переходе (38) используется то, что $u \in C([0,T],E)$ по определению ослабленного решения (4).

Напомним также, что $u(t) \in D(A)$ при $0 < t < T$ и $Au \in C((0,T),E)$ с линейным замкнутым оператором A. Поэтому, согласно известным свойствам векторного интеграла Римана, получаем, что $f_\varepsilon(\lambda) \in D(A)$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$, и вычисление $Af_\varepsilon(\lambda)$ можно проводить внесением оператора A под знак интеграла в (37) (см. [21, теорема 3.3.2]).

С учётом уравнения (1) имеем

$$Af_\varepsilon(\lambda) = \int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} Z(t,\lambda)Au(T-t)\,dt = \int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} Z(t,\lambda)u''(T-t)\,dt - g\int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} Z(t,\lambda)\,dt. \tag{39}$$

Последний "скалярный" интеграл в (39) допускает предельный переход

$$\int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} Z(t,\lambda)\,dt = \int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} Y_t'(t,\lambda)\,dt = Y(T-\varepsilon,\lambda) - Y(\varepsilon,\lambda) \to L(\lambda) \tag{40}$$

при $\varepsilon \to 0+0$ для любого фиксированного $\lambda \in \mathbb{C}$. В выкладке (40) использована связь (32) с соотношениями (31).

Предшествующий "нескалярный" интеграл в (39) обрабатывается чуть сложнее. Проинтегрируем два раза по частям

$$\int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} Z(t,\lambda)u''(T-t)\,dt = (Z(t,\lambda)u'(T-t) + Z_t'(t,\lambda)u(T-t))\Big|_{T-\varepsilon}^{\varepsilon} + \int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} Z_{tt}''(t,\lambda)u(T-t)\,dt.$$

При $\varepsilon \to 0+0$ внеинтегральное слагаемое обращается в нуль. Действительно, с учётом действующих условий (6) и (35), а также того, что $u \in C^1([0,T],E)$, имеем

$$Z(\varepsilon,\lambda)u'(T-\varepsilon)+Z'_t(\varepsilon,\lambda)u(T-\varepsilon)-Z(T-\varepsilon,\lambda)u'(\varepsilon)-Z'_t(T-\varepsilon,\lambda)u(\varepsilon)\to\beta u'(T)+\alpha u(T)-0-0=0.$$

Затем, принимая во внимание связь $Z''_{tt}(t,\lambda)=\lambda Z(t,\lambda)$ (см. (34)), замечаем, что

$$\int\limits_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} Z''_{tt}(t,\lambda)u(T-t)\,dt=\lambda\int\limits_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} Z(t,\lambda)u(T-t)\,dt=\lambda f_\varepsilon(\lambda)\to\lambda f(\lambda)=\lambda\int\limits_0^T Z(t,\lambda)u(T-t)\,dt$$

при $\varepsilon \to 0+0$ для любого фиксированного $\lambda \in \mathbb{C}$ (здесь $f(\lambda)$, $f_\varepsilon(\lambda)$ – векторные целые функции из формул (36), (37) соответственно). В результате имеем соотношение

$$\int\limits_{\varepsilon}^{T-\varepsilon} Z(t,\lambda)u''(T-t)\,dt\to 0+\lambda\int\limits_0^T Z(t,\lambda)u(T-t)\,dt=\lambda f(\lambda) \tag{41}$$

при $\varepsilon \to 0+0$ для любого фиксированного $\lambda \in \mathbb{C}$.

Теперь можем положить $\varepsilon \to 0+0$ в формуле (39). Учитывая замкнутость оператора A, а также соотношения (38), (40), (41), выводим из (39), что $f(\lambda)\in D(A)$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ и

$$Af(\lambda)=\lambda f(\lambda)-L(\lambda)g,\quad \lambda\in\mathbb{C}. \tag{42}$$

Это *основное операторное тождество* для функции $f(\lambda)$ из формулы (36). Напомним, что векторная целая функция $f(\lambda)$ определяется первым компонентом $u(t)$ решения $(u(t),g)$ однородной обратной задачи (1), (6). Второй компонент $g\in E$, умноженный на характеристическую функцию $L(\lambda)$ из формулы (17), входит в правую часть (42).

Равенство (42) можно дифференцировать по λ, внося производные под знак линейного замкнутого оператора A. Последовательное дифференцирование приводит к тождествам

$$Af^{(m)}(\lambda)=\lambda f^{(m)}(\lambda)+mf^{(m-1)}(\lambda)-L^{(m)}(\lambda)g,\quad \lambda\in\mathbb{C}, \tag{43}$$

верным при всех $m\in\mathbb{N}$. При $m=0$ формула (43) вновь обращается в тождество (42).

Воспользуемся теперь нашим базовым предположением о том, что ни один нуль характеристической функции $L(\lambda)$ не является собственным значением оператора A.

Допустим, например, что $L(\lambda_0)=0$ в точке $\lambda_0\in\mathbb{C}$. Тогда подстановка $\lambda=\lambda_0$ в тождество (42) даёт результат $Af(\lambda_0)=\lambda_0 f(\lambda_0)$. Отсюда, в силу упомянутого базового предположения, выводим, что $f(\lambda_0)=0$. Это означает, что в действующих условиях всякий нуль характеристической функции $L(\lambda)$ из формулы (17) будет нулём векторной целой функции $f(\lambda)$, определённой по формуле (36). Более того, если $\lambda=\lambda_0$ – нуль кратности $k\geqslant 2$ для $L(\lambda)$, то $L^{(m)}(\lambda_0)=0$ при $m=0,\ldots,k-1$, и последовательное применение формулы (43) показывает, что $f^{(m)}(\lambda_0)=0$ при $m=0,\ldots,k-1$.

Зафиксируем установленный факт: при сделанном предположении всякий нуль характеристической функции $L(\lambda)$ из формулы (17) является нулём не меньшей кратности[*)] для векторной целой функции $f(\lambda)$ из формулы (36). Другими словами, отношение

$$\frac{f(\lambda)}{L(\lambda)}=\frac{1}{L(\lambda)}\int\limits_0^T Z(t,\lambda)u(T-t)\,dt \tag{44}$$

определяет векторную целую функцию переменной $\lambda\in\mathbb{C}$.

[*)] Как станет ясно в дальнейшем (см. п. 8 ниже), обычно все нули функции $L(\lambda)$ являются простыми, и лишь при некоторых специальных сочетаниях параметров $\alpha,\beta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ и $T>0$ характеристическая функция (17) имеет также один нуль кратности два. Иначе говоря, хотя кратных нулей у $L(\lambda)$ почти никогда не бывает, их потенциальную возможность всё же приходится учитывать.

Выведем отсюда, что $u(t) \equiv 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$. Неформальную идею последующих рассуждений дал нам пример 200 из известного задачника [22; отд. 4, гл. 3, § 5]. Этот пример был разобран в [22] со ссылкой на Карлемана. Для применения идеи в нашей ситуации схему Карлемана пришлось видоизменить.

6. Продолжение доказательства: принцип Фрагмена–Линделёфа. Поскольку предстоит активная работа с целыми функциями, удобно перейти полностью к скалярному случаю. Возьмём линейный непрерывный функционал f^* из сопряжённого банахова пространства E^* и подействуем им на векторные компоненты в (44).

Обозначим $F(\lambda) \equiv f^*(f(\lambda))$ при $\lambda \in \mathbb{C}$ и $\psi(t) \equiv f^*(u(t))$ при $0 \leqslant t \leqslant T$. Тогда, согласно формуле (36), имеем

$$F(\lambda) = \int\limits_0^T Z(t,\lambda)\psi(T-t)\,dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{45}$$

При взятии функционала f^* нули функции $f(\lambda)$ не исчезают, а их кратности не уменьшаются. Отсюда заключаем, что отношение

$$Q(\lambda) \equiv \frac{F(\lambda)}{L(\lambda)} = \frac{f^*(f(\lambda))}{L(\lambda)} \tag{46}$$

определяет целую функцию переменной $\lambda \in \mathbb{C}$ (ср. (46) с прежним отношением (44)). Для нужных оценок дроби (46) перепишем её числитель $F(\lambda)$ в виде, отличном от (45).

Вспомним сначала, что $Z(t,\lambda) = Y_t'(t,\lambda)$, где $Y(0,\lambda) \equiv 0$ (см. формулу (32), а затем (31)). Для функции $\psi(t) \equiv f^*(u(t))$ отметим соотношения

$$\psi \in C^1[0,T], \quad \psi(0) = 0, \tag{47}$$

выполненные согласно (4) и (6). (Из (6) также следует, что $\psi'(0) = 0$ и $\alpha\psi(T) + \beta\psi'(T) = 0$, но эти равенства уже не понадобятся.) Применив сказанное к интегралу (45), получаем, что

$$F(\lambda) = \int\limits_0^T Y_t'(t,\lambda)\psi(T-t)\,dt = \int\limits_0^T Y(t,\lambda)\psi'(T-t)\,dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{48}$$

где $Y(T,\lambda)\psi(0) - Y(0,\lambda)\psi(T) \equiv 0$ из-за значений $\psi(0) = 0$ и $Y(0,\lambda) \equiv 0$.

Теперь преобразуем запись функции $Y(t,\lambda)$. Исходя из определения (30), имеем

$$Y(t,\lambda) = \alpha\left(\frac{t}{T}\right)^2 \frac{\operatorname{ch}(\sqrt{(t/T)^2\lambda}\,T) - 1}{(t/T)^2\lambda} + \beta\left(\frac{t}{T}\right)\frac{\operatorname{sh}(\sqrt{(t/T)^2\lambda}\,T)}{\sqrt{(t/T)^2\lambda}}.$$

Последующее сравнение с элементарными функциями (16) даёт выражение

$$Y(t,\lambda) = \alpha(t/T)^2 L_1((t/T)^2\lambda) + \beta(t/T)L_2((t/T)^2\lambda), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{49}$$

Подставим (49) в интеграл (48) и сделаем там замену $s = t/T$. Получим представление

$$F(\lambda) = \int\limits_0^1 (\alpha s^2 L_1(\lambda s^2) + \beta s L_2(\lambda s^2))\eta'(1-s)\,ds, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{50}$$

где $\eta(s) \equiv \psi(Ts)$, $\eta'(s) = T\psi'(Ts)$ и $\eta'(1-s) = T\psi'(T-Ts)$ при $0 \leqslant s \leqslant 1$. Из (47) следует, что

$$\eta \in C^1[0,1], \quad \eta(0) = 0. \tag{51}$$

Представление (50) с функцией $\eta(s)$ типа (51) используем при анализе отношения (46), составленного из функций $F(\lambda)$ и $L(\lambda) = \alpha L_1(\lambda) + \beta L_2(\lambda)$.

Напомним (см. [19, 20]), что монотонные при $r > 0$ характеристики

$$M(F;r) \equiv \max_{|\lambda|=r} |F(\lambda)|, \quad M(L_1;r) \equiv \max_{|\lambda|=r} |L_1(\lambda)|, \quad M(L_2;r) \equiv \max_{|\lambda|=r} |L_2(\lambda)|$$

отражают рост целых функций $F(\lambda)$, $L_1(\lambda)$, $L_2(\lambda)$ на плоскости $\mathbb{C}$. Основываясь на (50), запишем оценку

$$M(F;r) \leqslant C_\eta(|\alpha| M(L_1;r) + |\beta| M(L_2;r)), \quad r > 0, \tag{52}$$

с константой

$$C_\eta \equiv \int\limits_0^1 |\eta'(s)|\, ds = \mathrm{Var}\,\{\eta(s)\}|_0^1. \tag{53}$$

Элементарные функции (16), т.е. функции $L_1(\lambda)$, $L_2(\lambda)$, имеют порядок $\rho = 1/2$, а их характеристики $M(L_1;r)$, $M(L_2;r)$ при $r \geqslant 1$ оцениваются сверху через $\exp(\sqrt{r}T)$. Подставив данную мажоранту в (52), получим, что и $F(\lambda)$ не может расти быстрее, чем целая функция порядка $\rho = 1/2$. Тот же характер роста имеет целая функция $L(\lambda) = \alpha L_1(\lambda) + \beta L_2(\lambda)$.

Но тогда по теореме о категориях (см. [19; с. 37]) рост целой функции $Q(\lambda)$, задаваемой отношением (46), не может быть выше, чем у функции порядка $\rho = 1/2$. В частности, заведомо можем утверждать, что $Q(\lambda)$ есть целая функция *нулевого экспоненциального типа*, т.е. такая, что $\ln M(Q;r) = o(r)$ при $r \to +\infty$.

Оценим $Q(\lambda) \equiv F(\lambda)/L(\lambda)$ на мнимой оси. Обозначим $\lambda = i\tau$, где $\tau \in \mathbb{R}$, и используем характеристики $V_1(\tau)$, $V_2(\tau)$ из формулы (20). Учитывая их строгую монотоность, действующую при возрастании $|\tau| \geqslant 0$ (см. лемму 2), выводим из (50), что

$$|F(i\tau)| \leqslant C_\eta(|\alpha| V_1(\tau) + |\beta| V_2(\tau)), \quad \tau \in \mathbb{R}, \tag{54}$$

с той же константой C_η вида (53). Согласно лемме 3 величина $V(\tau) \equiv |L(i\tau)|$ строго положительна при достаточно больших $|\tau| > 0$. Поэтому с учётом (54) можем корректно оценить

$$|Q(i\tau)| = \frac{|F(i\tau)|}{|L(i\tau)|} \leqslant C_\eta \frac{|\alpha| V_1(\tau) + |\beta| V_2(\tau)}{V(\tau)} \tag{55}$$

при тех же достаточно больших $|\tau| > 0$. Снова по лемме 3, если $|\tau| \to \infty$, то дробь в правой части (55) стремится к единице. Следовательно, непрерывная величина $|Q(i\tau)|$ является ограниченной при $\tau \in \mathbb{R}$, или, другими словами, целая функция нулевого экспоненциального типа $Q(\lambda)$ оказывается ограниченной на мнимой оси. В силу известного варианта теоремы Фрагмена–Линделёфа (см. [19; с. 71]) такая функция может быть только константой.

Итак, получили, что $Q(\lambda) \equiv C$ в плоскости $\mathbb{C}$. Но тогда $F(\lambda) = CL(\lambda)$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ с некоторой константой $C \in \mathbb{C}$. Используя представление (50), запишем

$$\int\limits_0^1 (\alpha s^2 L_1(\lambda s^2) + \beta s L_2(\lambda s^2))\eta'(1-s)\, ds = C(\alpha L_1(\lambda) + \beta L_2(\lambda)), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{56}$$

Покажем, что тождество (56) с функцией $\eta(s)$, удовлетворяющей требованиям (51), возможно, только если $C = 0$ и $\eta(s) \equiv 0$ при $0 \leqslant s \leqslant 1$.

7. Завершение доказательства: теорема Мюнца. Проанализируем тождество (56), выполненное при всех $\lambda \in \mathbb{C}$ с некоторой константой $C \in \mathbb{C}$. Используя явные формулы (16) (см. также (14) и (15)), разложим в степенные ряды

$$\alpha L_1(\lambda) + \beta L_2(\lambda) = \sum_{n=0}^\infty \left(\alpha \frac{T^{2n+2}}{(2n+2)!} + \beta \frac{T^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\lambda^n = \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{\alpha T}{2n+2} + \beta\right)\frac{T^{2n+1}}{(2n+1)!}\lambda^n,$$

$$\alpha s^2 L_1(\lambda s^2) + \beta s L_2(\lambda s^2) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha\,\frac{s^{2n+2}\,T^{2n+2}}{(2n+2)!} + \beta\,\frac{s^{2n+1}\,T^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\lambda^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha T\frac{s^{2n+2}}{2n+2} + \beta s^{2n+1}\right)\frac{T^{2n+1}}{(2n+1)!}\lambda^n.$$

Подставим эти разложения в (56) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях λ.

С учётом очевидных сокращений на $T^{2n+1}/(2n+1)!$ получим счётный набор соотношений

$$\int\limits_0^1\left(\alpha T\frac{s^{2n+2}}{2n+2} + \beta s^{2n+1}\right)\eta'(1-s)\,ds = C\left(\frac{\alpha T}{2n+2} + \beta\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{57}$$

Модуль интеграла в равенстве (57) мажорируется величиной

$$\left(|\alpha|T\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} + |\beta|\frac{1}{2n+2}\right)\max_{0\leqslant s\leqslant 1}|\eta'(s)|,$$

стремящейся к нулю при $n\to\infty$. Но тогда и сам интеграл стремится к нулю при $n\to\infty$. Тем самым, переходя к пределу в (57), получаем при $n\to\infty$ что $0 = C\beta$. Здесь $\beta\neq 0$ по условию. Поэтому $C = 0$.

Подставив найденное значение C в (57), получим соотношения

$$\int\limits_0^1\left(\alpha T\frac{s^{2n+2}}{2n+2} + \beta s^{2n+1}\right)\eta'(1-s)\,ds = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{58}$$

Заметим, что

$$\int\limits_0^1\frac{s^{2n+2}}{2n+2}\,\eta'(1-s)\,ds = \frac{s^{2n+2}}{2n+2}\,\eta(1-s)\bigg|_1^0 + \int\limits_0^1 s^{2n+1}\eta(1-s)\,ds = \int\limits_0^1 s^{2n+1}\eta(1-s)\,ds$$

с учётом значения $\eta(0) = 0$ (см. (51)). Такое преобразование в (58) даёт результат

$$\int\limits_0^1(\alpha T\eta(1-s) + \beta\eta'(1-s))s^{2n+1}\,ds = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{59}$$

Полученное возможно, только если

$$\alpha T\eta(1-s) + \beta\eta'(1-s) \equiv 0, \quad 0\leqslant s\leqslant 1. \tag{60}$$

Факт (60) выводится из (59) разными способами, но проще сразу воспользоваться теоремой Мюнца, утверждающей в своей слабой редакции*), что если непрерывная функция ортогональна на $[0,1]$ системе степеней $\{s^{a_n}\}_{n=0}^{\infty}$, где $0 < a_0 < a_1 < \ldots < +\infty$ и $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{-1} = +\infty$, то функция тождественно равна нулю на $[0,1]$ (см. номер 198 в [22; с. 44] или [23; с. 304–305]; см. также [24; с. 109] и [25; с. 116, 122–124]).

Итак, установлено соотношение (60). Оно очевидно эквивалентно обыкновенному дифференциальному уравнению $\eta'(s) + (\alpha T/\beta)\eta(s) = 0$ при $0\leqslant s\leqslant 1$, к которому, согласно (51),

*) Более известна сильная версия теоремы Мюнца о плотности линейных комбинаций степеней в пространствах типа $C[0,1]$ или $L^p[0,1]$. Отметим для точности, что в оригинальной работе Мюнца [23] рассматривался лишь классический вариант пространства $C[0,1]$. Но случай L^p оказался идейно близок, и перенесённый туда результат тоже стали называть *теоремой Мюнца* (см., например, [24; гл. 3, § 6]).

надо добавить начальное условие $\eta(0) = 0$. Отсюда следует, что $\eta(s) \equiv 0$ при $0 \leqslant s \leqslant 1$. Вспомнив связь $\eta(s) \equiv \psi(Ts)$ при $0 \leqslant s \leqslant 1$, заключаем, что функция $\psi(t) \equiv f^*(u(t))$ тождественно равна нулю всюду на $[0, T]$. Выбор функционала $f^* \in E^*$ был произвольным, поэтому на основании известного следствия теоремы Хана–Банаха (см. [21; теорема 2.7.4]) можем утверждать, что $u(t) \equiv 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$. Подстановка такой функции в уравнение (1) показывает, что $g = 0$.

Подведём итог: при сделанном предположении (о том, что ни один нуль характеристической функции (17) не является собственным значением оператора A) неизбежно получаем, что решение $(u(t), g)$ однородной обратной задачи (1), (6) может быть только тривиальным. Критерий единственности решения в форме теоремы 2 полностью доказан. Отсюда автоматически следует теорема 1. Обоснование главного результата завершено.

8. Нули характеристической функции: общие сведения. Теперь для применения установленного критерия требуется информация о распределении нулей характеристической функции $L(\lambda) = L(\lambda; T, \alpha, \beta)$ из формулы (17). Уделим этому вопросу особое внимание.

Как и в формуле (18), рассматриваем множество $\Lambda = \Lambda(T, \alpha, \beta) \equiv \{\lambda \in \mathbb{C}\colon L(\lambda) = 0\}$. Опишем его состав в зависимости от выбора параметров $T > 0$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Специально подчеркнём, что соглашение $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ действует далее без оговорок – при обращении в нуль одного из коэффициентов ситуация сразу упрощается и конкретный вид множества Λ находится элементарным образом.

Действительно, если взять $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ (как для финального переопределения первого рода), то $L(\lambda) = \alpha L_1(\lambda)$ с функцией $L_1(\lambda) = L_1(\lambda; T)$ из формулы (16) и

$$\Lambda(T, \alpha, 0) = \Lambda(T, 1, 0) \equiv \{\lambda \in \mathbb{C}\colon L_1(\lambda) = 0\} = \{-4k^2\pi^2/T^2\}_{k\in\mathbb{N}}, \tag{61}$$

причём все нули в множестве (61) имеют кратность два (см. также [4]). В свою очередь если взять $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ (как для финального переопределения второго рода), то $L(\lambda) = \beta L_2(\lambda)$ с функцией $L_2(\lambda) = L_2(\lambda; T)$ из формулы (16) и

$$\Lambda(T, 0, \beta) = \Lambda(T, 0, 1) \equiv \{\lambda \in \mathbb{C}\colon L_2(\lambda) = 0\} = \{-m^2\pi^2/T^2\}_{m\in\mathbb{N}}, \tag{62}$$

причём все нули в множестве (62) являются простыми (см. также [5]). Любопытная особенность – присутствие в обоих множествах (61) и (62) общей серии нулей $(-4k^2\pi^2/T^2)$, взятых при $k \in \mathbb{N}$, сохранится и при рассмотрении финального переопределения третьего рода со значениями $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Сосредоточимся сейчас именно на этом случае.

Используем элементарные формулы $\operatorname{ch} a - 1 = 2\operatorname{sh}^2(a/2)$ и $\operatorname{sh} a = 2\operatorname{sh}(a/2)\operatorname{ch}(a/2)$. С их помощью для функций (16) запишем

$$L_1(\lambda) = (2/\lambda)\operatorname{sh}^2(\sqrt{\lambda}T/2), \quad L_2(\lambda) = (2/\sqrt{\lambda})\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}T/2)\operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}T/2).$$

Отсюда видно, что характеристическая функция (17) допускает альтернативное представление

$$L(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{\lambda}T}{2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{\lambda}T}{2} + \beta\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\lambda}T}{2}\right) = G_1(\lambda)G_2(\lambda), \tag{63}$$

т.е. функция $L(\lambda) = \alpha L_1(\lambda) + \beta L_2(\lambda)$ распадается в произведение двух целых функций

$$G_1(\lambda) = G_1(\lambda; T) \equiv \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{\lambda}T}{2}, \tag{64}$$

$$G_2(\lambda) = G_2(\lambda; T, \alpha, \beta) \equiv \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{\lambda}T}{2} + \beta\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\lambda}T}{2} \tag{65}$$

переменной $\lambda \in \mathbb{C}$. Тем самым множество нулей характеристической функции $L(\lambda)$ оказывается составленным из множества нулей функции (64) и множества нулей функции (65).

Удобно сократить число параметров и ввести стандартизированные функции

$$H_1(\zeta) \equiv \frac{2}{\sqrt{\zeta}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{\zeta}}{2}, \tag{66}$$

$$H_2(\zeta) = H_2(\zeta; p) \equiv \frac{2}{\sqrt{\zeta}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{\zeta}}{2} + p \operatorname{ch} \frac{\sqrt{\zeta}}{2} \tag{67}$$

переменной $\zeta \in \mathbb{C}$. В записи (67) остался единственный параметр $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Очевидно, что

$$G_1(\lambda; T) = T H_1(\lambda T^2), \quad G_2(\lambda; T, \alpha, \beta) = (\alpha T/2) H_2(\lambda T^2; 2\beta/(\alpha T)). \tag{68}$$

Поэтому характеристическая функция (17) представима в виде

$$L(\lambda) = L(\lambda; T, \alpha, \beta) = c H_1(\lambda T^2) H_2(\lambda T^2; p), \tag{69}$$

где

$$c = \alpha T^2/2, \quad p = 2\beta/(\alpha T). \tag{70}$$

Условия (70) обеспечивают эквивалентность представлений (63) и (69) для $L(\lambda)$.

Формулы перехода (68) показывают, что нули функций $G_1(\lambda)$, $G_2(\lambda)$ связаны с нулями соответствующих функций $H_1(\zeta)$, $H_2(\zeta)$ преобразованием подобия $\lambda = \zeta/T^2$, сохраняющим не только все геометрические соотношения нулей, но и их кратности.

Завершим этот первичный разбор ситуации следующим базовым утверждением.

Теорема 3. *Множество нулей характеристической функции $L(\lambda)$ вида (17) или, что эквивалентно, вида (63) состоит из двух счётных серий. Первая универсальная серия нулей*

$$\lambda_k^{(1)} = -4k^2\pi^2/T^2, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{71}$$

отвечает множителю (64) и не зависит от выбора значений $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Вторая серия нулей отвечает множителю (65) и может быть записана в виде

$$\lambda_k^{(2)} = \zeta_k/T^2, \quad k \in J, \tag{72}$$

где $\zeta_k = \zeta_k(p)$ – нули элементарной целой функции (67) с параметром $p = 2\beta/(\alpha T)$. Нумерация $k \in J = J(p) \subset \mathbb{Z}$ в (72) может зависеть от значения $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Множества (71) и (72) не пересекаются, т.е. ни один нуль функции (64) не является нулём функции (65).

Доказательство. Все корни уравнения $\operatorname{sh}(a/2) = 0$ на плоскости $\mathbb{C}$ выражаются формулой $a_k = 2k\pi i$, где $k \in \mathbb{Z}$. При этом $\operatorname{ch}(a_k/2) = \cos k\pi \neq 0$. Отсюда, во-первых, следует, что все нули функции (64) имеют вид (71) с указанной там нумерацией $k \in \mathbb{N}$, а, во-вторых, что ни один такой нуль $\lambda_k^{(1)}$ не может быть нулём функции (65).

В то же время функция $G_2(\lambda) = G_2(\lambda; T, \alpha, \beta)$ вида (65) как целая функция нецелого порядка $\rho = 1/2$ имеет бесконечное (счётное) множество нулей. Эти нули, учитывая вторую связь в (68), можно формально записать в виде (72) через нули стандартизированной функции (67). Вопрос о наиболее удобной нумерации $k \in J$ в множестве таких нулей должен уточняться отдельно. Теорема доказана.

Как видим, наличие общего множителя $(2/\sqrt{\lambda}) \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda} T/2)$ приводит к тому, что серия нулей (71) оказывается общей для всех трёх функций $L_1(\lambda)$, $L_2(\lambda)$ и $L(\lambda) = \alpha L_1(\lambda) + \beta L_2(\lambda)$. Тем самым (см. теорему 1) отсутствие среди чисел (71) собственных значений оператора A есть *необходимое условие* единственности решения изучаемой обратной задачи (1)–(3) с фиксированным $T > 0$ при любом выборе параметров $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (см. также работы [4] и [5] про случаи $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ и $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ соответственно). Эта особенность изучаемой обратной задачи представляется весьма оригинальной.

Обсудим теперь вопрос о кратности нулей характеристической функции $L(\lambda)$. Используем представление $L(\lambda) = G_1(\lambda) G_2(\lambda)$ с функциями (64), (65). Поскольку, согласно теореме 3, множества нулей указанных сомножителей не пересекаются, вопрос о кратных нулях достаточно рассмотреть отдельно для $G_1(\lambda)$ и $G_2(\lambda)$, точнее даже, для их регуляризированных аналогов – функций $H_1(\zeta)$ и $H_2(\zeta)$ из формул (66) и (67) соответственно.

Вопрос об отсутствии кратных нулей у функции $H_1(\zeta)$ решается просто. Имеем

$$H_1(\zeta) \equiv \frac{2}{\sqrt{\zeta}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{\zeta}}{2}, \quad H_1'(\zeta) \equiv \frac{1}{2\zeta}\left(\operatorname{ch} \frac{\sqrt{\zeta}}{2} - \frac{2}{\sqrt{\zeta}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{\zeta}}{2}\right).$$

Как уже отмечалось при доказательстве теоремы 3, величины $\operatorname{sh}(a/2)$ и $\operatorname{ch}(a/2)$ никогда одновременно не обращаются в нуль. Отсюда следует, что соотношение $H_1(\zeta) = H_1'(\zeta) = 0$ невозможно ни в какой точке $\zeta \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим теперь функцию $H_2(\zeta) = H_2(\zeta; p)$ с параметром $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Картина с её кратными нулями оказывается довольно неожиданной. В решении поставленной задачи важную роль играют комплексно сопряжённые корни уравнения

$$\operatorname{sh} z = z, \tag{73}$$

расположенные в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$. Множество таких корней запишем в виде

$$z = z_n, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad z_{-n} = \overline{z}_n. \tag{74}$$

Считаем, что основная серия корней $z = z_n$ при $n \in \mathbb{N}$ расположена в первом координатном угле $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$ и занумерована в порядке возрастания модулей.

Следующий результат получен авторами совместно с В.Б. Шерстюковым.

Теорема 4. *Рассматриваем функцию $H_2(\zeta; p)$ вида (67) с параметром $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Определим счётное множество значений*

$$p_n = -\frac{2}{1 + \operatorname{ch} z_n}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad p_{-n} = \overline{p}_n, \tag{75}$$

где z_n – корни (74) трансцендентного уравнения (73), попадающие в полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$. Тогда справедливы утверждения:

1. При каждом $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, не входящем в множество (75), функция $H_2(\zeta; p)$ имеет только простые нули.

2. При $p = p_n$ из множества (75) функция $H_2(\zeta; p_n)$ помимо бесконечного числа простых нулей имеет ровно один кратный нуль кратности два, который находится по формуле

$$\zeta = z_n^2 \tag{76}$$

с тем же z_n из множества (74), что и при выборе параметра $p_n = -2/(1 + \operatorname{ch} z_n)$.

Добавим ещё, что при $n \in \mathbb{N}$ значения p_n из формулы (75) попадают в область

$$-2 < \operatorname{Re} p < 0, \quad 0 < \operatorname{Im} p < 1, \tag{77}$$

причём $p_n \to 0$ при $n \to \infty$. Как следствие, при всех номерах $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ значения p_n не могут быть вещественными.

Подробное доказательство теоремы 4 и обсуждение сопутствующих обстоятельств будет дано отдельно (см. также [26, 27]). Сейчас отметим лишь, что все величины из теоремы 4 допускают эффективное исследование с выводом необходимых оценок, представляющих интерес как для математической физики, так и для теории функций. В частности, уравнение (73) посредством замены $z = i\xi$ с переменной $\xi \in \mathbb{C}$ приводится к виду

$$\sin \xi = \xi. \tag{78}$$

Последнее встречается в спектральной теории при рассмотрении ряда задач механики сплошной среды (см., например, [28–30]). С аналитической точки зрения уравнение (78) рассматривал ещё Харди [31]. Простой и понятный разбор ситуации, связанной с корнями подобных уравнений, дал Маркушевич [32; с. 64–68]. Основываясь на его изложении, получаем приближённую формулу

$$z_n \approx \ln(4n\pi) + \frac{1}{4n} + i\left(2n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2n\pi}\ln(4n\pi)\right) \tag{79}$$

для основной серии корней “нашего” уравнения (73). Родственный вариант, восходящий к работе Харди [31], имеет вид (см. [29; с. 392])

$$z_n = \ln((4n+1)\pi) + \delta_n + i\left(2n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{2}{(4n+1)\pi}\ln((4n+1)\pi) + \varepsilon_n\right). \tag{80}$$

Отдельно показывается, что приближения (79) и (80) согласованы с нумерацией $n \in \mathbb{N}$ (см. [31]). Высокую точность таких соотношений подтверждают следующие оценки В.Б. Шерстюкова:

$$0 < \delta_n < \frac{2}{(4n+1)^2\pi^2}\ln^2((4n+1)\pi), \quad |\varepsilon_n| < \frac{4}{(4n+1)^3\pi^3}\ln^3((4n+1)\pi),$$

действующие при всех номерах $n \in \mathbb{N}$ для остатков $\delta_n, \varepsilon_n \in \mathbb{R}$ в формуле (80). Используя информацию о корнях уравнения (73), можно весьма точно оценить величины (75), (76) из теоремы 4 и указать для них ряд полезных аналитических соотношений. Здесь применимы также методы компьютерной математики.

Упомянем, к примеру, что область (77), где локализуются значения p_n при $n \in \mathbb{N}$, получена из общих соображений, связанных с действием отображения $p_n = -2/(1 + \operatorname{ch} z_n)$ на корни уравнения (73), расположенные в первом координатном угле. Однако, как показывает численный расчёт, можно, не погрешив против истины, заменить множество (77) гораздо более точным прямоугольником $-0.11 < \operatorname{Re} p < 0$, $0 < \operatorname{Im} p < 0.22$.

Вернёмся к рассмотрению характеристической функции $L(\lambda) = L(\lambda; T, \alpha, \beta)$. Используем представление (69) с параметром $p = 2\beta/(\alpha T)$, заданным согласно (70). Проделанный анализ позволяет утверждать, что в большинстве ситуаций, т.е. в случае общего положения, все нули функции $L(\lambda) = L(\lambda; T, \alpha, \beta)$ являются простыми. Исключение составляют редкие примеры, когда параметры $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $T > 0$ связаны специальным соотношением

$$\alpha T + (1 + \operatorname{ch} z_n)\beta = 0 \tag{81}$$

с некоторым корнем z_n из множества (74) (ср. (81) с формулой (75) из теоремы 4). При таком условии функция $L(\lambda) = L(\lambda; T, \alpha, \beta)$ помимо бесконечного числа простых нулей имеет единственный нуль кратности два, и он находится по формуле $\lambda = z_n^2/T^2$ с тем же значением z_n, что и в (81) (ср. формулу (72) с формулой (76) из теоремы 4).

Согласно теореме 4 значения $1 + \operatorname{ch} z_n = -2/p_n$ не могут быть вещественными. Поэтому соотношение (81) невозможно, если $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Отсюда получаем такое утверждение.

Теорема 5. *При любом выборе параметров $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $T > 0$ все нули характеристической функции $L(\lambda) = L(\lambda; T, \alpha, \beta)$ из формулы (17) являются простыми.*

Выбор вещественных параметров α и β в условии (3) является, безусловно, приоритетным. Сосредоточимся именно на этом случае. Дополним теорему 5 следующим результатом.

Теорема 6. *При любом выборе параметров $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $T > 0$ все нули характеристической функции $L(\lambda) = L(\lambda; T, \alpha, \beta)$ из формулы (17) являются вещественными.*

Доказательство. С учётом основной теоремы 3 достаточно установить, что все нули ζ_k стандартизированной функции (67) при любом выборе параметра $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ являются вещественными. Зафиксируем значение $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и рассмотрим скалярную задачу

$$4y''(\tau) - \zeta y(\tau) = 0, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) + py'(1) = 0 \tag{82}$$

со спектральным параметром $\zeta \in \mathbb{C}$. С точностью до умножения на константу решение дифференциального уравнения из системы (82), удовлетворяющее первому условию $y(0) = 0$, имеет вид $y(\tau) = (2/\sqrt{\zeta})\operatorname{sh}(\sqrt{\zeta}\tau/2)$. После подстановки данной функции во второе краевое условие $y(1) + py'(1) = 0$ приходим к уравнению

$$\frac{2}{\sqrt{\zeta}}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{\zeta}}{2} + p\operatorname{ch}\frac{\sqrt{\zeta}}{2} = 0 \tag{83}$$

относительно неизвестной $\zeta \in \mathbb{C}$. Корни уравнения (83) те же, что нули целой функции (67) – они совпадают со спектральными значениями задачи (82). Но спектр в задаче (82) может быть только вещественным.

Действительно, исходя из (82), введём оператор $B = 4d^2/d\tau^2$ в линейном вещественном пространстве $C[0,1]$ на области определения $D_p \equiv \{y \in C^2[0,1]\colon y(0) = 0,\ \ y(1) + py'(1) = 0\}$. Используем в $C[0,1]$ скалярное произведение

$$(y_1, y_2) = \int\limits_0^1 y_1(\tau)y_2(\tau)\,d\tau, \quad (y, y) \equiv \|y\|^2.$$

Стандартное интегрирование по частям показывает симметричность оператора B в том смысле, что $(By_1, y_2) = (y_1, By_2)$ для любых $y_1, y_2 \in D_p$. Как известно, такой оператор не может иметь комплексных собственных значений $\zeta = \gamma_1 + i\gamma_2$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, $\gamma_2 \neq 0$.

В самом деле, предположим, что $B(y_1 + iy_2) = (\gamma_1 + i\gamma_2)(y_1 + iy_2)$ с некоторыми $y_1, y_2 \in D_p$, т.е. $By_1 = \gamma_1 y_1 - \gamma_2 y_2$ и $By_2 = \gamma_1 y_2 + \gamma_2 y_1$. Тогда вычисление числа $(By_1, y_2) = (y_1, By_2)$ даёт равенство

$$\gamma_1(y_1, y_2) - \gamma_2(y_2, y_2) = \gamma_1(y_1, y_2) + \gamma_2(y_1, y_1) \sim \gamma_2(\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2) = 0.$$

Но если $\gamma_2 \neq 0$, то $y_1(\tau) \equiv 0$ и $y_2(\tau) \equiv 0$ всюду на $[0,1]$.

Итак, ни сам оператор B, ни ассоциированная с ним спектральная задача (82) не могут иметь комплексных (невещественных) собственных значений. Следовательно, корни уравнения (83) и совпадающие с ними нули целой функции (67) будут исключительно вещественными. Возвращаясь к исходной характеристической функции (17) (и учитывая теорему 3), получаем утверждение теоремы 6. Доказательство завершено.

Подытожим: при любом выборе значений $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ все без исключения нули характеристической функции $L(\lambda) = L(\lambda; T, \alpha, \beta)$ являются вещественными и простыми. Для того чтобы завершить описание таких нулей, осталось, согласно теореме 3, в зависимости от параметра $p = 2\beta/(\alpha T) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ указать зоны локализации чисел ζ_k из формулы (72), или, что то же самое, зоны локализации нулей $\zeta_k = \zeta_k(p) \in \mathbb{R}$ стандартизированной функции $H_2(\zeta; p)$ из формулы (67).

9. Подробно про зоны локализации. Разбор начнём в эквивалентных терминах – на языке корней уравнения (83). При этом для лучшего понимания динамики корней в зависимости от параметра p рассмотрим все значения $p \in \mathbb{R}$, включая $p = 0$.

Случай $p = 0$ является особым, так как тогда корни уравнения (83) совпадают с нулями (простыми нулями) функции $H_1(\zeta)$ из формулы (66) и имеют вид $\zeta_k = -4k^2\pi^2$ при $k \in \mathbb{N}$.

Ещё один особый случай связан с возможным корнем $\zeta = 0$. Подстановка такого числа в уравнение (83) даёт соотношение $1 + p \cdot 1 = 0$, откуда очевидно, что $\zeta = 0$ является корнем для (83) тогда и только тогда, когда $p = -1$.

Приступим к изучению случая "общего положения". Поскольку при $p \in \mathbb{R}$ корни уравнения (83) могут быть только вещественными, всюду в данном пункте считаем, что $\zeta \in \mathbb{R}$. Используем замену

$$\zeta = \begin{cases} 4\mu^2, & \mu \geqslant 0, \\ -4\mu^2, & \mu < 0. \end{cases} \tag{84}$$

Формула (84) задаёт биекцию, точнее, сохраняющий порядок изотонный гомеоморфизм между прямой $\mu \in \mathbb{R}$ и прямой $\zeta \in \mathbb{R}$. Уравнение (83) перейдёт в эквивалентную совокупность

$$\left[\begin{array}{ll} (1/\mu)\operatorname{sh}\mu + p\operatorname{ch}\mu = 0, & \mu \geqslant 0, \\ (1/\mu)\sin\mu + p\cos\mu = 0, & \mu < 0. \end{array}\right. \tag{85}$$

Вновь видим, что корень $\mu = 0$, соответствующий прежнему $\zeta = 0$, возникает в (85) лишь при $p = -1$. Временно исключим $\mu = 0$ из рассмотрения. Тогда при $\mu \in (-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)$ совокупность (85) приводится к следующему эквивалентному виду:

$$\left[\begin{array}{ll} p\mu = -\operatorname{th}\mu, & \mu > 0, \\ p\mu = -\operatorname{tg}\mu, & \mu < 0. \end{array}\right. \tag{86}$$

Полученные уравнения проанализируем графически (рисунок).

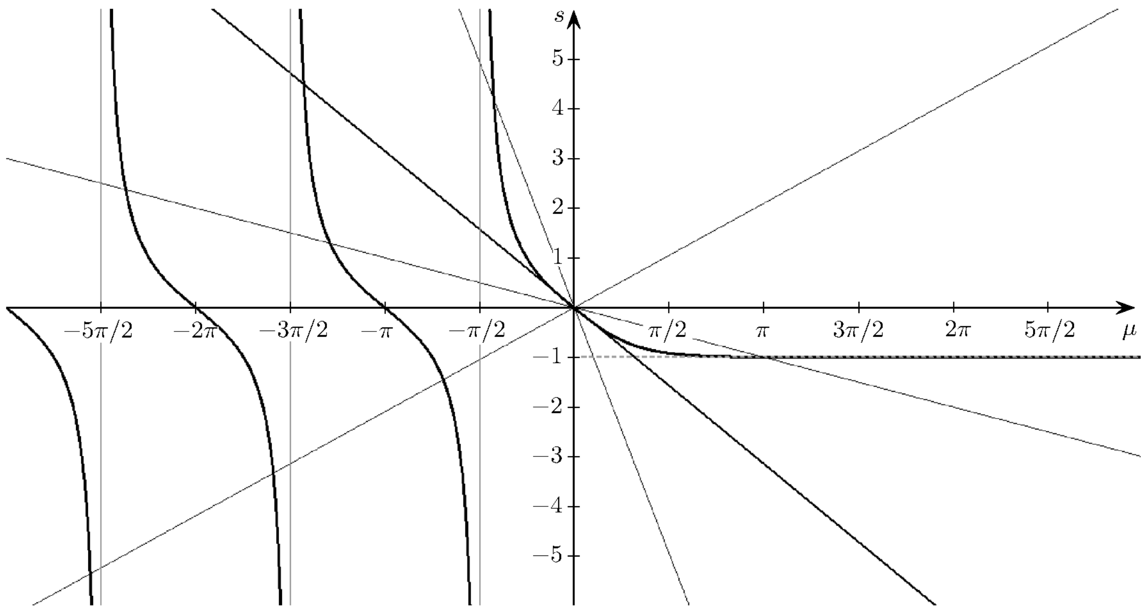

Рисунок. Геометрический анализ совокупности уравнений (86).

Введём вспомогательную функцию $\Phi(\mu)$, составленную из счётного числа ветвей $\varphi_k(\mu)$ следующим образом. Особая нулевая ветвь $\varphi_0(\mu)$ определяется на множестве $(-\pi/2, +\infty)$ по формулам $\varphi_0(\mu) = -\operatorname{tg}\mu$ при $\mu \in (-\pi/2, 0)$ и $\varphi_0(\mu) = -\operatorname{th}\mu$ при $\mu \in [0, +\infty)$. Ясно, что это непрерывная (точнее, непрерывно дифференцируемая), строго убывающая, выпуклая вниз функция на $(-\pi/2, +\infty)$. Затем, при $k \in \mathbb{N}$, положим $\varphi_k(\mu) = -\operatorname{tg}\mu$ на соответствующих промежутках $\mu \in (-(2k+1)\pi/2, -(2k-1)\pi/2)$.

Рассмотрим графики функций $s = \Phi(\mu)$ и $s = p\mu$. Абсциссы их точек пересечения на множестве $\mu \in (-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)$ как раз дадут все корни, возникающие в (86). Для того чтобы вернуться к исходной совокупности (85), добавим корень $\mu = 0$, отвечающий единственному значению параметра $p = -1$. При таком p секущая $s = p\mu$ к нулевой ветви $s = \varphi_0(\mu)$ перейдет в прямую $s = -\mu$, касающуюся этой ветви в точке $\mu = 0$.

В результате получаем счётное множество корней $\mu_k = \mu_k(p)$, непрерывно зависящих от параметра $p \in \mathbb{R}$. Точнее, особый корень $\mu_0 = \mu_0(p)$ определён лишь при $p \in (-\infty, 0)$ – он соответствует ветви $\varphi_0(\mu)$ и непрерывно возрастает с ростом p. Так, при $p \in (-\infty, -1)$ этот корень $\mu_0 = \mu_0(p)$ изменяется в промежутке $(-\pi/2, 0)$ как корень уравнения $p\mu = -\operatorname{tg}\mu$. Затем при $p = -1$ возникает промежуточное значение $\mu_0(0) = 0$. Наконец, при $p \in (-1, 0)$ корень $\mu_0 = \mu_0(p)$ изменяется в промежутке $(0, +\infty)$ уже как корень уравнения $p\mu = -\operatorname{th}\mu$ с асимптотикой

$$\mu_0(p) \sim -1/p, \quad p \to 0 - 0. \tag{87}$$

Асимптотика (87) устанавливается из простых соображений и даёт отличное приближение уже при $p \geqslant -1/\pi$. Действительно, при таких p точка пересечения графиков $s = p\mu$ и $s = -\operatorname{th}\mu$ будет расположена очень близко к асимптоте $s = -1$ графика $s = -\operatorname{th}\mu$. Следовательно, уравнение $p\mu = -\operatorname{th}\mu$ с высокой точностью выражается как $p\mu = -1$.

Остальные “регулярные” корни $\mu_k = \mu_k(p)$ с индексом $k \in \mathbb{N}$ определены при всех $p \in \mathbb{R}$. Точнее, при фиксированном $k \in \mathbb{N}$ каждый такой корень соответствует ветви $\varphi_k(\mu) = -\operatorname{tg}\mu$ и непрерывно возрастает с ростом p в пределах от $-(2k+1)\pi/2$ до $-(2k-1)\pi/2$. В частности, при $p = 0$ получаем элементарные значения $\mu_k(0) = -k\pi$, разделяющие основные нужные нам случаи $\mu_k(p) \in (-(2k+1)\pi/2, -k\pi)$ при $-\infty < p < 0$ и $\mu_k(p) \in (-k\pi, -(2k-1)\pi/2)$ при $0 < p < +\infty$ (см. рисунок).

Таким образом, описание корней для совокупности (85) получено. Теперь, чтобы вернуться к исходному уравнению (83), используем замену (84). Следующий результат есть прямое следствие проведённых выше рассуждений.

Теорема 7. *Пусть $p \in \mathbb{R}$. Тогда все корни уравнения (83) принадлежат $\mathbb{R}$ и при анализе их расположения на прямой надо различать три случая.*

1. Если $p < 0$, то корни уравнения (83) представимы в виде

$$-\infty < \ldots < \zeta_{k+1} < \zeta_k < \ldots < \zeta_1 < \zeta_0. \tag{88}$$

При любом фиксированном $k \in \mathbb{N}$ корень $\zeta_k = \zeta_k(p)$ строго возрастает с ростом $p \in (-\infty, 0)$, непрерывно двигаясь от левой до правой границы в интервале $(-(2k+1)^2\pi^2, -4k^2\pi^2)$. Кроме того, имеется особый корень $\zeta_0 = \zeta_0(p)$, который строго возрастает в интервале $(-\pi^2, +\infty)$, непрерывно двигаясь от левой до правой границы так, что

$$-\pi^2 < \zeta_0(p) < 0 \quad \textit{при} \quad p \in (-\infty, -1), \quad \zeta_0(p) = 0 \quad \textit{при} \quad p = -1, \quad \zeta_0(p) > 0 \quad \textit{при} \quad p \in (-1, 0)$$

с асимптотикой $\zeta_0(p) \sim 4/p^2$ при $p \to 0 - 0$.

2. Если $p = 0$, то корни уравнения (83) принимают вид $\zeta_k = -4k^2\pi^2$ при $k \in \mathbb{N}$.

3. Если $p > 0$, то корни уравнения (83) представимы в виде

$$-\infty < \ldots < \zeta_{k+1} < \zeta_k < \ldots < \zeta_1. \tag{89}$$

При любом фиксированном $k \in \mathbb{N}$ корень $\zeta_k = \zeta_k(p)$ строго возрастает с ростом $p \in (0, +\infty)$, непрерывно двигаясь от левой до правой границы в интервале $(-4k^2\pi^2, -(2k-1)^2\pi^2)$. Как следствие отсюда получаем, что при всех $p > 0$ корни (89) будут отрицательными, строго меньшими числа $(-\pi^2)$.

Для того чтобы завершить картину и получить нули серии (72) для характеристической функции (17) остаётся разделить на T^2 числа (88) при $p < 0$ или числа (89) при $p > 0$ с их описанием, указанным в теореме 7. Нетрудно убедиться при этом, что нули (71) и нули (72) в теореме 3 при фиксированном $p \in (-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)$ обладают следующим свойством перемежаемости: между двумя любыми последовательными нулями серии (72) находится ровно один нуль серии (71). Точнее, при $p < 0$ имеем

$$\lambda_k^{(2)} = \zeta_k/T^2 < \lambda_k^{(1)} = -4k^2\pi^2/T^2 < \lambda_{k-1}^{(2)} = \zeta_{k-1}/T^2, \quad k \in \mathbb{N},$$

а при $p > 0$ имеем

$$\lambda_{k+1}^{(2)} = \zeta_{k+1}/T^2 < \lambda_k^{(1)} = -4k^2\pi^2/T^2 < \lambda_k^{(2)} = \zeta_k/T^2, \quad k \in \mathbb{N},$$

с учётом нумерации, введённой в теореме 7.

Отметим ещё несколько следствий, важных с практической точки зрения. Напомним, что переход от параметра p к изначальным α, β и T происходит по формуле $p = 2\beta/(\alpha T)$ (см. (70)). Утверждая, что нули функции (17) локализуются в каких-то интервалах, мы имеем в виду, что вне этих интервалов нулей нет совсем, но в каждый из интервалов попадает хотя бы один или даже два таких нуля. Слово “интервал” понимаем здесь в расширенном смысле – как любой связный промежуток вещественной оси.

Теорема 8. *Для характеристической функции* $L(\lambda) = L(\lambda; T, \alpha, \beta)$ *из формулы (17) выделим следующие типичные возможности.*

1. При любом выборе параметров $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *и* $T > 0$ *все нули функции (17) являются вещественными и отрицательными, строго меньшими числа* $(-\pi^2/T^2)$. *Точнее, эти нули локализуются в интервалах* $[-4k^2\pi^2/T^2, -(2k-1)^2\pi^2/T^2)$ *при* $k \in \mathbb{N}$.

2. Также отрицательными будут все нули функции (17), если параметры $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *и* $T > 0$ *связаны условием*

$$-\infty < \beta/\alpha < -T/2. \tag{90}$$

Точнее, тогда нули локализуются в интервалах $(-\pi^2/T^2, 0)$ *и* $(-(2k+1)^2\pi^2/T^2, -4k^2\pi^2/T^2]$ *при* $k \in \mathbb{N}$.

3. Далее, если параметры $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *и* $T > 0$ *связаны специальным условием*

$$\beta/\alpha = -T/2 \quad \sim \quad \alpha T + 2\beta = 0, \tag{91}$$

то характеристическая функция (17) имеет простой нуль в точке $\lambda = 0$ *и остальные нули, локализованные в интервалах* $(-(2k+1)^2\pi^2/T^2, -4k^2\pi^2/T^2]$ *при* $k \in \mathbb{N}$.

4. Если, наконец, параметры $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *и* $T > 0$ *связаны условием*

$$-T/2 < \beta/\alpha < 0, \tag{92}$$

то характеристическая функция (17) имеет один простой нуль на луче $(0, +\infty)$ *и остальные нули, локализованные в интервалах* $(-(2k+1)^2\pi^2/T^2, -4k^2\pi^2/T^2]$ *при* $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Перечисленные результаты получаются простым сравнением базовой теоремы 3 и теоремы 7 (с учётом также теорем 5 и 6). Условия (90)–(92) соответствуют случаям $p \in (-\infty, -1)$, $p = -1$, $p \in (-1, 0)$, разобранным в теореме 7 и отнесённым сейчас к параметру $p = 2\beta/(\alpha T)$. Других обоснований не требуется.

Информацию, заложенную в теорему 8, можно уточнять *ad infinitum* путём дополнительного изучения корней трансцендентных уравнений (86). Подобные уравнения известны в анализе, начиная с Эйлера [33; с. 300–301] (см. также [34; с. 170–171]); ряд результатов представлен даже в учебной литературе (см. [35; с. 218, 453]). Полученного, впрочем, достаточно для многих содержательных выводов, связанных с исходной обратной задачей (1)–(3).

10. Признаки единственности и неединственности решения. Для сокращения формулировок рассматриваем обратную задачу (1)–(3) в её однородной версии (1), (6). Оператор A по-прежнему считаем линейным и замкнутым. Начнём с результатов абсолютного характера, когда единственность ослабленного решения обратной задачи гарантирована независимо от выбора значения $T > 0$.

Теорема 9. *Пусть у оператора* A *нет вещественных собственных значений. Тогда при любом выборе параметров* $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *и* $T > 0$ *однородная обратная задача (1), (6) имеет только тривиальное решение* $u(t) \equiv 0$, $g = 0$.

Доказательство непосредственно следует из теорем 2 и 6.

Теорема 10. *Пусть у оператора* A *нет собственных значений на луче* $(-\infty, 0) \subset \mathbb{R}$. *Тогда при любом выборе параметров* $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *и* $T > 0$ *однородная обратная задача (1), (6) имеет только тривиальное решение* $u(t) \equiv 0$, $g = 0$.

Доказательство следует из теоремы 2 и части 1 теоремы 8.

Теоремы 9 и 10 охватывают множество ситуаций. Так, под действие теоремы 10 можно подвести линейные обратные задачи о нахождении источника для эллиптических уравнений в цилиндрических областях, как в работах [7, 36, 37].

Укажем теперь два результата условного характера – когда единственность решения обратной задачи зависит от выбора финального значения $T > 0$.

Теорема 11. *Пусть у оператора* A *нет собственных значений на луче* $(-\infty, -b) \subset \mathbb{R}$ *с некоторым* $b > 0$. *Тогда при любом выборе параметров* $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *и* $T \in (0, \pi/\sqrt{b}\,]$ *однородная обратная задача (1), (6) имеет только тривиальное решение* $u(t) \equiv 0$, $g = 0$.

Доказательство. Так как $T \in (0, \pi/\sqrt{b}\,]$, то $-\pi^2/T^2 \leqslant -b$. Тем самым, по теореме 8, часть 1, все нули характеристической функции (17) попадают на луч $(-\infty, -b)$, где нет собственных значений оператора A. Применяя теорему 2, получаем нужный результат.

Теорема 12. *Пусть у оператора A нет собственных значений на луче $(-\infty, 0) \subset \mathbb{R}$. Пусть параметры $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ взяты разных знаков. Тогда при любом T из интервала*

$$0 < T < -2\beta/\alpha \tag{93}$$

однородная обратная задача (1), (6) имеет только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, $g = 0$.

Доказательство. Из условия (93) следует условие (90). Поэтому, применяя часть 2 теоремы 8, заключаем, что нули характеристической функции (17) попадают на луч $(-\infty, 0)$, где нет собственных значений оператора A. В итоге по теореме 2 получаем нужный результат.

Можно дать много других, более специальных, утверждений, связанных с непопаданием собственных значений оператора A на интервалы локализации нулей из теоремы 8. Не будем перегружать работу такими формулировками. Отметим ещё два результата противоположного характера, когда единственность решения обратной задачи заведомо нарушается.

Теорема 13. *Пусть оператор A имеет отрицательное собственное значение $\lambda_0 = -\gamma^2$, где $\gamma > 0$. Пусть $T = 2k\pi/\gamma > 0$ с некоторым $k \in \mathbb{N}$. Тогда при всех $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ однородная обратная задача (1), (6) имеет нетривиальное решение*

$$u(t) = \frac{T^2}{4k^2\pi^2}\left(1 - \cos\frac{2k\pi t}{T}\right) f_0, \quad g = f_0 \tag{94}$$

с собственным вектором $f_0 \neq 0$ таким, что $f_0 \in D(A)$ и $Af_0 = -\gamma^2 f_0 = -(4k^2\pi^2/T^2) f_0$.

Доказательство. По теореме 3 собственное значение $\lambda_0 = -\gamma^2 = -4k^2\pi^2/T^2$ попадает в серию (71) и является нулём характеристической функции (17). Но тогда, согласно лемме 1, нетривиальное решение задачи (1), (6) можно построить по формуле (19). Конкретная реализация этой формулы даёт пару (94). Непосредственная подстановка в задачу подтверждает, что соотношения (1), (6) выполнены при всех $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Теорема доказана.

В простых “гиперболических” примерах для уравнения колебаний струны оператор A обладает серией собственных значений $\lambda_m = -(m\pi/l)^2$ при $m \in \mathbb{N}$, где $l > 0$ – длина струны. Тогда, как следует из теоремы 13, обратная задача (1), (6) имеет нетривиальные решения вида (94) в любой момент времени $T = T_{k,m} \equiv 2l(k/m)$, где $k, m \in \mathbb{N}$. Указанные моменты образуют счётное всюду плотное множество на луче $0 < T < \infty$, т.е. этот “гиперболический” случай в обратных задачах подобен по своей некорректности так называемой *задаче Дирихле* для уравнения колебаний струны (см. [38]; ср. с [1; с. 140–143] и [15; с. 1619–1620]).

Завершим следующим обособленным результатом.

Теорема 14. *Пусть оператор A имеет собственное значение $\lambda_0 = 0$, и $Af_0 = 0$ с элементом $f_0 \in D(A)$, $f_0 \neq 0$. Предположим, что параметры $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $T > 0$ связаны условием $\alpha T + 2\beta = 0$. Тогда однородная обратная задача (1), (6) имеет нетривиальное решение вида*

$$u(t) = (t^2/2) f_0, \quad g = f_0. \tag{95}$$

Доказательство. По теореме 8 с условием (91) собственное значение $\lambda_0 = 0$ является нулём характеристической функции (17). Воспользуемся формулой (19) вместе с уточнением, указанным в (11) для $\lambda = 0$. Получим пару (95). Проверка соотношений (1), (6) здесь не представляет труда. Теорема доказана.

Ясно, что когда много собственных значений оператора A совпадает с нулями характеристической функции (17), мы можем комбинировать возникающие пары вида (19), осуществляя синтез все более сложных решений однородной обратной задачи (1), (6). В совсем уже специальных случаях, когда характеристическая функция (17) имеет кратный нуль кратности два (см. теорему 4), возможны примеры, где кроме элементарных решений вида (19) появляются *присоединённые элементарные решения* $(u(t), g)$, учитывающие наличие у оператора A не только собственных векторов из $D(A)$, но и присоединённых векторов из $D(A^2)$ (см. [26]).

Авторы признательны А.Б. Костину, А.И. Прилепко и Ю.С. Эйдельману за проявленный интерес и поддержку наших исследований. Особые благодарности А.Ю. Попову – за ценные консультации по теории целых функций и В.Б. Шерстюкову – за научные контакты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М., 1994.
2. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York; Basel, 2000.
3. *Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., 1966.
4. *Тихонов И.В., Эйдельман Ю.С.* Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции типа Миттаг-Лёффлера // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 5. С. 637–644.
5. *Алмохамед М.* Критерий единственности решения в линейной обратной задаче с финальным переопределением второго рода // Вестн. Воронежского гос. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2019. № 3. С. 50–58.
6. *Прилепко А.И.* Обратные задачи теории потенциала (эллиптические, параболические, гиперболические уравнения и уравнение переноса) // Мат. заметки. 1973. Т. 14. № 5. С. 755–767.
7. *Прилепко А.И.* Избранные вопросы в обратных задачах математической физики // Условно-корректные задачи мат. физики и анализа. Новосибирск, 1992. С. 151–162.
8. *Искендеров А.Д., Тагиев Р.Г.* Обратная задача об определении правых частей эволюционных уравнений в банаховом пространстве // Вопросы прикл. мат. и киберн. Науч. тр. Азербайджанского ун-та. 1979. № 1. С. 51–56.
9. *Эйдельман Ю.С.* Единственность решения обратной задачи для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23. № 9. С. 1647–1649.
10. *Тихонов И.В., Эйдельман Ю.С.* Единственность решения двухточечной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения с неизвестным параметром // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 8. С. 1132–1133.
11. *Тихонов И.В.* Обобщённая задача Уорда для абстрактных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 3. С. 325–336.
12. *Тихонов И.В., Алмохамед М.* Об одной обратной задаче для дифференциального уравнения высокого порядка в банаховом пространстве // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. СПб., 2019. С. 91–95.
13. *Амиров А.Х.* О разрешимости обратных задач для уравнения второго порядка // Функц. анализ и его прил. 1986. Т. 20. Вып. 3. С. 80–81.
14. *Орловский Д.Г.* Об одной обратной задаче для дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 6. С. 1000–1009.
15. *Орловский Д.Г.* К задаче определения параметра эволюционного уравнения // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 9. С. 1614–1621.
16. *Тихонов И.В.* Структурные свойства нуль-решений абстрактной задачи Коши // Интегральные преобразования и специальные функции. Информ. бюллетень. 2002. Т. 3. № 1. С. 22–38.
17. *Тихонов И.В., Алмохамед М.* Обобщённые экспоненты и их применение в теории дифференциальных уравнений // Системы компьютерной математики и их приложения. Вып. 21. Смоленск, 2020. С. 345–353.
18. *Попов А.Ю., Седлецкий А.М.* Распределение корней функций Миттаг-Леффлера // Совр. математика. Фунд. направления. 2011. Т. 40. С. 3–171.
19. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. М., 1956.
20. *Леонтьев А.Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. М., 1983.
21. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962.
22. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Часть 2. Теория функций. Распределение нулей. Полиномы. Определители. Теория чисел. М., 1978.
23. *Müntz Ch.H.* Über den Approximationssatz von Weierstraß // Mathematische Abhandlungen Hermann Amandus Schwarz zu seinem Fünfzigjährigen Doctorjubiläum. Berlin; Heidelberg, 1914. S. 303–312.
24. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М., 1958.
25. *Masayoshi Hata.* Problems and Solutions in Real Analysis. Series on Number Theory and Its Applications. V. 4. New Jersey; London; Singapore, 2007.
26. *Алмохамед М., Тихонов И.В.* О некоторых спектральных исследованиях, связанных с теорией обратных задач // Совр. проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й междунар. Саратовской зимней школы. Саратов, 2022. С. 20–26.
27. *Тихонов И.В., Шерстюков В.Б., Алмохамед М.* О некоторых трансцендентных уравнениях, важных для математической физики // Совр. проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й междунар. Саратовской зимней школы. Саратов, 2022. С. 294–299.

28. *Fadle J.* Die Selbstspannungs-Eigenwertfunktionen der quadratischen Scheibe // Ingenieur-Archiv ($\equiv$ Archive of Applied Mechanics). 1940. Bd. 11. S. 125–149.
29. *Buchwald V.T.* Eigenfunctions of plane elastostatics. I. The strip // Proceedings of the Royal Society of London. Ser. A. Math. and Phys. Sci. 1964. V. 277. № 1370. P. 385–400.
30. *Katopodes F.V., Davis A.M.J., Stone H.A.* Piston flow in two-dimensional channel // Physics of Fluids. 2000. V. 12. № 5. P. 1240–1243.
31. *Hardy G.H.* On the zeroes of integral function $x - \sin x = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1!}$ // The Messenger of Math. 1902. V. 31. № 11. P. 161–165.
32. *Маркушевич А.И.* Целые функции. Элементарный очерк. М., 1975.
33. *Эйлер Л.* Введение в анализ бесконечных. Т. 2. М., 1961.
34. *Comtet L.* Advanced Combinatorics. The Art of Finite and Infinite Expansions. Dordrecht; Holland, 1974.
35. *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу. Т. 1. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость. М., 2003.
36. *Соловьев В.В.* Разрешимость обратных задач для эллиптического уравнения в цилиндре // Вестн. Московского гос. обл. ун-та. Сер. Физика. Математика. 2012. № 1. С. 27–38.
37. *Алмохамед М.* Восстановление правой части в уравнении Пуассона при помощи специальных краевых условий // Совр. проблемы теории функций и их приложения: материалы 20-й междунар. Саратовской зимней школы. Саратов, 2020. С. 30–32.
38. *Bourgin D.G., Duffin R.* The Dirichlet problem for the vibrating string equation // Bull. of the Amer. Math. Soc. 1939. V. 45. № 12. Part 1. P. 851–858.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Московский педагогический государственный
университет,
Университет Алеппо,
г. Алеппо, Сирия

Поступила в редакцию 15.02.2022 г.
После доработки 15.02.2022 г.
Принята к публикации 25.05.2022 г.