ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 7, с. 912–920

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.633.2

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2022 г. П. Н. Вабищевич

В конечномерном гильбертовом пространстве рассматривается задача Коши для эволюционного интегро-дифференциального уравнения второго порядка с памятью, подынтегральное выражение в котором представляет собой произведение разностного ядра и линейного оператора от производной решения по времени. Основные трудности в нахождении приближённого значения решения таких нелокальных задач в данный момент времени обусловлены необходимостью работы с приближёнными значениями решения для всех предыдущих моментов времени. Предложена трансформация рассматриваемого интегро-дифференциального уравнения к системе эволюционных слабо связанных между собой локальных уравнений. Она основывается на аппроксимации разностного ядра суммой экспонент. Формулируется локальная задача для слабо связанной системы уравнений с дополнительными обыкновенными дифференциальными уравнениями. Для решения соответствующей задачи Коши приведены оценки устойчивости решения по начальным данным и правой части. Основное внимание уделяется построению и исследованию устойчивости трёхслойных разностных схем и их вычислительной реализации.

DOI: 10.31857/S0374064122070044, EDN: CEFRSC

Введение. При математическом моделировании нестационарных процессов наиболее часто используются параболические и гиперболические уравнения второго порядка [1, гл. I; 2, гл. 2]. В последнее время всё возрастающее внимание уделяется уравнениям, которые частично наследуют свойства как параболических, так и гиперболических уравнений. Характерным примером могут служить эволюционные интегро-дифференциальные уравнения [3, гл. 3; 4, гл. 1]. Наиболее важной особенностью таких уравнений является их нелокальность: решение в текущий момент времени зависит от всей предыстории процесса.

Мы выделяем два класса эволюционных интегро-дифференциальных уравнений с памятью. Первый из них характеризуется нелокальностью решения, а второй – нелокальностью производной решения по времени, т.е. когда подынтегральное выражение в уравнении зависит только соответственно от решения или от производной решения по времени. Эти классы уравнений называются *уравнениями с памятью решений и уравнениями с памятью производной решения* по времени соответственно. При рассмотрении динамических процессов вязкоупругости [5, гл. I; 6, гл. 2] типичными являются эволюционные интегро-дифференциальные уравнения второго порядка с памятью производной решения по времени. Отметим также, что для задач с разностным ядром мы имеем возможность перейти от одного из указанных классов к другому при помощи введения другого разностного ядра. В силу этой возможности те же уравнения вязкоупругости могут (см., например, [1, гл. I]) записываться как интегро-дифференциальные уравнения с памятью решения, а не с памятью производной решения по времени.

Приближённое решение краевых задач для уравнений с памятью проводится с использованием стандартных конечно-элементных или конечно-объёмных аппроксимаций по пространству [7, гл. 3, 6; 8, гл. 3]. Мы приходим к задаче Коши для операторных уравнений с памятью в соответствующем конечномерном гильбертовом пространстве. Основное внимание необходимо уделить проблемам выбора аппроксимаций по времени. При численном решении задач для эволюционных уравнений первого порядка с памятью решения естественно ориентироваться [9, гл. 4] на использование тех или иных квадратур для интегрального члена и обычных двухслойных аппроксимаций производной по времени. Такие исследования неявной схемы Эйлера и схемы Кранка–Николсон выполнены, например, в работах [10, 11]. Соответствующие квадратурные формулы для интегрального члена используются и при рассмотрении интегро-дифференциальных уравнений с памятью производной решения по времени.

Стандартные вычислительные алгоритмы приближённого решения задачи Коши для интегро-дифференциальных уравнений с памятью связаны с необходимостью работать со значениями решения для предшествующих моментов времени. Наиболее интересные возможности уменьшения вычислительной работы представят подходы с переходом от нелокальной задачи к локальной, тогда, в частности, требования к объёму используемой памяти существенно уменьшаются.

Для интегральных уравнений Вольтерры хорошо известный (см., например, [12, гл. 6]) переход к более простым в плане вычислительной реализации задачам обеспечивается выбором специальных аппроксимаций разностного ядра. Выделим как наиболее перспективную аппроксимацию разностного ядра суммой экспонент. При такой аппроксимации мы приходим к системе локальных слабо связанных между собой эволюционных уравнений. Возможности данного подхода при приближённом решении задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения первого порядка с памятью решения рассмотрены в работе [13]. Подобное исследование для задач с памятью производной решения по времени выполнено в работе [14].

В настоящей работе в вещественном конечномерном гильбертовом пространстве рассмотрена задача Коши для эволюционного интегро-дифференциального уравнения Вольтерры второго порядка с памятью производной с положительно определённым самосопряжённым оператором. При аппроксимации разностного ядра суммой экспонент выполнена трансформация нелокальной задачи для уравнения с памятью в локальную систему уравнений. Получены соответствующие априорные оценки для решения задачи Коши, гарантирующие устойчивость решения по начальным данным и правой части. Предложены и исследованы на устойчивость трёхслойные разностные схемы для системы уравнений, которые имеют удобную вычислительную реализацию.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача Коши для эволюционного уравнения второго порядка с памятью производной решения в вещественном конечномерном гильбертовом пространстве H. Функция $u(t)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению с разностным ядром

$$\frac{d^2u}{dt^2} + B\frac{du}{dt} + \int\limits_0^t k(t-s)C\frac{du}{ds}(s)\,ds + Au = f(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

и начальным условиям

$$u(0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = w_0. \tag{2}$$

Линейные постоянные (не зависящие от t) операторы A, B, C являются самосопряжёнными и положительно определёнными, т.е.

$$A = A^* \geqslant \nu_A I, \quad \nu_A > 0, \quad B = B^* \geqslant \nu_B I, \quad \nu_B > 0, \quad C = C^* \geqslant \nu_C I, \quad \nu_C > 0, \tag{3}$$

где I – единичный оператор в H. Будем использовать обычные обозначения $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ и $\|\cdot\|$ для скалярного произведения и нормы в H. Для самосопряжённого положительно определённого оператора D определим гильбертово пространство H_D, задав в векторном пространстве H скалярное произведение и норму $(u,v)_D = (Du,v)$ и $\|u\|_D = (u,v)_D^{1/2}$.

Как и при рассмотрении эволюционных уравнений первого порядка с памятью решения [10, 11, 13] и памятью производной решения [14], считаем, что ядро $k(t)$ положительно определено. В этом случае для всех $T > 0$ ядро $k(t)$ принадлежит пространству $L_1(0,T)$ и имеет место неравенство

$$\int\limits_0^T \psi(t) \int\limits_0^t k(t-s)\psi(s)\,ds\,dt \geqslant 0 \quad \text{для любой} \quad \psi \in C[0,T]. \tag{4}$$

Отметим также [15] достаточное условие положительной определённости ядра $k(t)$:

$$k(t) \geqslant 0, \quad \frac{dk}{dt}(t) \leqslant 0, \quad \frac{d^2k}{dt^2}(t) \geqslant 0, \quad t > 0. \tag{5}$$

В своем исследовании основное внимание мы уделяем получению системы локальных эволюционных уравнений, задача Коши для которой даёт приближённое решение задачи (1), (2). При исследовании устойчивости разностных аппроксимаций по времени для нас ориентиром является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть операторы A, B, C удовлетворяют условиям (3) и $k(t)$ – положительно определённое ядро. Тогда для решения задачи (1), (2) справедлива следующая оценка устойчивости по начальным данным и правой части:*

$$\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|^2 + \|u(t)\|_A^2 \leqslant \|w_0\|^2 + \|u_0\|_A^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|f(s)\|_{B^{-1}}^2\, ds, \quad t > 0. \tag{6}$$

Доказательство. Домножим уравнение (1) скалярно в H на $du(t)/dt$ и с учётом положительной определённости операторов A, B, C придём к неравенству

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\frac{du}{dt}(t)\right\|^2 + \|u(t)\|_A^2\right) + \int\limits_0^t k(t-s)\left(C^{1/2}\frac{du}{ds}(s), C^{1/2}\frac{du}{dt}(t)\right) ds \leqslant \frac{1}{4}\|f(t)\|_{B^{-1}}^2.$$

Интегрируя его по $(0,T)$, получаем

$$\frac{1}{2}\left(\left\|\frac{du}{dt}(T)\right\|^2 + \|u(T)\|_A^2 - \left\|\frac{du}{dt}(0)\right\|^2 - \|u(0)\|_A^2\right) +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_0^t k(t-s)\left(C^{1/2}\frac{du}{ds}(s), C^{1/2}\frac{du}{dt}(t)\right) ds\, dt \leqslant \frac{1}{4}\int\limits_0^T \|f(t)\|_{B^{-1}}^2 dt.$$

Принимая во внимание неравенство (4) и начальное условие (2), убеждаемся в справедливости оценки (6). Теорема доказана.

Нелокальный член в уравнении (1) становится локальным в двух важных случаях: когда ядро $k(t)$ постоянно и когда ядро является δ-функцией. Мы можем выделить такие условия отдельно, заменяя $k(t)$ выражением

$$k(t) \to \gamma_1 + \gamma_2\delta(t) + k(t), \quad \gamma_1 > 0, \quad \gamma_2 > 0. \tag{7}$$

Это соответствует заменам

$$B \to B + \gamma_2 C, \quad A \to A + \gamma_1 C, \quad f(t) \to f(t) + \gamma_1 C u_0 \tag{8}$$

в уравнении (1). Таким образом, мы остаёмся в классе рассматриваемых задач (1)–(3).

2. Локальная система уравнений. В вычислительном плане наибольший интерес вызывают подходы к построению приближённого решения нелокальной задачи (1), (2) с памятью производной решения по времени с помощью решений некоторых локальных эволюционных задач. Они могут строиться на основе аппроксимации ядра суммой экспонент.

Ядро $k(t)$ аппроксимируется функцией $\widetilde{k}(t)$, которая имеет вид

$$\widetilde{k}(t) = \sum_{i=1}^m a_i \exp(-b_i t), \quad t \geqslant 0. \tag{9}$$

Будем считать, что для коэффициентов $a_i,\ b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m,$ выполнены предположения об их положительности:

$$a_i > 0, \quad b_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{10}$$

С учётом условий (5) при ограничениях (10) ядро $\widetilde{k}(t)$ положительно определено.

Приближённое решение задачи (1), (2) обозначим через $v(t)$. Оно определяется как решение задачи Коши

$$\frac{d^2v}{dt^2} + B\frac{dv}{dt} + \int\limits_0^t \widetilde{k}(t-s)C\frac{dv}{ds}(s)\,ds + Av = f(t), \quad t > 0, \tag{11}$$

$$v(0) = u_0, \quad \frac{dv}{dt}(0) = w_0. \tag{12}$$

Для перехода от нелокальной задачи (11), (12) к локальной введём [12–14] функции

$$v_i(t) = \int\limits_0^t \exp(-b_i(t-s))\frac{dv}{ds}(s)\,ds, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

С учётом представления (9) уравнение (11) записывается в виде

$$\frac{d^2v}{dt^2} + B\frac{dv}{dt} + \sum_{i=1}^m a_i C v_i + Av = f(t). \tag{13}$$

Для вспомогательных функций $v_i(t),\ i = 1, 2, \ldots, m,$ имеем уравнения

$$\frac{dv_i}{dt} + b_i v_i - \frac{dv}{dt} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{14}$$

Система уравнений (13), (14) дополняется начальными условиями

$$v(0) = u_0, \quad \frac{dv}{dt}(0) = w_0, \quad v_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{15}$$

Уравнение (13) удобно записать в несколько другой форме. Подстановка

$$v_i = \frac{1}{b_i}\frac{dv}{dt} - \frac{1}{b_i}\frac{dv_i}{dt}, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

в (13) даёт

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \left(B + \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{b_i}C\right)\frac{dv}{dt} - \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{b_i}C\frac{dv_i}{dt} + Av = f(t). \tag{16}$$

Теорема 2. *Пусть операторы $A,\ B,\ C$ удовлетворяют условиям (3). Тогда для решения задачи (14)–(16) при выполнении условия (10) справедлива следующая оценка устойчивости по начальным данным и правой части:*

$$\left\|\frac{dv}{dt}(t)\right\|^2 + \|v(t)\|_A^2 + \sum_{i=1}^m a_i\|v_i(t)\|_C^2 \leqslant \|w_0\|^2 + \|u_0\|_A^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|f(s)\|_{B^{-1}}^2\,ds, \quad t > 0. \tag{17}$$

Доказательство. Домножим уравнение (16) на $dv(t)/dt,$ а отдельное уравнение (14) для $i = 1, 2, \ldots, m$ на $a_i b_i^{-1} C dv_i(t)/dt.$ Это даёт равенства

$$\left\|\frac{dv}{dt}\right\|_B^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\frac{dv}{dt}(t)\right\|^2 + \|v\|_A^2\right) + \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{b_i}\left(C\frac{dv}{dt}, \frac{dv}{dt}\right) - \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{b_i}\left(C\frac{dv_i}{dt}, \frac{dv}{dt}\right) = \left(f, \frac{dv}{dt}\right),$$

$$\frac{a_i}{b_i}\left(C\frac{dv_i}{dt}, \frac{dv_i}{dt}\right) - \frac{a_i}{b_i}\left(C\frac{dv}{dt}, \frac{dv_i}{dt}\right) + a_i\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_i\|_C^2 = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Складывая их, получаем

$$\left\|\frac{dv}{dt}\right\|_B^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\frac{dv}{dt}(t)\right\|^2 + \|v\|_A^2 + \sum_{i=1}^m a_i\|v_i\|_C^2\right) + \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{b_i}\left\|\frac{dv}{dt} - \frac{dv_i}{dt}\right\|_C^2 = \left(f, \frac{dv}{dt}\right),$$

откуда вытекает неравенство

$$\frac{d}{dt}\left(\left\|\frac{dv}{dt}(t)\right\|^2 + \|v\|_A^2 + \sum_{i=1}^m a_i\|v_i\|_C^2\right) \leqslant \frac{1}{2}\|f(t)\|_{B^{-1}}^2$$

и доказываемая оценка (17). Теорема доказана.

Нам удобно записать систему (14), (16) в форме одного векторного эволюционного уравнения второго порядка. Определим векторы $\boldsymbol{v} = \{v, v_1, \ldots, v_m\}$ и $\boldsymbol{f} = \{f, 0, \ldots, 0\}$ и запишем задачу (14)–(16) в следующем виде:

$$\boldsymbol{C}\frac{d^2\boldsymbol{v}}{dt^2} + \boldsymbol{B}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}, \tag{18}$$

$$\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0, \quad \boldsymbol{C}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}(0) = \boldsymbol{w}_0, \tag{19}$$

где $\boldsymbol{v}_0 = \{u_0, 0, \ldots, 0\}$ и $\boldsymbol{w}_0 = \{w_0, 0, \ldots, 0\}$, а операторные матрицы $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{A}$ имеют представления

$$\boldsymbol{C} = \mathrm{diag}\,(I, 0, \ldots, 0), \quad \boldsymbol{A} = \mathrm{diag}\,(A, a_1C, \ldots, a_mC),$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} B + \sum\limits_{i=1}^m \dfrac{a_i}{b_i}C & -\dfrac{a_1}{b_1}C & \cdots & -\dfrac{a_m}{b_m}C \\ -\dfrac{a_1}{b_1}C & \dfrac{a_1}{b_1}C & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\dfrac{a_m}{b_m}C & 0 & \cdots & \dfrac{a_m}{b_m}C \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Задачу Коши (18), (19) мы рассматриваем на прямой сумме пространств $\boldsymbol{H} = H \bigoplus \ldots \bigoplus H$, на которой скалярное произведение и норма определяются выражениями

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (v, w) + \sum_{i=1}^m (v_i, w_i), \quad \|\boldsymbol{v}\| = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})^{1/2},$$

где $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{H}$. Принимая во внимание условия (3) и (10), получаем

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}^* \geqslant 0, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^* \geqslant 0, \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^* > 0. \tag{21}$$

Для доказательства оценки (17) домножим скалярно в $\boldsymbol{H}$ уравнение (18) на $d\boldsymbol{v}/dt$. С учётом условий (21) и того, что $\boldsymbol{C}^2 = \boldsymbol{C}$, это даёт соотношение

$$\left(\boldsymbol{B}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}, \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|\boldsymbol{C}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{A}}^2\right) = \left(\boldsymbol{f}, \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right).$$

Принимая во внимание неравенства

$$\left(\boldsymbol{B}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}, \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right) \geqslant \left(B\frac{dv}{dt}, \frac{dv}{dt}\right), \quad \left(\boldsymbol{f}, \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right) \leqslant \left(B\frac{dv}{dt}, \frac{dv}{dt}\right) + \frac{1}{4}(B^{-1}f, f),$$

имеем

$$\left\|\boldsymbol{C}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}(t)\right\|^2 + \|\boldsymbol{v}(t)\|_{\boldsymbol{A}}^2 \leqslant \|\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}_0\|^2 + \|\boldsymbol{v}_0\|_{\boldsymbol{A}}^2 + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \|f(s)\|_{B^{-1}}\,ds. \tag{22}$$

В нашем случае

$$\left\|\boldsymbol{C}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}(t)\right\|^2 = \left\|\frac{dv}{dt}(t)\right\|^2, \quad \|\boldsymbol{v}(t)\|_{\boldsymbol{A}}^2 = \|v(t)\|_A^2 + \sum_{i=1}^m a_i\|v_i(t)\|_C^2,$$

$$\|\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}_0\|^2 = \|w_0\|^2, \quad \|\boldsymbol{v}_0\|_{\boldsymbol{A}}^2 = \|u_0\|_A^2,$$

поэтому из неравенства (22) вытекает оценка (17).

Вместо аппроксимации (9) может рассматриваться несколько более общий случай, как следует из (7),

$$\widetilde{k}(t) = \gamma_1 + \gamma_2\delta(t) + \sum_{i=1}^m a_i\exp(-b_i t), \quad t \geqslant 0.$$

Переход к рассмотренному случаю обеспечивается согласно (8).

3. Аппроксимация по времени. При приближённом решении задачи Коши (18), (19) будем ориентироваться на безусловно устойчивые разностные схемы. Используем равномерную сетку по времени с шагом τ и пусть $y^n = y(t^n)$, $t^n = n\tau$, $n = 0, 1, \ldots$ Трёхслойная разностная схема с весом $\sigma = \mathrm{const} > 0$ имеет вид

$$\boldsymbol{C}\frac{\boldsymbol{y}^{n+1} - 2\boldsymbol{y}^n + \boldsymbol{y}^{n-1}}{\tau^2} + \boldsymbol{B}\frac{\boldsymbol{y}^{n+1} - \boldsymbol{y}^{n-1}}{2\tau} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^{n+\sigma} = \boldsymbol{f}^n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{23}$$

$$\boldsymbol{y}^0 = \boldsymbol{v}^0, \quad \boldsymbol{y}^1 = \widetilde{\boldsymbol{v}}^1 \tag{24}$$

при использовании обозначений

$$\boldsymbol{y}^{n+\sigma} = \sigma\boldsymbol{y}^{n+1} + (1 - 2\sigma)\boldsymbol{y}^n + \sigma\boldsymbol{y}^{n-1}, \quad \boldsymbol{y}^n = \{y^n, y_1^n, \ldots, y_m^n\}.$$

Для правой части и начального условия имеем

$$\boldsymbol{f}^n = \{f^n, 0, \ldots, 0\}, \quad \boldsymbol{v}^0 = \{u_0, 0, \ldots, 0\}.$$

В схеме (23), (24) второе начальное условие (24) должно быть предварительно рассчитано. Для сохранения второго порядка на решениях задачи (14)–(16) положим, например,

$$\frac{y_i^1 - y_i^0}{\tau} + b_i\frac{y_i^1 + y_i^0}{2} - \frac{y^1 - y^0}{\tau} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\frac{y^1 - y^0}{\tau} = w_0 + \frac{\tau}{2}\left(\frac{f^1 + f^0}{2} - \left(B + \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{b_i}C\right)\frac{y^1 - y^0}{\tau} + \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{b_i}C\frac{y_i^1 - y_i^0}{\tau} - A\frac{y^1 - y^0}{2}\right).$$

Разностная схема (23), (24) аппроксимирует задачу (18), (19) со вторым порядком по τ при достаточной гладкости решения $\boldsymbol{v}(t)$. При изучении устойчивости рассматриваемых трёхслойных разностных схем используем результаты теории устойчивости (корректности) операторно-разностных схем [16, гл. 6; 17, гл. 4].

Теорема 3. *Трёхслойная разностная схема (3), (20), (23), (24) является безусловно устойчивой при* $\sigma \geqslant 0.25$. *При этих ограничениях априорная оценка для приближённого решения задачи (18), (19) имеет вид*

$$\left\|\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau}\right\|^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\tau^2\left\|\frac{\boldsymbol{y}^{n+1} - \boldsymbol{y}^n}{\tau}\right\|_{\boldsymbol{A}}^2 + \left\|\frac{\boldsymbol{y}^{n+1} + \boldsymbol{y}^n}{2}\right\|_{\boldsymbol{A}}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\frac{\widetilde{v}^1 - v^0}{\tau}\right\|^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\tau^2\left\|\frac{\widetilde{\boldsymbol{v}}^1 - \boldsymbol{v}^0}{\tau}\right\|_{\boldsymbol{A}}^2 + \left\|\frac{\widetilde{\boldsymbol{v}}^1 + \boldsymbol{v}^0}{2}\right\|_{\boldsymbol{A}}^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \tau\|f^k\|_{B^{-1}}^2, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{25}$$

Доказательство. С учётом тождества

$$\boldsymbol{y}^n = \frac{1}{4}(\boldsymbol{y}^{n+1} + 2\boldsymbol{y}^n + \boldsymbol{y}^{n-1}) - \frac{1}{4}(\boldsymbol{y}^{n+1} - 2\boldsymbol{y}^n + \boldsymbol{y}^{n-1})$$

запишем схему (23) в виде

$$\left(\boldsymbol{C} + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\tau^2 \mathbf{A}\right)\frac{\boldsymbol{y}^{n+1} - 2\boldsymbol{y}^n + \boldsymbol{y}^{n-1}}{\tau^2} + \boldsymbol{B}\frac{\boldsymbol{y}^{n+1} - \boldsymbol{y}^{n-1}}{2\tau} + \boldsymbol{A}\frac{\boldsymbol{y}^{n+1} + 2\boldsymbol{y}^n + \boldsymbol{y}^{n-1}}{4} = \boldsymbol{f}^n. \quad (26)$$

При использовании новых переменных

$$\boldsymbol{z}^n = \frac{1}{2}(\boldsymbol{y}^n + \boldsymbol{y}^{n-1}), \quad \boldsymbol{w}^n = \frac{\boldsymbol{y}^n - \boldsymbol{y}^{n-1}}{\tau} \quad (27)$$

из (26) следует равенство

$$\left(\boldsymbol{C} + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\tau^2 \boldsymbol{A}\right)\frac{\boldsymbol{w}^{n+1} - \boldsymbol{w}^n}{\tau} + \boldsymbol{B}\frac{\boldsymbol{w}^{n+1} + \boldsymbol{w}^n}{2} + \boldsymbol{A}\frac{\boldsymbol{z}^{n+1} + \boldsymbol{z}^n}{2} = \boldsymbol{f}^n,$$

умножая которое на

$$2(\boldsymbol{z}^{n+1} - \boldsymbol{z}^n) = \tau(\boldsymbol{w}^{n+1} + \boldsymbol{w}^n),$$

получаем

$$\left(\left(\boldsymbol{C} + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\tau^2 \boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{w}^{n+1}, \boldsymbol{w}^{n+1}\right) - \left(\left(\boldsymbol{C} + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\tau^2 \boldsymbol{A}\right)\boldsymbol{w}^n, \boldsymbol{w}^n\right) +$$

$$+ \frac{\tau}{2}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{w}^{n+1} + \boldsymbol{w}^n), \boldsymbol{w}^{n+1} + \boldsymbol{w}^n) + \|\boldsymbol{z}^{n+1}\|^2_{\boldsymbol{A}} - \|\boldsymbol{z}^n\|^2_{\boldsymbol{A}} = \tau(\boldsymbol{f}^n, (\boldsymbol{w}^{n+1} + \boldsymbol{w}^n)). \quad (28)$$

Так как

$$(\boldsymbol{C}\boldsymbol{w}^{n+1}, \boldsymbol{w}^{n+1}) = \|w^{n+1}\|^2,$$

$$(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{w}^{n+1} + \boldsymbol{w}^n), \boldsymbol{w}^{n+1} + \boldsymbol{w}^n) \geqslant (B(w^{n+1} + w^n), w^{n+1} + w^n),$$

$$(\boldsymbol{f}^n, (\boldsymbol{w}^{n+1} + \boldsymbol{w}^n)) \leqslant \frac{1}{2}(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{w}^{n+1} + \boldsymbol{w}^n), \boldsymbol{w}^{n+1} + \boldsymbol{w}^n) + \frac{1}{2}(B^{-1}f^n, f^n),$$

то из (28) следует оценка

$$\|w^{n+1}\|^2 - \|w^n\|^2 + \left(\sigma - \frac{1}{4}\right)\tau^2(\|\boldsymbol{w}^{n+1}\|^2_{\boldsymbol{A}} - \|\boldsymbol{w}^n\|^2_{\boldsymbol{A}}) + \|\boldsymbol{z}^{n+1}\|^2_{\boldsymbol{A}} - \|\boldsymbol{z}^n\|^2_{\boldsymbol{A}} \leqslant \frac{1}{2}\tau\|f^n\|^2_{B^{-1}}.$$

С учётом введённых обозначений (27) это неравенство приводит нас к оценке (25). Теорема доказана.

Запишем рассматриваемую трёхслойную векторную схему с весами (23), (24) для отдельных компонент. В наиболее интересном случае $\sigma = 0.25$ для приближённого решения задачи (14)–(16) имеем

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\tau^2} + \left(B + \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{b_i}C\right)\frac{y^{n+1} - y^{n-1}}{2\tau} -$$

$$- \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{b_i}C\frac{y_i^{n+1} - y_i^{n-1}}{2\tau} + A\frac{y^{n+1} + 2y^n + y^{n-1}}{4} = f^n, \quad (29)$$

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^{n-1}}{2\tau} + b_i\frac{y_i^{n+1} + 2y_i^n + y_i^{n-1}}{4} - \frac{y^{n+1} - y^{n-1}}{2\tau} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad (30)$$

при заданных начальных условиях

$$y^0 = u_0, \quad y^1 = \widetilde{v}^1, \quad y_i^0 = 0, \quad y_i^1 = \widetilde{v}_i^{\,1}, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{31}$$

Для решения задачи (29)–(31) из априорной оценки (25) следует

$$\left\|\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau}\right\|^2 + \left\|\frac{y^{n+1} + y^n}{2}\right\|_A^2 + \sum_{i=1}^m a_i \left\|\frac{y_i^{n+1} + y_i^n}{2}\right\|_C^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\frac{\widetilde{v}^1 - v^0}{\tau}\right\|^2 + \left\|\frac{\widetilde{v}^1 + v^0}{2}\right\|_A^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m a_i \|\widetilde{v}_i^1\|_C^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \tau \|f^n\|_{B^{-1}}^2, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{32}$$

Оценка (32) является разностным аналогом оценки (17) для решения дифференциальной задачи (14)–(16).

Отдельного внимания при решении нелокальных задач заслуживает проблема вычислительной реализации. В случае (30) имеем равенства

$$y_i^{n+1} = \frac{1}{1 + 0.5 b_i \tau} y^{n+1} + \chi_i^n,$$

$$\chi_i^n = \frac{1}{1 + 0.5 b_i \tau}(y_i^{n-1} - y^{n-1} - 0.5 b_i \tau (2 y_i^n + y_i^{n-1})), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{33}$$

Их подстановка в (29) даёт для нахождения y^{n+1} уравнение

$$\left(\frac{2}{\tau} I + B + \frac{\tau}{2}(\mu C + A)\right) y^{n+1} = \chi^n. \tag{34}$$

Для коэффициента μ и правой части имеем

$$\mu = \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{1 + 0.5 b_i \tau},$$

$$\chi^n = 2\tau f^n + \frac{2}{\tau}(2y^n - y^{n-1}) + B y^{n-1} + \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{b_i} C (y^{n-1} - y_i^{n-1} + \chi_i^n) - \frac{\tau}{2} A (2y^n + y^{n-1}).$$

Тем самым переход на новый $n+1$ слой по времени обеспечивается решением стандартной задачи (34) для y^{n+1} и расчётом вспомогательных величин y_i^{n+1}, $i = 1, 2, \ldots, m$, согласно равенствам (33). Вычислительная сложность приближённого решения рассматриваемой нелокальной задачи (1), (2), (5) не намного выше, чем при решении локальной задачи. Необходимо дополнительно оперировать с решениями m простых вспомогательных локальных эволюционных задач при явных вычислениях их решения на новом слое по времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dautray R., Lions J.-L.* Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. V. 1. Berlin, 2000.
2. *Evans L.C.* Partial Differential Equations. Providence, 2010.
3. *Gripenberg G., Londen S.-O., Staffans O.* Volterra Integral and Functional Equations. Cambridge, 1990.
4. *Prüss J.* Evolutionary Integral Equations and Applications. Basel, 1993.
5. *Christensen R.M.* Theory of Viscoelasticity: an Introduction. New York, 1982.
6. *Marques S.P., Creus G.J.* Computational Viscoelasticity. Berlin, 2012.
7. *Knabner P., Angermann L.* Numerical Methods for Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations. New York, 2003.

8. *Quarteroni A., Valli A.* Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Berlin, 1994.
9. *Chen C., Shih T.* Finite Element Methods for Integrodifferential Equations. Singapore, 1998.
10. *McLean W., Thomee V.* Numerical solution of an evolution equation with a positive-type memory term // The ANZIAM J. 1993. V. 35. № 1. P. 23–70.
11. *McLean W., Thomee V., Wahlbin L. B.* Discretization with variable time steps of an evolution equation with a positive-type memory term // J. of Comput. and Appl. Math. 1996. V. 69. № 1. P. 49–69.
12. *Linz P.* Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. Philadelphia, 1985.
13. *Vabishchevich P.N.* Numerical solution of the Cauchy problem for Volterra integrodifferential equations with difference kernels // Appl. Numer. Math. 2022. V. 174. P. 177–190.
14. *Vabishchevich P.N.* Approximate solution of the Cauchy problem for a first-order integrodifferential equation with solution derivative memory // arXiv. 2021. № 2111.05121. P. 1–13.
15. *Halanay A.* On the asymptotic behavior of the solutions of an integro-differential equation // J. of Math. Anal. and Appl. 1965. V. 10. № 2. P. 319–324.
16. *Samarskii A.A.* The Theory of Difference Schemes. New York, 2001.
17. *Samarskii A.A., Matus P.P., Vabishchevich P.N.* Difference Schemes with Operator Factors. Dordrecht, 2002.

Институт проблем безопасного развития
атомной энергетики РАН, г. Москва,
Северо-Кавказский центр математических исследований,
Северо-Кавказский федеральный университет,
г. Ставрополь

Поступила в редакцию 10.01.2022 г.
После доработки 10.01.2022 г.
Принята к публикации 25.05.2022 г.