

УДК 519.632+519.633

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

© 2022 г. М. П. Галанин, Д. Л. Сорокин, А. Р. Ухова

Разработаны способы численного решения задачи для уравнения смешанного типа в неограниченной области. Предложен способ задания искусственных граничных условий, позволяющий проводить расчёты в ограниченной области такой, что численное решение сходится к проекции точного решения на эту область. Подробно рассмотрен случай, когда решение удовлетворяет волновому уравнению в ограниченной области и уравнению Лапласа в оставшейся части пространства. Приведён алгоритм для случая, когда в ограниченной области процесс описывается уравнением теплопроводности. Приведены примеры решений в двумерном случае. Исследована скорость сходимости итерационного алгоритма.

DOI: 10.31857/S0374064122070056, EDN: CEFVXE

Введение. В работе рассмотрены задачи, описываемые гиперболическими или параболическими уравнениями во внутренней подобласти и уравнением Лапласа – во внешней, причём внутренняя подобласть конечных размеров со всех сторон окружена внешней бесконечной подобластью. Построены алгоритмы численного решения таких задач.

Алгоритмы базируются на основной интегральной формуле Грина для оператора Лапласа. Суть методов состоит во введении расчётной области конечных размеров, построении искусственных граничных условий и итерационного алгоритма для реализации этих условий. Подобные алгоритмы использованы в работе [1] для решения внешних задач для оператора Лапласа.

В п. 1 приведена постановка задачи, построен вычислительный алгоритм, исследована скорость его сходимости. С помощью интегро-интерполяционного метода в п. 2 построена разностная схема. В п. 3 приведены примеры решения задачи с помощью алгоритма, проведено сравнение теоретической и экспериментальной оценок скоростей сходимости.

1. Постановка задачи. Построение итерационного алгоритма. Пусть в ограниченной области D (рис. 1) некоторый процесс описывается волновым уравнением, вне этой области – уравнением Лапласа. На границе ∂D решение непрерывно вместе с нормальной производной, а также является ограниченным на бесконечности и в нуле:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u, \quad \mathbf{r} \in D, \quad t > 0;$$

$$\Delta u = 0, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n \setminus D, \quad n = 1, 2, 3;$$

$$u|_{t=0} = \alpha(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in D;$$

$$u_t|_{t=0} = \beta(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in D;$$

$$[u] = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right] = 0 \quad \text{на } \partial D;$$

$$|u| < +\infty. \tag{1}$$

Здесь $[\cdot]$ – знак скачка величины, указанной в скобках, c – константа.

Целью работы является построение алгоритма численного решения задачи в ограниченной области $D_2 : D \subset D_2$ (рис. 1) такого, что проекция решения (1) на указанную ограниченную область будет совпадать с решением задачи в ограниченной области.

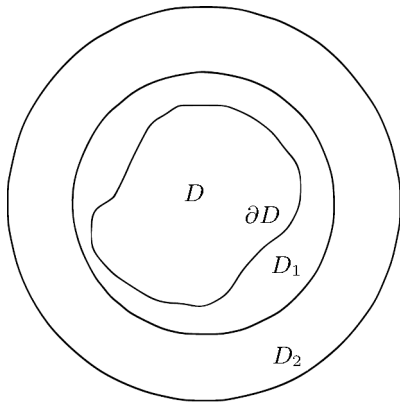


Рис. 1. Рассматриваемая область.

Без потери общности под D_2 будем понимать шар в пространстве соответствующей размерности радиуса R_2 . Введём обозначение R – радиус шара, полностью включающего в себя область D ($R < R_2$). Форма области D может быть сложной, что не позволяет задать для соответствующей задачи функцию Грина. Поэтому для такого случая в статье [1] рассмотрена дополнительная граница ∂D_1 в области $D_2 \setminus D$, представляющая собой сферу радиуса $R_1 : R < R_1 < R_2$ (рис. 1).

Для нахождения решения в ограниченной области будем использовать условие

$$u|_{|\mathbf{r}|=R_2} = Su|_{|\mathbf{r}|=R_1}. \tag{2}$$

Здесь S – линейный оператор. В двумерном или трёхмерном случаях S – это интеграл Пуассона (приведён далее).

В одномерном плоском (декартовом, $n = 1$) случае потребуем выполнения условия

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{|\mathbf{r}|=0} = 0. \tag{3}$$

В одномерном сферически симметричном и трёхмерном случаях от решения (1) будем требовать регулярности на бесконечности:

$$|u| \rightarrow 0, \quad |\mathbf{r}| \rightarrow \infty.$$

Введённых условий достаточно для существования и единственности решений рассматриваемых задач. Не возникает сомнений, что при должной аппроксимации задачи (1)–(3) в ограниченной области D_2 будет получено искомое (приближённое к точному) решение.

Рассмотрим итерационный вариант решения, при котором значение функции u на каждой итерации находится при заданном значении приближения граничного условия на границе $|\mathbf{r}| = R_2$, а затем по полученному решению пересчитывается по (2), и решение в области ищется снова.

В одномерных плоском (декартовом) и цилиндрически симметричном случаях справедливо равенство

$$Su|_{|\mathbf{r}|=R_1} = u|_{|\mathbf{r}|=R_1},$$

а в одномерном сферически симметричном случае

$$Su|_{|\mathbf{r}|=R_1} = \frac{R_1}{R_2} u|_{|\mathbf{r}|=R_1}.$$

Исследуем сходимость итерационного процесса в одномерном случае.

Ограничимся исследованием дифференциально-разностной задачи. Для этого заменим производные по времени на конечно-разностные с шагом τ . Пусть разыскивается решение на новом временном слое в соответствии с задачей

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau^2}y &= c^2\Delta y + f, \quad \mathbf{r} \in D; \\ \Delta y &= 0, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n \setminus D, \quad n = 1, 2, 3; \\ [y] &= 0, \quad \left[\frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}} \right] = 0 \quad \text{на } \partial D; \\ |u| &< +\infty; \\ y|_{|\mathbf{r}|=R_2} &= Sy|_{|\mathbf{r}|=R_1}. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь правая часть f определяется решением с предыдущих временных слоёв.

Устроим итерационный процесс: ищем решение на k -й итерации путём нахождения решения (4) с граничным условием

$$y^k|_{|r|=R_2} = \mu^{k-1},$$

после нахождения которого пересчитаем условие по правилу

$$\mu^k = Sy^k|_{|r|=R_1}.$$

Сходимость итераций будет иметь место, если $|\delta\mu^k| \leq q|\delta\mu^{k-1}|$ с $0 < q < 1$. Здесь $\delta\mu^k = \mu - \mu^k$, $\mu = y|_{|r|=R_2}$.

Утверждение 1. В одномерных случаях описанный итерационный процесс сходится со скоростью геометрической прогрессии с показателем q , равным

$$q = \frac{c\tau \operatorname{cth}(R/(c\tau)) + (R_1 - R)}{c\tau \operatorname{cth}(R/(c\tau)) + (R_2 - R_1)}$$

в плоском (декартовом) случае,

$$q = \frac{c\tau I_0(R/(c\tau))/I_1(R/(c\tau)) + R(\ln R_1 - \ln R)}{c\tau I_0(R/(c\tau))/I_1(R/(c\tau)) + R(\ln R_2 - \ln R)}$$

в цилиндрически симметричном случае,

$$q = \frac{c\tau \operatorname{th}(R/(c\tau)) + (R_1 - R)}{c\tau \operatorname{th}(R/(c\tau)) + (R_2 - R)}$$

в сферически симметричном случае.

В данном утверждении I_0 и I_1 – функции Инфельда (Бесселя комплексного аргумента).

Доказательство предложения состоит в прямом решении задачи (4) для $\delta y^k = y - y^k$ и анализе граничного условия.

Как видно, во всех случаях показатели $q < 1$ и в основном при малых τ определяются слагаемыми, которые не зависят от τ . В значительной степени данные показатели соответствуют аналогичным коэффициентам задачи для уравнения Лапласа в пространстве (см. [1]).

Рассмотрим также задачу, аналогичную (1), но с заменой волнового уравнения на уравнение теплопроводности с постоянной температуропроводностью a^2 :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \quad \mathbf{r} \in D, \quad t > 0, \quad (5)$$

с очевидными изменениями начальных условий (1).

Будем решать эту задачу также итерационным способом, который исследуем, ограничившись дифференциально-разностным приближением.

Утверждение 2. Для задачи с уравнением теплопроводности (5) итерационный процесс сходится с показателем геометрической прогрессии q из утверждения 1, в котором коэффициент s заменён на a , а τ – на $\sqrt{\tau}$.

Сходимость подобного итерационного процесса в одномерном случае исследована в работе [2]. В статье [3] приведены результаты численного моделирования в двумерном случае.

Замечание. В общем трёхмерном случае для решения задачи справедлив принцип максимума, поэтому сходимость итераций также имеет место, как и для уравнения Лапласа [1, 2, 4].

2. Построение разностной схемы. Положим далее значение скорости $c = 1$. Рассмотрим пространственно двумерный случай. Задачу будем решать в цилиндрических координатах.

Решение внешней задачи для уравнения Лапласа для круга известно и задаётся интегралом Пуассона [5, с. 314, 6, с. 157]. В двумерном случае он имеет вид

$$u(r, \varphi) = Su|_{|\tilde{r}|=R_1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R_1, \psi) \frac{r^2 - R_1^2}{r^2 - 2rR_1 \cos(\varphi - \psi) + R_1^2} d\psi, \quad r > R_1. \quad (6)$$

Вычислив интеграл Пуассона от значений искомой функции на границе ∂D_1 , можно получить значения функции на границе области D_2 .

Тогда исходная задача (1), (2) в области уравнения Лапласа примет вид

$$\Delta u = 0, \quad \vec{r} \in D_2 \setminus D;$$

$$u|_{\partial D_2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R_1, \psi) \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_2^2 - 2R_1R_2 \cos(\varphi - \psi) + R_1^2} d\psi.$$

Построим итерационный алгоритм для учёта интегрального граничного условия (6). Значение u^s на границе области D_2 на каждой новой итерации будет вычисляться через уже известные значения u^{s-1} на предыдущей итерации. Для нахождения u^s имеем задачу с условиями Дирихле на внешней границе ограниченной области:

$$u^s|_{\partial D_2} = S u^{s-1}|_{\partial D_1}.$$

Схожий алгоритм применён в работах [1–3].

Для численного расчёта введём равномерную сетку в

$$\Omega = \{0 \leq r \leq R_2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq t \leq T\}$$

с шагом h_r по координате r , шагом h_φ по координате φ и шагом τ по времени. Выберем шаг так, чтобы узлы сетки N , N_1 , N_2 попадали на границы областей радиусов R , R_1 и R_2 соответственно.

Построим разностную схему для волнового уравнения интегро-интерполяционным методом (см. [7, с. 215]). Она имеет вид

$$y_{\bar{t}\bar{t}} = \frac{1}{r_i h^r} (r_{i+1/2} y_r - r_{i-1/2} y_{\bar{r}})^{(\sigma)} + \frac{1}{r_i^2} y_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}^{(\sigma)}. \quad (7)$$

Здесь $y^{(\sigma)} = \sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y}$, где y – сеточная функция, приближающая решение u , σ – вес. Неизвестной является функция \hat{y} . Обозначения разностных производных и сеточных функций на разных временных слоях соответствуют обозначениям в работах [7, с. 210; 8, гл. 1].

Полученная схема является трёхслойной, для нахождения неизвестного значения \hat{y}_{ij} необходимо знать значения решения с двух предыдущих слоёв. Значения u на нулевом слое известны из начального условия $u|_{t=0} = \alpha(r, \varphi)$, на первом слое можно вычислить решение из условия $u_t|_{t=0} = \beta(r, \varphi)$. Схема (7) имеет второй порядок по пространству и времени, поэтому аппроксимируем второе начальное условие тоже со вторым порядком. Для этого воспользуемся формулой Тейлора.

Отсюда значение решения на первом временном слое имеет вид

$$y_{ij}^1 = \alpha + \tau\beta + \frac{\tau^2}{2} \left(\frac{1}{r_i h^r} (r_{i+1/2} \alpha_r - r_{i-1/2} \alpha_{\bar{r}}) + \frac{1}{r_i^2} \alpha_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}} \right).$$

Аналогично (7) построим разностную схему для уравнения Лапласа:

$$\frac{1}{r_i h^r} (r_{i+1/2} y_r - r_{i-1/2} y_{\bar{r}})^{(\sigma)} + \frac{1}{r_i^2} y_{\bar{\varphi}\bar{\varphi}}^{(\sigma)} = 0.$$

Для приближённого вычисления интеграла Пуассона (6) воспользуемся квадратурной формулой трапеций

$$y_{N_2, j} = \frac{h_\varphi (R_2^2 - R_1^2)}{2\pi} \left(\frac{0.5 y_{N_1, 0}}{R_1^2 - 2R_1 R_2 \cos(\varphi_j - \varphi_0) + R_2^2} + \frac{0.5 y_{N_1, N_\varphi}}{R_1^2 - 2R_1 R_2 \cos(\varphi_j - \varphi_{N_\varphi}) + R_2^2} + \sum_{m=1}^{N_\varphi-1} \frac{y_{N_1, m}}{R_1^2 - 2R_1 R_2 \cos(\varphi_j - \varphi_m) + R_2^2} \right).$$

Здесь N_1, N_2 – номера узлов сетки по радиусу, соответствующие $r = R_1$ и $r = R_2$. Число узлов сетки по углу φ равно $N_\varphi + 1$. По углу аппроксимированы периодические граничные условия.

Решение задачи должно быть ограничено в нуле по радиусу. Аппроксимируем уравнение (1) в нуле так, как это описано в работах [7, с. 313; 8, с. 434].

На границе области D поставлены условия сопряжения. Для аппроксимации условия равенства потоков рассмотрим ячейки $[r_{N-1/2}, r_N] \times [\varphi_{j-1/2}, \varphi_{j+1/2}]$ и $[r_N, r_{N+1/2}] \times [\varphi_{j-1/2}, \varphi_{j+1/2}]$. В первой ячейке проинтегрируем волновое уравнение, а во второй – уравнение Лапласа. Из данных равенств выразим поток u в точке r_N , приравняем и получим аппроксимацию условия сопряжения

$$y_{\bar{t}t} = \frac{2}{h_r^r r_{N_1}} (r_{N_1+1/2} y_r - r_{N_1-1/2} y_{\bar{r}})^{(\sigma)} + \frac{2}{r_{N_1}^2} y_{\bar{\varphi}\varphi}^{(\sigma)}.$$

Если границей области D является не окружность, то возникает необходимость постановки условий сопряжения на границе, например, вида $\varphi = \text{const}$, которое построим также путём интегрирования уравнений по ячейке $[r_{i-1/2}, r_{i+1/2}] \times [\varphi_{N_\varphi-1/2}, \varphi_{N_\varphi+1/2}]$, где N_φ – номер узла по φ , попадающего на границу D :

$$y_{\bar{t}t} = \frac{2}{h_r^r r_i} (r_{i+1/2} y_r - r_{i-1/2} y_{\bar{r}})^{(\sigma)} + \frac{2}{r_i^2} y_{\bar{\varphi}\varphi}^{(\sigma)}.$$

Для проверки итерационного алгоритма (получения эталонного решения в отсутствии аналитического) рассмотрим вспомогательную задачу. Вместо условия (6) на внешней границе поставим условие равенства нулю производной решения по r , а радиус внешней области R_2 увеличим, чтобы уменьшить влияние данного граничного условия на решение в исходной области. Таким образом, необходимо решить задачу в области D'_2 радиуса $R'_2 = QR_2$, $Q > 0$ – некоторый коэффициент, с другим граничным условием, которое аппроксимируем интегроинтерполяционным методом, проинтегрировав уравнение Лапласа в ячейке $[r_{N_2-1/2}, r_{N_2}] \times [\varphi_{j-1/2}, \varphi_{j+1/2}]$:

$$-\frac{2r_{N_2-1/2}}{r_{N_2} h_r} y_{\bar{r}}^{(\sigma)} + \frac{1}{r_{N_2}^2} y_{\bar{\varphi}\varphi}^{(\sigma)} = 0,$$

где N_2 – узел, попадающий на границу $\partial D'_2$.

3. Построение разностной схемы. Рассмотрим четыре варианта задачи: пример 1 – одномерная цилиндрически симметричная задача, примеры 2 и 3 – двумерная задача с областью D в виде круга, при этом в примере 2 аналитическое решение известно, а для примера 3 особым способом найдено “эталонное” решение, в примере 4 область D представляет собой половину круга. Во всех расчётах будем использовать $\sigma = 0.5$. Для решения системы линейных алгебраических уравнений используем решатель BiCGStab – стабилизированный метод бисопряжённых градиентов для задач с разреженными матрицами, реализованный в библиотеке Eigen. Для оценки норм ошибок используется равномерная норма.

Пример 1. Пусть R – корень уравнений $J_1(R) = 0$, J_1 – функция Бесселя первого рода, граница области D совпадает с кругом радиуса R , $T = 0.5$ – время протекания процесса. Начальные условия при $r < R$:

$$u(r, \varphi, 0) = J_0(r), \quad u_t(r, \varphi, 0) = 0.$$

Точное решение задаётся выражением

$$u(r, \varphi, t) = \begin{cases} J_0(r) \cos t, & 0 \leq r \leq R; \\ J_0(R) \cos t, & r > R. \end{cases}$$

Для нахождения решения итерационным способом на каждом временном слое воспользуемся разностными схемами, построенными ранее.

Согласно результатам вычислительных экспериментов (табл. 1) разностная схема позволяет получить решение одномерной задачи, при этом наблюдается второй порядок сходимости.

Таблица 1. Сравнение численного решения одномерной задачи (пример 1) с точным. $R_1 = 2R$, $R_2 = 4R$. Начальный шаг $h = (h_r, h_\varphi, \tau) = (0.383171, \pi/4, 0.05)$

Шаг	Относительная ошибка	Отношение ошибок
h	$4.92 \cdot 10^{-3}$	
$h/2$	$7.53 \cdot 10^{-4}$	6.54
$h/4$	$1.88 \cdot 10^{-4}$	3.99
$h/8$	$3.94 \cdot 10^{-5}$	4.78

Рассмотрим влияние положения границы области D_1 на сходимость. Зафиксируем границы областей D , D_2 , а положение ∂D_1 будем менять.

Согласно утверждению 1 должна наблюдаться сходимость со скоростью геометрической прогрессии с коэффициентом q . Тогда число итераций можно оценить по формуле

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln q}, \tag{8}$$

где ε – убывание ошибки, $\|y^s - y^*\|/\|y^0 - y^*\| < \varepsilon$.

На рис. 2 приведены два графика: сплошная линия – график зависимости априорной оценки необходимого числа итераций до сходимости по формуле (8), а точками отмечен результат вычислительных экспериментов. Видим, что качественно и количественно графики близки. График оценки числа итераций мажорирует график результатов вычислительного эксперимента.

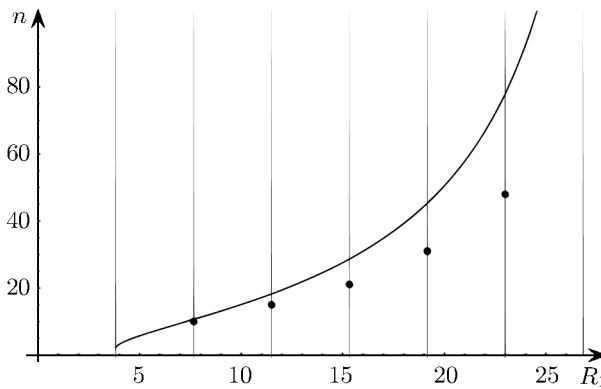


Рис. 2. Зависимость числа итераций от положения границы R_1 при решении одномерной задачи (пример 1) $R_2 = 8R$.

Зависимость коэффициента геометрической прогрессии от R_1 в расчётах вычислим как

$$\log_q 10^{-5} = n(R_1). \tag{9}$$

По результатам, представленным в табл. 2, можно сделать вывод, что погрешность в определении коэффициента q составляет около 10 % и связана с тем, что разностная задача лишь аппроксимирует исходную.

Таблица 2. Сравнение коэффициентов геометрической прогрессии, предсказанных в утверждении 1 и полученных в ходе вычислительных экспериментов

R_1	R	$2R$	$3R$	$4R$	$5R$	$6R$
q согласно утверждению 1	0.338	0.531	0.669	0.775	0.863	0.936
q по (9)	0.316	0.464	0.578	0.690	0.787	0.940

Пример 2. Пусть внутренняя область D имеет форму круга радиуса $R = 2.40483$. Необходимо решить задачу (1) с начальными условиями

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = J_1(r) \sin \varphi.$$

Точное решение задаётся выражением

$$u(r, \varphi, t) = \begin{cases} J_1(r) \sin t \sin \varphi, & 0 \leq r \leq R; \\ 1.24846r^{-1} \sin t \sin \varphi, & r > R. \end{cases}$$

Результаты серии расчётов (табл. 3) показывают, что построенный метод сходится к точному решению в области D_2 со вторым порядком.

Можно предположить, что наихудшая скорость сходимости в двумерном случае должна наблюдаться на задачах типа примера 1, решения которых построены на основной гармонике. Результаты решения примеров 1 и 2 с разным положением границы R_1 это подтверждают (табл. 4).

Таблица 3. Сравнение численного решения двумерной задачи (пример 2) с точным $R_1 = 2R$, $R_2 = 4R$. Начальный шаг $h = (h_r, h_\varphi, \tau) = (0.229031, \pi/16, 0.1)$

Шаг	Относительная ошибка	Отношение ошибок
h	$3.03 \cdot 10^{-3}$	
$h/2$	$7.63 \cdot 10^{-4}$	3.97
$h/4$	$1.92 \cdot 10^{-4}$	3.98
$h/8$	$4.79 \cdot 10^{-5}$	4.00

Таблица 4. Зависимость числа итераций до сходимости от положения границы ∂D_1

R_1	R	$2R$	$3R$	$4R$	$5R$	$6R$
n (пример 1)	6	8	11	14	19	29
n (пример 2)	5	7	8	11	16	29

Пример 3. Пусть внутренняя область D имеет форму круга радиуса $R = 1$. Необходимо решить задачу (1) с начальными условиями

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = r \sin \varphi. \quad (10)$$

В силу того, что аналитическое решение достаточно сложно, воспользуемся методом расширения расчётной области для получения эталонного решения.

Результаты серии расчётов (табл. 6) показывают, что норма отклонения (для двух последовательных значений Q) численного решения в области D_2 уменьшается с увеличением Q , что соответствует ожиданиям. Для вычисления нормы отклонения численного решения использована равномерная норма.

Также проведена серия расчётов (табл. 6), которая демонстрирует, что измельчение сетки позволяет получить более точное решение, но измельчение сетки более чем в 4 раза при неизменном Q не позволяет получить более точного решения.

Таблица 5. Зависимость отклонения решения примера 3 в D_2 от размера расчётной области

Q	Норма отклонения
5	$3.05 \cdot 10^{-3}$
7	$1.69 \cdot 10^{-3}$
8	$1.37 \cdot 10^{-3}$
12	$1.12 \cdot 10^{-3}$

Таблица 6. Зависимость нормы ошибки численного решения примера 3 от шага сетки. $h = (h_r, h_\varphi, \tau) = (0.1, 0.25\pi, 0.1)$ – шаги по пространству и времени, $Q = 5$

Шаг	Норма ошибки
h	$3.26 \cdot 10^{-3}$
$h/2$	$3.05 \cdot 10^{-3}$
$h/4$	$2.78 \cdot 10^{-3}$

Пример 4. Рассмотрим задачу, в которой внутренняя область D имеет форму полукруга радиуса $R = 1$ (рис. 3). В этой области будем решать задачу (1) с начальными условиями (10).

Для данного примера также проблематично записать аналитическое решение и применён метод расширения расчётной области. Результаты расчётов свидетельствуют о том, что ошибка уменьшается с увеличением параметра Q и с уменьшением шагов по времени и пространству (табл. 7 и 8).

Таблица 7. Зависимость отклонения решения в D_2 примера 4 от размера расчётной области

q	Норма отклонения
4	$4.77 \cdot 10^{-3}$
5	$1.92 \cdot 10^{-3}$
7	$1.12 \cdot 10^{-3}$
8	$1.13 \cdot 10^{-3}$

Таблица 8. Зависимость нормы ошибки численного решения примера 4 от шага сетки. $h = (h_r, h_\varphi, \tau) = (0.1, 0.25\pi, 0.1)$ – шаги по пространству и времени, $Q = 5$

Шаг	Норма ошибки
h	$4.77 \cdot 10^{-3}$
$h/2$	$1.92 \cdot 10^{-3}$
$h/4$	$1.77 \cdot 10^{-3}$

Для примеров 3 и 4 получены оценки зависимости числа итераций до сходимости от размера R_1 . Результаты вычислительных экспериментов представлены на рис. 4. Графики для примеров 3 и 4 идентичны. В этих случаях $R = 1$ – радиус внутренней области D , R_1 – радиус дополнительной области D_1 (варьировался), $R_2 = 3$ – радиус внешней области D_2 . С увеличением радиуса дополнительной области количество итераций увеличивается, значит чем ближе эта граница к границе внутренней области, тем выше скорость сходимости.

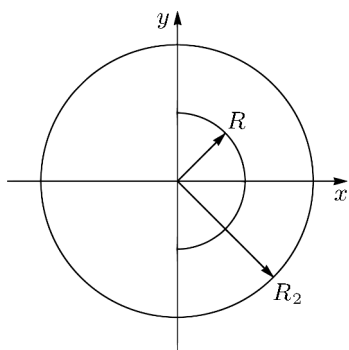


Рис. 3. Структура расчётной области в примере 4.

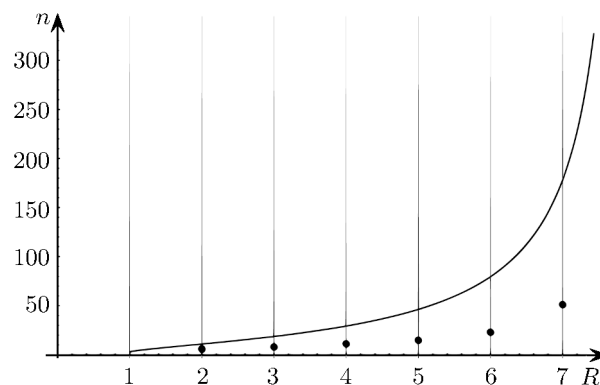


Рис. 4. Графики зависимости числа итераций от положения границы R_1 (для примеров 3 и 4).

Заключение. Разработан алгоритм решения задач для уравнений смешанного типа в неограниченной области в случае, когда в некоторой финитной области процесс описывается уравнением гиперболического (или параболического) типа, а вне – эллиптического. Исследована скорость сходимости построенного вычислительного алгоритма. Проведено сравнение оценки скорости сходимости алгоритма с результатами вычислительных экспериментов в двумерном случае. Данный алгоритм может быть легко обобщён на трёхмерный случай. Даже в двумерном случае вычислительные затраты при применении метода меньше, чем при использовании расширения расчётной области, но могут уступать методу задания интегрального граничного условия. В трёхмерном же случае ожидается, что итерационный метод будет наиболее эффективен среди перечисленных.

Исследование выполнено за счёт Российского научного фонда (грант 22-21-00260).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галанин М.П., Сорокин Д.Л. О решении внешних краевых задач для уравнения Лапласа // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 7. С. 918–926.
2. Галанин М.П., Сорокин Д.Л., Ухова А.Р. Методы численного решения дифференциального уравнения смешанного типа в неограниченной области // Мат. моделирование и численные методы. 2021. № 1. С. 91–109.

3. *Galanin M.P., Sorokin D.L.* Numerical solution tasks with mixed operator in unlimited area // CEUR Workshop Proceedings. 2020. V. 2543. P. 370–376.
4. *Савченко А.О., Ильин В.П., Бутюгин Д.С.* Метод решения внешней трёхмерной краевой задачи для уравнения Лапласа // Сиб. журн. индустр. мат. 2016. Т. 19. № 2. С. 88–99.
5. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., 1972.
6. *Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В.* Лекции по математической физике. М., 1993.
7. *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* Методы численного анализа математических моделей. М., 2010.
8. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. М., 1971.

Институт прикладной математики
имени М.В. Келдыша РАН, г. Москва,
Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана

Поступила в редакцию 18.02.2022 г.
После доработки 18.02.2022 г.
Принята к публикации 25.05.2022 г.