*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 7, с. 947–961*

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

*УДК 519.63+517.957*

# КОМПАКТНЫЕ И МОНОТОННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ОБОБЩЁННОГО УРАВНЕНИЯ ФИШЕРА

**© 2022 г. П. П. Матус, Б. Д. Утебаев**

Для обобщённого уравнения Фишера с нелинейной конвекцией строятся и изучаются на стандартных шаблонах монотонные и компактные разностные схемы $4+1$ и $4+2$ порядков аппроксимации при нестандартных соотношениях на временно́й и пространственный шаг. Получены априорные оценки разностного решения в нелинейном случае на основе установленных двусторонних оценок сеточного решения. Эти результаты обобщаются на двумерное обобщённое уравнение Фишера с нелинейной конвекцией. Проведённый вычислительный эксперимент иллюстрирует эффективность рассматриваемых методов.

DOI: 10.31857/S037406412207007X, EDN: CELASR

**Введение.** Разработка численных методов исследования математических моделей реакционно-диффузионных систем открывает новые возможности для изучения нелинейных явлений в сложных физических, химических, биологических и других системах. К числу таких моделей принадлежит популяционная модель Фишера или Колмогорова–Петровского–Пискунова (КПП) (см. работы [1, 2])

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u(1-u), \tag{1}$$

в которой учитываются основные механизмы, характерные для популяционной динамики. Уравнение Фишера (или КПП) и его модификации встречаются в различных задачах, например, в теории горения, в теории фазовых переходов, в физике плазмы и др. [3]. В книге [4, с. 454] было предложено обобщение уравнения Фишера (обобщённое уравнение Бюргерса–Фишера с нелинейной конвекцией)

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial h(u)}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u(1-u)$$

для учёта различных видов конвективного движения.

В последнее время много усилий было направлено на разработку компактных схем высокого порядка точности, которые используют только узлы сетки, непосредственно примыкающие к центральному узлу. Под *компактными* разностными схемами понимаются разностные схемы повышенных порядков аппроксимации и/или точности, записывающиеся на стандартных для данного уравнения шаблонах [5, с. 11; 6]. В работе [7] построены компактные разностные схемы для уравнений конвекции–диффузии с дивергентными и недивергентными конвективными слагаемыми, которые базируются на использовании экспоненциальных схем. Следует отметить также статью [8], в которой рассматриваются компактные и монотонные разностные схемы $(4+1)$, т.е. четвёртого порядка по пространственной переменной и первого по временно́й для уравнения Фишера (1).

В работе А.А. Самарского [9] предложены безусловно монотонные схемы (нет соотношений между сеточными шагами и коэффициентами уравнения), равномерно сходящиеся со скоростью $O(h^2)$ для эллиптического уравнения второго порядка типа конвекции–диффузии. Идея построения монотонных разностных схем высокого порядка аппроксимации на стандартных шаблонах была развита в статьях В.К. Полевикова [10, 11], в которых построены компактные разностные схемы четвёртого порядка точности при соотношениях на шаги сетки, удовлетворяющих неравенствам $1/\sqrt{5}\leqslant h_1/h_2\leqslant\sqrt{5}$.

Монотонные разностные схемы играют важную роль при математическом моделировании прикладных задач, так как они позволяют получить численные решения без нефизических осцилляций (см. [12–14]). Существует достаточно много определений монотонности [15, с. 169; 16; 17, с. 229]. Наиболее часто используют определение, связанное с выполнением принципа максимума на сеточном уровне [15, с. 169; 18, с. 27; 19]. В линейном случае оно достаточно близко к определению монотонности схемы по Фридрихсу [20], т.е. в канонической форме записи разностного уравнения все коэффициенты неотрицательны, а их сумма равна единице (требование аппроксимации). В нелинейном случае такие схемы позволяют получить не только априорные оценки, но и двусторонние оценки разностного решения для начально-краевых задач для параболических уравнений [21], которые согласованы с аналогичными оценками в дифференциальном случае, полученными О.А. Ладыженской [22, с. 22].

Настоящая работа посвящена построению и исследованию компактных и монотонных разностных схем на стандартных шаблонах для обобщённого уравнения Фишера с нелинейной конвекцией. В п. 1 приводятся вспомогательные результаты, необходимые для дальнейшего исследования разностных схем, в частности, лемма о двусторонних оценок разностного решения и компактные безусловно монотонные схемы четвёртого порядка точности для одномерного стационарного уравнения конвекции–диффузии.

В п. 2 построены компактные и монотонные разностные схемы с $(4+1)$ порядком аппроксимации для обобщённого уравнения Фишера с квазилинейной конвекцией. Доказана монотонность таких схем при нестандартных соотношениях на временно́й и пространственный шаг $\tau \geqslant c_1 h^2$. Получены априорные оценки разностного решения в нелинейном случае на основе установленных двусторонних оценок сеточного решения. Также строятся компактные схемы $(4+2)$. Для реализации нелинейной разностной схемы построен итерационный метод, сохраняющий второй порядок аппроксимации по временно́й переменной при специальном выборе начального приближения. Приведены результаты тестовых расчётов, подтверждающие повышенный порядок точности разностных схем на стандартных шаблонах.

В п. 3 полученные результаты обобщаются на двумерное обобщённое уравнение Фишера с нелинейной конвекцией.

**1. Вспомогательные результаты.**

**1.1. Двусторонние оценки.** Пусть задано начальное число точек – сетка $\bar{\omega}_h$. Окрестностью точки $x$ называется множество $M'(x) = M(x)\backslash x$, $M(x)$ – шаблон. Пусть заданы функции $A(x)$, $B(x,\xi)$, $F(x)$, определённые при $x \in \bar{\omega}_h$ и принимающие вещественные значения. Далее каждой точке $x \in \bar{\omega}_h$ сопоставим одно и только одно уравнение вида [15, с. 226]

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \in M'(x)} B(x,\xi)y(\xi) + F(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \tag{2}$$

называемое канонической формой записи разностной схемы. В соответствии с [15, с. 226] точка $x$ называется граничным узлом сетки, если в ней задано условие Дирихле:

$$y(x) = \mu(x), \quad x \in \gamma_h, \tag{3}$$

где $\gamma_h$ – множество граничных узлов. Отметим, что при аппроксимации граничных условий второго или третьего рода сетка может не содержать граничных узлов, т.е. все точки сетки будут являться только внутренними узлами. Будем предполагать, что выполняются обычные условия положительности коэффициентов:

$$A(x) > 0, \quad B(x,\xi) > 0 \quad \text{для всех} \quad \xi \in M'(x), \tag{4}$$

$$D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in M'(x)} B(x,\xi) > 0 \quad \text{для всех} \quad \xi \in M'(x). \tag{5}$$

В соответствии с монографией А.А. Самарского [15, с. 169] разностные схемы (2), (3), удовлетворяющие условиям (4), (5), будем называть *монотонными*.

В дальнейшем будем пользоваться следующими сеточными нормами:

$$\|\cdot\|_{\bar{C}} = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |\cdot|, \quad \|\cdot\|_{C} = \max_{x \in \omega_h} |\cdot|.$$

Сформулируем основные результаты, позволяющие установить двусторонние оценки сеточного решения через входные данные задачи при незнакоопределённых входных данных задачи $F(x)$.

**Лемма** (см. [16]). *Пусть выполнены условия положительности коэффициентов (4), (5). Тогда максимальное и минимальное значения решения разностной схемы (2) принадлежит интервалу изменения входных данных*

$$\min_{x\in\bar\omega_h}\frac{F(x)}{D(x)} \leqslant y(x) \leqslant \max_{x\in\bar\omega_h}\frac{F(x)}{D(x)}. \tag{6}$$

**Следствие 1** (см. [15, с. 230]). *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда для решения разностной схемы (2) справедлива оценка в сеточном аналоге нормы $C$*

$$\|y\|_C = \max_{x\in\bar\omega_h}|y(x)| \leqslant \|F/D\|_C.$$

**1.2. Компактные и безусловно монотонные схемы четвёртого порядка аппроксимации для одномерного уравнения конвекции–диффузии.** Отметим, что рассматриваемые ниже конечно-разностные методы являются следствием разностных схем, построенных В.К. Полевиковым для двумерного стационарного уравнения конвекции–диффузии в статье [11].

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - r(x)\frac{du}{dx} - q(x)u = -f(x), \quad 0 < x < l, \tag{7}$$

$$u(0) = \mu_1, \quad u(l) = \mu_2, \tag{8}$$

где

$$0 < k_1 \leqslant k(x) \leqslant k_2, \quad |r(x)| \leqslant k_3, \quad q(x) \geqslant 0.$$

Для упрощения дальнейших исследований ниже мы будем использовать следующие обозначения:

$$L^{(k,r)}u = Lu - r(x)\frac{du}{dx}, \quad Lu = \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right).$$

Здесь и далее предполагаем, что решение рассматриваемых дифференциальных задач существует, единственно и обладает всеми непрерывными производными, необходимыми по ходу изложения.

При построении монотонных схем четвёртого порядка точности на трёхточечном шаблоне $(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ с использованием равномерной сетки $\bar\omega_h = \omega_h \bigcup \gamma_h = \{x_i = ih,\ i = \overline{0, N},\ h = 1/N\}$, $\omega_h = \{x_i = ih,\ i = \overline{1, N-1}\}$, $\gamma_h = \{x_0 = 0,\ x_N = l\}$ будем ориентироваться на соотношение [15, с. 170]

$$L^{(k,r)}u \sim \Lambda^{(a,b)}u = \kappa(au_{\bar x})_x - b^+au_{\bar x} - b^-a^{(+1)}u_x$$

с коэффициентами

$$a = 6\left(\frac{1}{k^{(-1)}} + \frac{4}{k^{(-0.5)}} + \frac{1}{k}\right) > 0, \quad b^\pm = \frac{r^\pm}{k} + O(h^4),$$

$$r^+ = 0.5(r + |r|) \geqslant 0, \quad r^- = 0.5(r - |r|) \leqslant 0, \quad \kappa = \frac{1}{1 + R + R^2 + R^3} > 0, \quad R = \frac{h|r|}{2k} > 0. \tag{9}$$

Для аппроксимации коэффициента $k(x)$ используется шаблонный функционал, предложенный А.А. Самарским в работе [23]. Полученная ниже схема не обобщается на квазилинейные уравнения параболического типа ввиду неопределённости коэффициента в точке $k^{(0.5)}$.

Здесь используются стандартные обозначения теории разностных схем (см. [15]):

$$u_{\bar{x}} = \frac{u - u^{(-1)}}{h}, \quad u_x = \frac{u^{(+1)} - u}{h}, \quad u = u(x), \quad u^{(+1)} = u(x+h), \quad u^{(-1)} = u(x-h),$$

$$k = k(x), \quad k^{(0.5)} = k(x+0.5h), \quad k^{(-0.5)} = k(x-0.5h).$$

На равномерной сетке $\bar{\omega}_h$ дифференциальную задачу (7), (8) заменим неконсервативной разностной схемой

$$\tilde{a}\Lambda^{(a,\tilde{b})}y - \tilde{q}y + \tilde{f} = 0, \tag{10}$$

$$y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2, \tag{11}$$

где

$$\Lambda^{(a,\tilde{b})}y = \tilde{\kappa}(ay_{\bar{x}})_x - \tilde{b}^+ay_{\bar{x}} - \tilde{b}^-a^{(+1)}y_x, \quad \tilde{\kappa} = \frac{1}{1+\tilde{R}+\tilde{R}^2+\tilde{R}^3}, \quad \tilde{R} = \frac{h|\tilde{r}|}{2k},$$

$$\tilde{a} = 1 + \frac{h^2}{12}\tilde{p}_1, \quad \tilde{p}_1 = p_1 + \sigma_1, \quad \tilde{b} = \frac{\tilde{r}}{k} + O(h^4), \quad p_1 = \left(\frac{r}{k}\right)^2 + \frac{r}{k^2}\frac{dk}{dx} - 2\frac{d}{dx}\left(\frac{r}{k}\right),$$

$$\tilde{r} = \frac{1}{\tilde{k}}\left(\frac{r}{k} + \frac{h^2}{12}\tilde{p}_2\right), \quad \tilde{p}_2 = \left(p_2 + 2\frac{d}{dx}\left(\frac{q}{k}\right) + \sigma_1\frac{r}{k}\right), \quad p_2 = L^{(k,r)}\left(\frac{r}{k^2}\right),$$

$$\tilde{q} = q + \frac{h^2}{12}\left[L^{(k,r)}\left(\frac{q}{k}\right) + \left(\frac{q}{k}+\sigma_1\right)q\right], \quad \tilde{f} = f + \frac{h^2}{12}\left[L^{(k,r)}\left(\frac{f}{k}\right) + \left(\frac{q}{k}+\sigma_1\right)f\right]. \tag{12}$$

В соответствии с работами [23; 24, с. 70] покажем, что разностная схема (10), (11) имеет порядок аппроксимации $O(h^4)$, т.е. для её невязки

$$\psi = \tilde{a}\Lambda^{(a,\tilde{b})}u - L^{(k,r)}u - \tilde{q}u + \tilde{f} + qu - f$$

имеет место априорная оценка

$$\|\psi\|_C \leqslant Mh^4, \quad M = \mathrm{const} > 0.$$

Разностный оператор $\Lambda^{(a,b)}$ аппроксимирует соответствующий дифференциальный оператор $L^{(k,r)}u$ со вторым порядком. С учётом предположений (9) в отношении коэффициента $a$ справедливы следующие асимптотические разложения:

$$au_{\bar{x}} = k\frac{du}{dx} - \frac{h}{2}Lu + \frac{h^2\sqrt{k}}{6}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}Lu\right) - \frac{h^3}{24}L\left(\frac{1}{k}Lu\right) + O(h^4),$$

$$a^{(+1)}u_x = k\frac{du}{dx} + \frac{h}{2}Lu + \frac{h^2\sqrt{k}}{6}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}Lu\right) + \frac{h^3}{24}L\left(\frac{1}{k}Lu\right) + O(h^4). \tag{13}$$

С помощью разложений (13) приходим к соотношению

$$\Lambda^{(a,b)}u = L^{(k,r)}u + \frac{h^2}{12}L_1u + O(h^4), \tag{14}$$

где

$$L_1u = \left(L\left(\frac{1}{k}Lu\right) - 2\frac{r}{k}\sqrt{k}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}Lu\right)\right).$$

Далее, чтобы избавиться от производных высоких порядков, не поддающихся разностной аппроксимации на минимальном шаблоне, упростим выражение $L_1u$. Так как

$$Lu = L^{(k,r)}u + \frac{r}{k}k\frac{du}{dx},$$

то получим

$$L_1u = L^{(k,r)}\left(\frac{1}{k}L^{(k,r)}u\right) + L^{(k,r)}\left(\frac{r}{k^2}k\frac{du}{dx}\right) +$$

$$+\frac{r}{k}k\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{k}L^{(k,r)}u + \frac{r}{k^2}k\frac{du}{dx}\right) - 2\frac{r}{k}\sqrt{k}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}Lu\right) =$$

$$= L^{(k,r)}\left(\frac{1}{k}L^{(k,r)}u\right) + p_2k\frac{du}{dx} - p_1Lu, \tag{15}$$

где $p_1$, $p_2$ определяются из формул (12).

Подставив в (15) $L^{(k,r)}u = qu - f$ из уравнения (7) и добавив параметр регуляризации $-\sigma_1$, равный тождественно нулю на точном решении $u(x)$, приходим к соотношению

$$L_1u = L^{(k,r)}\left(\frac{1}{k}(qu-f)\right) + p_2k\frac{du}{dx} - p_1Lu - \sigma_1(L^{(k,r)}u - qu + f) =$$

$$= L^{(k,r)}\left(\frac{q}{k}u\right) - p_1Lu + p_2k\frac{du}{dx} - \sigma_1L^{(k,r)}u - (f-qu)\sigma_1 - L^{(k,r)}\left(\frac{f}{k}\right). \tag{16}$$

Так как

$$L^{(k,r)}\left(\frac{q}{k}u\right) = L\left(\frac{q}{k}u\right) - \frac{r}{k}k\frac{d}{dx}\left(\frac{q}{k}u\right) = L^{(k,r)}\left(\frac{q}{k}\right)u + \frac{q}{k}L^{(k,r)}u + 2k\frac{du}{dx}\frac{d}{dx}\left(\frac{q}{k}\right) =$$

$$= L^{(k,r)}\left(\frac{q}{k}\right)u + \frac{q}{k}(q-f) + 2k\frac{du}{dx}\frac{d}{dx}\left(\frac{q}{k}\right),$$

то

$$L_1u = L^{(k,r)}\left(\frac{q}{k}\right)u + \frac{q}{k}(q-f) + 2k\frac{du}{dx}\frac{d}{dx}\left(\frac{q}{k}\right) -$$

$$-p_1Lu + p_2k\frac{du}{dx} - \sigma_1L^{(k,r)}u - (f-qu)\sigma_1 - L^{(k,r)}\left(\frac{f}{k}\right) =$$

$$= -p_1Lu + \left(p_2 + 2\frac{d}{dx}\left(\frac{q}{k}\right)\right)k\frac{du}{dx} - \sigma_1L^{(k,r)}u + \left[L^{(k,r)}\left(\frac{q}{k}\right) + \left(\frac{q}{k}+\sigma_1\right)q\right]u -$$

$$-\left[L^{(k,r)}\left(\frac{f}{k}\right) + \left(\frac{q}{k}+\sigma_1\right)f\right]. \tag{17}$$

С учётом выражений (9), (12), (14) и (17) получим

$$\psi = \tilde a(\Lambda^{(k,\tilde r)}u - L^{(k,\tilde r)}u) + \frac{h^2}{12}\tilde p_1Lu - \frac{h^2}{12}\tilde p_2k\frac{du}{dx} - (\tilde q - q)u + (\tilde f - f) + O(h^4) =$$

$$= \tilde a(\Lambda^{(k,\tilde r)}u - L^{(k,\tilde r)}u) + \frac{h^2}{12}L_1u + O(h^4) = \frac{h^2}{12}\tilde p_1(\Lambda^{(k,\tilde r)}u - L^{(k,\tilde r)}u) + O(h^4) = O(h^4).$$

Параметр регуляризации $\sigma_1 = O(1)$ в выражении (16) будем выбирать из условий $\tilde a \geqslant 1$ и $\tilde q \geqslant 0$, т.е.

$$\sigma_1 = \sigma_1(x) = -\min\left\{p_1, \frac{1}{q}L^{(k,r)}\left(\frac{q}{k}\right)\right\}.$$

Для исследования монотонности разностной схемы (10), (11) запишем её в каноническом виде:

$$C_iy_i = A_iy_{i-1} + B_iy_{i+1} + F_i, \quad i = \overline{1, N-1},$$

$$y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_1,$$

в котором

$$A_i = a_i\left(\frac{\tilde a}{h^2}(\tilde\kappa + h\tilde b^+)\right) > 0, \quad B_i = a_{i+1}\left(\frac{\tilde a}{h^2}(\tilde\kappa - h\tilde b^-)\right) > 0,$$

$$C_i = (a_{i+1}+a_i)\frac{\tilde a\tilde\kappa}{h^2} + \frac{\tilde a}{h}(\tilde b^+ a_i - \tilde b^- a_{i+1}) + \tilde q > 0, \quad F_i = \tilde f, \quad D_i = C_i - A_i - B_i > 0. \tag{18}$$

Так как выполнены все условия положительности коэффициентов (18), то разностная схема (10), (11) является безусловно монотонной.

Итак, согласно сформулированной выше лемме получаем двустороннюю оценку решения разностной схемы (10) при произвольных незнакопостоянных входных данных задачи

$$\min\left\{\mu_1, \mu_2, \min_{1\leqslant i\leqslant N-1}\frac{F_i}{D_i}\right\} \leqslant y_i \leqslant \max\left\{\mu_1, \mu_2, \max_{1\leqslant i\leqslant N-1}\frac{F_i}{D_i}\right\}.$$

Также из следствия 1 получаем, что разностная схема (10) устойчива относительно правой части и граничных условий, и для её решения справедлива априорная оценка

$$\|y\|_{\bar C} \leqslant \max\left\{|\mu_1|, |\mu_2|, \left\|\frac{F_i}{D_i}\right\|_C\right\}.$$

**2. Компактные разностные схемы (4+1) для обобщённого уравнения Фишера с нелинейной конвекцией.** Целью данной работы является исследование компактных и монотонных разностных схем (в смысле отсутствия ограничений типа Куранта на временной шаг), для реализации которых не требуется применение итерационных методов [8]. При построений таких схем на стандартном трёхточечном шаблоне на верхнем слое будем пользоваться разностной схемой (10).

В области $\bar Q_T = \bar\Omega\times[0,T]$, $\bar\Omega = \{0\leqslant x\leqslant l\}$, $\bar\Omega = \Omega\bigcup\Gamma$, $\Gamma$ – граница области, рассмотрим начально краевую задачу для обобщённого уравнения Фишера с нелинейной конвекцией

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h'(u)\frac{\partial u}{\partial x} + u(1-u), \quad 0<x<l, \quad 0<t\leqslant T, \tag{19}$$

с начальным и граничными условиями

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_0(x)\geqslant 0, \quad x\in\bar\Omega, \tag{20}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t)\geqslant 0, \quad u(l,t) = \mu_2(t)\geqslant 0, \quad t\in(0,T], \tag{21}$$

т.е. априори предполагаем неотрицательность входных данных.

Введём стандартные обозначения теории разностных схем [15, с. 260]:

$$v = v_i^n = v(x_i,t_n), \quad \hat v = v_i^{n+1} = v(x_i,t_{n+1}), \quad v_t = \frac{\hat v - v}{\tau}.$$

На равномерной сетке $\bar\omega = \bar\omega_h\times\bar\omega_\tau = \{(x_i,t_n)\in\bar Q_T\}$, $\bar\omega_h = \{x_i = ih,\ i=\overline{0,N},\ hN = l\}$, $\bar\omega_\tau = \{t_n = n\tau,\ n=\overline{0,N_0},\ \tau N_0 = T\}$, $\bar\omega_\tau = \omega_\tau\bigcup\{t_{N_0} = T\}$ дифференциальную задачу (19)–(21) заменим разностной схемой

$$\begin{aligned}(1+\lambda)y_t = \sigma(\kappa\hat y_{\bar xx} - b^+\hat y_{\bar x} - b^-\hat y_x) + (1-\sigma)(\kappa y_{\bar xx} - b^+ y_{\bar x} - b^- y_x) + \\ + \frac{h^2}{12}(\kappa(y-y\hat y)_{\bar xx} - b^+(y-y\hat y)_{\bar x} - b^-(y-y\hat y)_x) + \\ + \tilde a(\tilde\kappa\hat y_{\bar xx} - \tilde b^+\hat y_{\bar x} - \tilde b^-\hat y_x) + (y-y\hat y)(1+\lambda),\end{aligned} \tag{22}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x\in\bar\omega_h \quad \hat y_0 = \mu_1, \quad \hat y_N = \mu_2, \tag{23}$$

где

$$\lambda = \frac{h^2}{12}\sigma_1 \geqslant 0, \quad \sigma = 1 - \frac{h^2}{12\tau},$$

$$\kappa = \frac{1}{1 + R + R^2 + R^3}, \quad R = \frac{h|b|}{2}, \quad \tilde{\kappa} = \frac{1}{1 + \tilde{R} + \tilde{R}^2 + \tilde{R}^3}, \quad \tilde{R} = \frac{h|\tilde{b}|}{2},$$

$$b = b(y) = h'(y_i^n) + O(h^4), \quad b^+ = 0.5(b + |b|) \geqslant 0, \quad b^- = 0.5(b - |b|) \leqslant 0,$$

$$\tilde{b} = \frac{r_2 + \sigma_1 b}{r_1 + \sigma_1}, \quad \tilde{b}^+ = 0.5(\tilde{b} + |\tilde{b}|) \geqslant 0, \quad \tilde{b}^- = 0.5(\tilde{b} - |\tilde{b}|) \leqslant 0,$$

$$r_2 = (b(y))_{\bar{x}x} - b(y)(b(y))_x, \quad \tilde{a} = \frac{h^2}{12}(r_1 + \sigma_1), \quad r_1 = (b(y))^2 - 2(b(y))_x. \tag{24}$$

Параметр регуляризации $\sigma_1$ в выражении (24) будем выбирать из условия $\tilde{a} > 0$, т.е.

$$\sigma_1 = \sigma_1(y_i^n) = \begin{cases} -\min\limits_{\substack{0\leqslant i\leqslant N\\ 1\leqslant n\leqslant N_0}} \{r_1(y(x_i, t_{n-1}))\}, & \text{если} \ \ r_1 < 0, \\ 0, & \text{если} \ \ r_1 > 0. \end{cases}$$

Покажем, что разностная схема (22), (23) имеет четвёртый порядок аппроксимации по пространству и первый по времени, т.е. для её невязки

$$\psi = -(1+\lambda)u_t + \sigma(\kappa\hat{u}_{\bar{x}x} - b^+\hat{u}_{\bar{x}} - b^-\hat{u}_x) + (1-\sigma)(\kappa u_{\bar{x}x} - b^+ u_{\bar{x}} - b^- u_x) +$$
$$+ \frac{h^2}{12}(\kappa(u - u\hat{u})_{\bar{x}x} - b^+(u - u\hat{u})_{\bar{x}} - b^-(u - u\hat{u})_x) +$$
$$+ \tilde{a}(\tilde{\kappa}\hat{u}_{\bar{x}x} - \tilde{b}^+\hat{u}_{\bar{x}} - \tilde{b}^-\hat{u}_x) + (u - u\hat{u})(1+\lambda)$$

имеет место оценка

$$\|\psi\|_C \leqslant M_1(h^4 + \tau), \quad M_1 = \mathrm{const} > 0. \tag{25}$$

С учётом того, что

$$\kappa(u)u_{\bar{x}x} - b^+(u)u_{\bar{x}} - b^-(u)u_x \sim \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h'(u)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{12}Eu + O(h^4),$$

где

$$Eu = \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - h'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right) - \left(\frac{\partial^2 u(1-\hat{u})}{\partial x^2} - h'(u)\frac{\partial}{\partial x}(u(1-\hat{u}))\right) -$$
$$- \left(\left((h'(u))^2 - 2\frac{\partial}{\partial x}h'(u)\right)\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}h'(u) + h'(u)\frac{\partial}{\partial x}h'(u)\right)\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\right) -$$
$$- \sigma_1\left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} - h'(u)\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + u(1-\hat{u}) - \frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

и

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - h'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \sim \kappa u_{\bar{x}xt} - b^+ u_{\bar{x}t} - b^- u_{xt},$$

$$\frac{\partial^2 u(1-\hat{u})}{\partial x^2} - h'(u)\frac{\partial}{\partial x}(u(1-\hat{u})) \sim \kappa(u(1-\hat{u}))_{\bar{x}x} - b^+(u(1-\hat{u}))_{\bar{x}} - b^-(u(1-\hat{u}))_x,$$

$$\left((h'(u))^2 - 2\frac{\partial}{\partial x}h'(u)\right)\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}h'(u) + h'(u)\frac{\partial}{\partial x}h'(u)\right)\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} +$$
$$+ \sigma_1\left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} - h'(u)\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}\right) \sim \tilde{a}(u)(\tilde{\kappa}(u)\hat{u}_{\bar{x}x} - \tilde{b}^+(u)\hat{u}_{\bar{x}} - \tilde{b}^-(u)\hat{u}_x),$$

приходим к оценке (25).

**2.1. Двусторонняя оценка.** Для получения априорных оценок сеточного решения запишем разностную схему (22) в каноническом виде:

$$C_i y_i^{n+1} = A_i y_{i-1}^{n+1} + B_i y_{i+1}^{n+1} + F_i^n, \quad i = \overline{1, N-1},$$

в котором

$$A_i = \frac{\tau}{h^2}\left[\left(1 - \frac{h^2}{12\tau} - \frac{h^2}{12} y_{i-1}^n\right)(\kappa + hb^+) + \tilde{a}_i(\tilde{\kappa} + h\tilde{b}^+)\right],$$

$$B_i = \frac{\tau}{h^2}\left[\left(1 - \frac{h^2}{12\tau} - \frac{h^2}{12} y_{i+1}^n\right)(\kappa - hb^-) + \tilde{a}_i(\tilde{\kappa} - h\tilde{b}^-)\right],$$

$$C_i = \frac{\tau}{h^2}\left[\left(1 - \frac{h^2}{12\tau} - \frac{h^2}{12} y_i^n\right)(\kappa + hb^+) + \tilde{a}_i(\tilde{\kappa} + h\tilde{b}^+)\right] +$$

$$+ \frac{\tau}{h^2}\left[\left(1 - \frac{h^2}{12\tau} - \frac{h^2}{12} y_i^n\right)(\kappa - hb^-) + \tilde{a}_i(\tilde{\kappa} - h\tilde{b}^-)\right] + (1+\lambda)(1 + \tau y_i^n),$$

$$F_i = \frac{1}{12}(\kappa + hb^+)(1+\tau) y_{i-1}^n + \frac{1}{12}(\kappa - hb^-)(1+\tau) y_{i+1}^n +$$

$$+ (1+\tau)\left[(1+\lambda) - \frac{1}{12}(\kappa + hb^+) - \frac{1}{12}(\kappa - hb^-)\right] y_i^n.$$

Пусть

$$m_1 = \min_{(x,t)\in\overline{Q}_T} \{\min\{\mu_1(t), \mu_2(t)\}, u_0(x)\}, \quad m_2 = \max_{(x,t)\in\overline{Q}_T} \{\max\{\mu_1(t), \mu_2(t)\}, u_0(x)\}.$$

Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Пусть выполнены следующие условия:*

$$h < h_0, \quad h_0^2 = \frac{12}{m_2} e^T, \quad \tau > \tau_0, \quad \tau_0 = \frac{h^2}{12 - h^2 e^T m_2}. \tag{26}$$

*Тогда разностное решение $y(x,t)$, $(x,t) \in \bar{\omega}$, неотрицательно и для всех $i = \overline{0, N}$, $k = \overline{0, N_0}$ имеет место двусторонняя оценка*

$$0 \leqslant y_i^k \leqslant e^{t_k} m_2. \tag{27}$$

**Доказательство.** Очевидно, что $0 \leqslant m_1 \leqslant y_i^0 = u_0(x_i) \leqslant m_2$. По индукции предполагаем, что оценка (27) имеет место для всех $k = \overline{1, n}$. Докажем теперь справедливость этих неравенств и для $k = n+1$. Действительно, в силу условий теоремы (26) и предположения индукции

$$A_i^n \geqslant r - \frac{\tau}{12} \max_{1\leqslant i\leqslant N-1} y_i^n \geqslant r - \frac{\tau m_2}{12} e^{\lambda t_n} > 0, \quad r = \frac{\tau}{h^2} - \frac{1}{12},$$

$$B_i^n > 0, \quad C_i^n > 0, \quad D_i^n > 0, \quad i = \overline{1, N-1}.$$

В соответствии с двусторонней оценкой (6) имеет место неравенство

$$m_1^{n+1} \leqslant y_i^{n+1} \leqslant m_2^{n+1},$$

где

$$m_1^{n+1} = \min_{0<i<N} \frac{F_i^n}{D_i^n} \geqslant 0, \quad m_2^{n+1} = \max_{0<i<N} \frac{F_i^n}{D_i^n} \geqslant 0.$$

Заметим, что
$$\max_i \frac{F_i^n}{D_i^n} \leqslant \frac{(1+\tau)\max y_i^n}{1+\tau\min y_i^n} \leqslant e^{\tau}\max_i y_i^n.$$
Следовательно,
$$y_i^{n+1} \leqslant \max\{m_2^{n+1}, e^{\tau}\max y_i^n\} \leqslant m_2 e^{t_{n+1}}.$$
Теорема доказана.

**Следствие 2.** *Для решения разностной схемы (22), (23) имеет место априорная оценка*
$$\|y^n\|_{\overline{C}} \leqslant m_2 e^{t_n}, \quad n = \overline{0, N_0}.$$

**2.2. Вычислительный эксперимент.** Чтобы продемонстрировать точность настоящего метода, рассмотрим уравнение
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u), \tag{28}$$
сочетающее механизмы реакции, конвекции и диффузии, с начальным и граничными условиями
$$u(x,0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{th}\left(\frac{x}{4}\right),$$
$$u(0,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{th}\left(\frac{5t}{8}\right), \quad u(l,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{th}\left(\frac{5t}{8} - \frac{l}{4}\right). \tag{29}$$
Это уравнение известно как уравнение Бюргерса–Фишера из-за свойств конвективного явления от уравнения Бюргерса и характеристики диффузионного переноса и реакции типа уравнения Фишера. Соответствующее точное решение этого уравнения имеет следующий вид [25]:
$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{th}\left(\frac{5t}{8} - \frac{x}{4}\right).$$

Для определения порядка скорости сходимости по времен́ной и пространственной переменным (4+1) в нормах $L_\infty = C$ и $L_2$ воспользуемся правилом Рунге
$$p^h_{L_\infty(L_2)} = \log_2\frac{\|z(2h,\tau)\|_{L_\infty(L_2)}}{\|z(h,\tau)\|_{L_\infty(L_2)}}, \quad p^\tau_{L_\infty(L_2)} = \log_2\frac{\|z(h,2\tau)\|_{L_\infty(L_2)}}{\|z(h,\tau)\|_{L_\infty(L_2)}}. \tag{30}$$

Для проверки скорости сходимости вдоль пространственного и времен́ного направлений выберем шаги $h$ и $\tau$ так, чтобы выполнялись условия $h^4 \geqslant \tau$ для определения порядка скорости сходимости разностного решения по пространственной переменной $p^h_\infty$ и $\tau \geqslant h^4$ для определения порядка скорости сходимости сеточного решения по времен́ной переменной $p^\tau_\infty$ (см. [8]).

В табл. 1, 2 приведены порядки скорости сходимости по пространственному и времен́ому направлениям в нормах $L_\infty$ и $L_2$. Величины, представленные в таблицах, соответствуют моменту времени $T = 1$.

**Таблица 1.** Скорость сходимости по пространственному направлению в нормах $L_\infty$ и $L_2$

| $h = 0.1$ | $\tau$ | $\|z\|_{L_\infty}$ | $p^h_\infty$ | $\|z\|_{L_2}$ | $p^h_{L_2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h$ | $\tau$ | 0.00202609 | – | 0.00148301 | – |
| $h/2$ | $\tau/2^4$ | 0.00012658 | 3.99714 | 9.21E-05 | 4.00917 |
| $h/4$ | $\tau/4^4$ | 7.70E-06 | 4.03757 | 5.60E-06 | 4.03892 |
| $h/8$ | $\tau/8^4$ | 2.75E-07 | 4.80735 | 1.97E-07 | 4.82915 |

**Таблица 2.** Скорость сходимости по временно́му направлению в нормах $L_\infty$ и $L_2$ $(h = 0.001)$

| $\tau = 0.1$ | $\|z\|_{L_\infty}$ | $p_\infty^\tau$ | $\|z\|_{L_2}$ | $p_{L_2}^\tau$ |
|---|---|---|---|---|
| $\tau$ | 0.00203821 | – | 0.00148323 | – |
| $\tau/2$ | 0.00101756 | 0.99716 | 0.00074039 | 1.00233 |
| $\tau/4$ | 0.00050808 | 0.99145 | 0.00036966 | 1.00214 |
| $\tau/8$ | 0.00025383 | 1.00569 | 0.00018467 | 1.00125 |

Из результатов, представленных в табл. 1, 2, видно, что указанная разностная схема имеет четвёртый порядок аппроксимации по пространству и первый по времени.

**2.3. Компактные разностные схемы $(4+2)$ для обобщённого уравнения Фишера с нелинейной конвекцией.** В данном пункте строятся компактные схемы $(4+2)$. Для реализации нелинейной разностной схемы построен итерационный метод, сохраняющий второй порядок аппроксимации по временно́й переменной при специальном выборе начального приближения.

В области $\bar{Q}_T$ рассмотрим начально краевую задачу для обобщённого уравнения Фишера с нелинейной конвекцией (19)–(21).

На равномерной сетке $\bar{\omega}$ дифференциальную задачу (19)–(21) заменим разностной схемой

$$\begin{gathered}(1+\lambda)y_t = \sigma(\kappa\hat{y}_{\bar{x}x} - b^+\hat{y}_{\bar{x}} - b^-\hat{y}_x) + (1-\sigma)(\kappa y_{\bar{x}x} - b^+ y_{\bar{x}} - b^- y_x) + \\ + \frac{h^2}{12}(\kappa(y^{(0.5)} - y\hat{y})_{\bar{x}x} - b^+(y^{(0.5)} - y\hat{y})_{\bar{x}} - b^-(y^{(0.5)} - y\hat{y})_x) + \\ + \tilde{a}(\tilde{\kappa}(y^{(0.5)})_{\bar{x}x} - \tilde{b}^+(y^{(0.5)})_{\bar{x}} - \tilde{b}^-(y^{(0.5)})_x) + (y^{(0.5)} - y\hat{y})(1+\lambda),\end{gathered} \tag{31}$$

где

$$\lambda = \frac{h^2}{12}\sigma_2 \geqslant 0, \quad \sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}, \quad y^{(0.5)} = \frac{\hat{y}+y}{2},$$

$$\kappa = \frac{1}{1+R+R^2+R^3}, \quad R = \frac{h|b|}{2}, \quad \tilde{\kappa} = \frac{1}{1+\tilde{R}+\tilde{R}^2+\tilde{R}^3}, \quad \tilde{R} = \frac{h|\tilde{b}|}{2},$$

$$b = b(y) = \frac{h'(\hat{y}) + h'(y)}{2}, \quad b^+ = 0.5(b+|b|) \geqslant 0, \quad b^- = 0.5(b-|b|) \leqslant 0,$$

$$\tilde{b} = \frac{r_2 + \sigma_2 b}{r_1 + \sigma_2}, \quad \tilde{b}^+ = 0.5(\tilde{b}+|\tilde{b}|) \geqslant 0, \quad \tilde{b}^- = 0.5(\tilde{b}-|\tilde{b}|) \leqslant 0,$$

$$r_2 = (b(y))_{\bar{x}x} - b(y)(b(y))_x, \quad \tilde{a} = \frac{h^2}{12}(r_1+\sigma_2), \quad r_1 = b(y)^2 - 2(b(y))_x.$$

Здесь параметр регуляризации $\sigma_2 = \sigma_2(y)$ определяется из условия $\tilde{a} > 0$.

Разностная схема (31) является нелинейной. Для её реализации можно использовать следующий итерационный метод:

$$\begin{gathered}(1+\overset{k}{\lambda})\frac{\overset{k+1}{\hat{y}} - y}{\tau} = \sigma(\overset{k}{\kappa}\overset{k+1}{\hat{y}}_{\bar{x}x} - \overset{k}{b^+}\overset{k+1}{\hat{y}}_{\bar{x}} - \overset{k}{b^-}\overset{k+1}{\hat{y}}_x) + (1-\sigma)(\kappa y_{\bar{x}x} - b^+ y_{\bar{x}} - b^- y_x) + \\ + \frac{h^2}{12}\left(\overset{k}{\kappa}\left(\frac{\overset{k}{\hat{y}}+y}{2} - y\overset{k+1}{\hat{y}}\right)_{\bar{x}x} - \overset{k}{b^+}\left(\frac{\overset{k}{\hat{y}}+y}{2} - y\overset{k+1}{\hat{y}}\right)_{\bar{x}} - \overset{k}{b^-}\left(\frac{\overset{k}{\hat{y}}+y}{2} - y\overset{k+1}{\hat{y}}\right)_x\right) + \\ + \overset{k}{\tilde{a}}\left(\overset{k}{\tilde{\kappa}}\left(\frac{\overset{k+1}{\hat{y}}+y}{2}\right)_{\bar{x}x} - \overset{k}{\tilde{b}^+}\left(\frac{\overset{k+1}{\hat{y}}+y}{2}\right)_{\bar{x}} - \overset{k}{\tilde{b}^-}\left(\frac{\overset{k+1}{\hat{y}}+y}{2}\right)_x\right) + \left(\frac{\overset{k}{\hat{y}}+y}{2} - y\overset{k+1}{\hat{y}}\right)(1+\overset{k}{\lambda}),\end{gathered}$$

с выбором начального приближения

$$\overset{0}{y}{}_i^{n+1} = \begin{cases} \mu_1(t_{n+1}), & i = 0, \\ 2y_i^n - y_i^{n-1}, & i = \overline{1, N-1}, \\ \mu_2(t_{n+1}), & i = N. \end{cases}$$

Так как начальное приближение использует два слоя, то нам нужно предварительно найти решение также и на первом слое. Для этого используем дифференциальное уравнение (19) при $t = 0$, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x), \quad u_1(x) = u_0'' - h'(u_0)u_0' + u_0(1 - u_0).$$

Аппроксимировав его с порядком $O(\tau^2)$ относительно точки $n + 1/2$, получим

$$y^1 = y^0 + \tau u_1(x).$$

Аналогично рассмотренному выше случаю легко показать, что для погрешности аппроксимации разностной схемы (31) имеет место оценка

$$\|\psi\|_C \leqslant M_2(h^4 + \tau^2), \quad M_2 = \mathrm{const} > 0.$$

**2.4. Вычислительный эксперимент.** Рассмотрим уравнение Бюргерса–Фишера (28) с начальным и граничными условиями (29).

При расчёте по итерационной схеме потребуем выполнения условия

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant N} |\overset{(k+1)}{y}{}_i^{n+1} - \overset{(k)}{y}{}_i^{n+1}| \leqslant \varepsilon, \quad \varepsilon = 10^{-9},$$

где $k$ – номер итерации, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Для определения порядка скорости сходимости по временнóй и пространственной переменным $(4+2)$ в нормах $L_\infty = C$ и $L_2$ воспользуемся правилом Рунге (30).

В табл. 3, 4 приведены порядки скорости сходимости по пространственному и временнóму направлениям в нормах $L_\infty$ и $L_2$.

**Таблица 3.** Скорость сходимости по пространственному направлению в нормах $L_\infty$ и $L_2$

| $h = 0.1$ | $\tau = 0.01$ | $\|z\|_{L_\infty}$ | $p_\infty^h$ | $\|z\|_{L_2}$ | $p_{L_2}^h$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $h$ | $\tau$ | 6.96E-05 | – | 7.38E-05 | – | 6 |
| $h/2$ | $\tau/2^2$ | 4.98E-06 | 3.80658 | 5.23E-06 | 3.81834 | 4 |
| $h/4$ | $\tau/4^2$ | 3.20E-07 | 3.95658 | 3.36E-07 | 3.95920 | 3 |
| $h/8$ | $\tau/8^2$ | 2.02E-08 | 3.98687 | 2.12E-08 | 3.98745 | 2 |
| $h/16$ | $\tau/16^2$ | 1.26E-09 | 3.99809 | 1.32E-09 | 3.99840 | 2 |

**Таблица 4.** Скорость сходимости по временнóму направлению в нормах $L_\infty$ и $L_2$ $(h = 0.001)$

| $\tau = 0.1$ | $\|z\|_{L_\infty}$ | $p_\infty^\tau$ | $\|z\|_{L_2}$ | $p_{L_2}^\tau$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\tau$ | 6.96E-05 | – | 7.38E-05 | – | 6 |
| $\tau/2$ | 1.90E-05 | 1.86749 | 2.01E-05 | 1.87559 | 5 |
| $\tau/4$ | 4.98E-06 | 1.93923 | 5.23E-06 | 1.94311 | 4 |
| $\tau/8$ | 1.27E-06 | 1.97088 | 1.33E-06 | 1.97267 | 3 |
| $\tau/16$ | 3.20E-07 | 1.98591 | 3.36E-07 | 1.98680 | 3 |

**3. Компактные разностные схемы $(4+1)$ для двумерного обобщённого уравнения Фишера с нелинейной конвекцией.** Далее построим монотонные и компактные разностные схемы с $4+1$ порядком аппроксимации на 9-точечном шаблоне для двумерного обобщённого уравнения Фишера с нелинейной конвекцией.

Пусть в области $\bar{Q}_T = \{(x,t) : x \in \bar{\Omega},\ \ 0 \leqslant t \leqslant T\}$, $x = (x_1, x_2)$, $\bar{\Omega} = \{0 \leqslant x_\alpha \leqslant l_\alpha,$ $\alpha = 1,2\}$, $\bar{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega$, где $\partial\Omega$ – граница, требуется найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую начально-краевой задаче для двумерного обобщённого уравнения Фишера с нелинейной конвекцией

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - {h'}_\alpha(u)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + u(1-u), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T], \tag{32}$$

с граничными условиями Дирихле

$$u(x,t) = \mu(x,t), \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T] \tag{33}$$

и начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{34}$$

В области $\bar{Q}_T$ рассмотрим равномерную сетку $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$, где

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, \ \ n = \overline{0, N_0}, \ \ \tau = T/N_0, \ \ \bar{\omega}_h = \omega_h \bigcup \gamma_h\},$$

множество внутренних узлов пространственной сетки определяется соотношением

$$\omega_h = \{x = (x_1^{i_1}, x_2^{i_2}), \ \ x_\alpha^{i_\alpha} = i_\alpha h_\alpha, \ \ i_\alpha = \overline{1, N_\alpha - 1}, \ \ h_\alpha N_\alpha = l_\alpha, \ \ \alpha = 1,2\},$$

через $\gamma_h$ обозначено множество её граничных узлов. На сетке $\bar{\omega}$ дифференциальную задачу (32)–(34) аппроксимируем разностной схемой

$$(1+\lambda)y_t = \sum_{\alpha=1}^{2}(\Lambda_\alpha^{(b)}\sigma_\alpha\hat{y} + \Lambda_\alpha^{(b)}(1-\sigma_\alpha)y) + \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha^{(b)}\Lambda_{3-\alpha}^{(b)}\hat{y} +$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\sigma_0^* h^2}{12}\Lambda_\alpha^{(b)}\hat{y} + \tilde{a}_\alpha\Lambda_\alpha^{(\tilde{b})}\hat{y} + \frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha^{(b)}y(1-\hat{y})\right) + (1+\lambda)y(1-\hat{y}), \tag{35}$$

$$y(x,t) = \mu(x,t), \quad x \in \gamma_h, \quad t \in \omega_\tau, \quad (x,t) \in \omega_h \times \omega_\tau,$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \tag{36}$$

где

$$\lambda = \frac{h^2}{12}(\sigma_0^* + \sigma_1^*), \quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2, \quad \sigma_\alpha = 1 - \frac{h_\alpha^2}{12\tau},$$

$$\Lambda_\alpha^{(b)}y = \kappa_\alpha y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - b_\alpha^+(y)y_{\bar{x}_\alpha} - b_\alpha^-(y)y_{x_\alpha}, \quad \Lambda_\alpha^{(b)}y\hat{y} = \kappa_\alpha(y\hat{y})_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - b_\alpha^+(y)(y\hat{y})_{\bar{x}_\alpha} - b_\alpha^-(y)(y\hat{y})_{x_\alpha},$$

$$\Lambda_\alpha^{(b)}\hat{y} = \kappa_\alpha\hat{y}_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - b_\alpha^+(y)\hat{y}_{\bar{x}_\alpha} - b_\alpha^-(y)\hat{y}_{x_\alpha}, \quad \kappa_\alpha = \frac{1}{1+R_\alpha+R_\alpha^2+R_\alpha^3}, \quad R_\alpha = \frac{h_\alpha|b_\alpha|}{2},$$

$$\Lambda_\alpha^{(\tilde{b})}\hat{y} = \tilde{\kappa}_\alpha\hat{y}_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - \tilde{b}_\alpha^+(y)\hat{y}_{\bar{x}_\alpha} - \tilde{b}_\alpha^-(y)\hat{y}_{x_\alpha}, \quad \tilde{\kappa}_\alpha = \frac{1}{1+\tilde{R}_\alpha+\tilde{R}_\alpha^2+\tilde{R}_\alpha^3}, \quad \tilde{R}_\alpha = \frac{h_\alpha|\tilde{b}_\alpha|}{2},$$

$$\Lambda_\alpha^{(b)}\Lambda_{3-\alpha}^{(b)} = \kappa_\alpha(\kappa_{3-\alpha}\hat{y}_{\bar{x}_{3-\alpha}x_{3-\alpha}} - b_{3-\alpha}^+(y)\hat{y}_{\bar{x}_{3-\alpha}} - b_{3-\alpha}^-(y)\hat{y}_{x_{3-\alpha}}) -$$

$$- b_\alpha^+(y)(\kappa_{3-\alpha}\hat{y}_{\bar{x}_{3-\alpha}x_{3-\alpha}} - b_{3-\alpha}^+(y)\hat{y}_{\bar{x}_{3-\alpha}} - b_{3-\alpha}^-(y)\hat{y}_{x_{3-\alpha}}) -$$

$$- b_\alpha^-(y)(\kappa_{3-\alpha}\hat{y}_{\bar{x}_{3-\alpha}x_{3-\alpha}} - b_{3-\alpha}^+(y)\hat{y}_{\bar{x}_{3-\alpha}} - b_{3-\alpha}^-(y)\hat{y}_{x_{3-\alpha}}),$$

$$\tilde{a}_\alpha = \frac{h^2}{12}\left(\frac{h_\alpha^2}{h^2} r_{1\alpha} + \sigma_1^*\right), \quad r_{1\alpha} = b_\alpha^2 - 2(b_\alpha)_{x_\alpha},$$

$$\tilde{b}_\alpha = \frac{h^2}{12\tilde{a}}(r_{2\alpha} + b\sigma_1^*), \quad r_{2\alpha} = \Lambda_\alpha^{(b)}(b_\alpha), \quad b = {h'}_\alpha(y_{i_1 i_2}^n).$$

Параметр регуляризации $\sigma_1^*$ будем выбирать из условия $\tilde{a}_\alpha > 0$, т.е.

$$\sigma_1^* = \sigma_1^*(y_{i_1 i_2}^n) = \begin{cases} -\min\limits_\alpha\{r_{1\alpha}\}, & \text{если } \ r_{1\alpha} < 0, \\ 0, & \text{если } \ r_{1\alpha} > 0. \end{cases}$$

В соответствии с работами [23; 24, с. 70] нетрудно показать, что разностная схема (35), (36) аппроксимирует исходную задачу (32)–(34) четвёртым порядком по пространству и первым по времени, т.е. для её невязки

$$\psi = -(1+\lambda)u_t + \sum_{\alpha=1}^2 (\Lambda_\alpha^{(b)}\sigma_\alpha \hat{u} + \Lambda_\alpha^{(b)}(1-\sigma_\alpha)u) + \sum_{\alpha=1}^2 \frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha^{(b)}\Lambda_{3-\alpha}^{(b)}\hat{u} +$$

$$+\sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\sigma_0^* h^2}{12}\Lambda_\alpha^{(b)}\hat{u} + \tilde{a}_\alpha \Lambda_\alpha^{(\tilde{b})}\hat{u} + \frac{h_\alpha^2}{12}\Lambda_\alpha^{(b)} u(1-\hat{u})\right) + (1+\lambda)u(1-\hat{u})$$

имеет место априорная оценка

$$\|\psi\|_C \leqslant M_3(|h|^4 + \tau), \quad M_3 = \mathrm{const} > 0.$$

Для применения принципа максимума разностную схему (36) приведём к каноническому виду (2) и проверим достаточные условия на коэффициенты (4), (5). После элементарных преобразований находим

$$A = (1+\lambda)(1+\tau y_{ij}^n) + \tau\sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{h_\alpha^2}\left[\left(\sigma_\alpha - \frac{h_\alpha^2}{12}y_{ij}^n + \frac{h^2}{12}\sigma_0^*\right)\theta_\alpha + \tilde{a}_\alpha\tilde{\theta}_\alpha - \frac{\theta_\alpha\theta_{3-\alpha}h_\alpha^2}{12h_{3-\alpha}^2}\right],$$

$$B_1 = \frac{\tau}{h_1^2}\left(\left(\sigma_1 - \frac{h_1^2}{12}y_{i-1j}^n\right)\xi_1 + \tilde{a}_1\tilde{\xi}_1\right) + \tau\xi_1\left(\frac{h^2}{12h_1^2}\sigma_0^* - \frac{1}{12h_2^2}\theta_2^{(-1_1)} - \frac{1}{12h_1^2}\theta_2\right),$$

$$B_2 = \frac{\tau}{h_1^2}\left(\left(\sigma_1 - \frac{h_1^2}{12}y_{i+1j}^n\right)\eta_1 + \tilde{a}_1\tilde{\eta}_1\right) + \tau\eta_1\left(\frac{h^2}{12h_1^2}\sigma_0^* - \frac{1}{12h_2^2}\theta_2^{(+1_1)} - \frac{1}{12h_1^2}\theta_2\right),$$

$$B_3 = \frac{\tau}{h_2^2}\left(\left(\sigma_2 - \frac{h_2^2}{12}y_{ij-1}^n\right)\xi_2 + \tilde{a}_2\tilde{\xi}_2\right) + \tau\xi_2\left(\frac{h^2}{12h_2^2}\sigma_0^* - \frac{1}{12h_2^2}\theta_1 - \frac{1}{12h_1^2}\theta_1^{(-1_2)}\right),$$

$$B_4 = \frac{\tau}{h_2^2}\left(\left(\sigma_2 - \frac{h_2^2}{12}y_{ij+1}^n\right)\eta_2 + \tilde{a}_2\tilde{\eta}_2\right) + \tau\eta_2\left(\frac{h^2}{12h_2^2}\sigma_0^* - \frac{1}{12h_2^2}\theta_1 - \frac{1}{12h_1^2}\theta_1^{(+1_2)}\right),$$

$$B_5 = \frac{\tau}{12h_2^2}\xi_1\xi_2^{-1_1} + \frac{\tau}{12h_1^2}\xi_1^{-1_2}\xi_2 > 0, \quad B_6 = \frac{\tau}{12h_2^2}\eta_1\xi_2^{+1_1} + \frac{\tau}{12h_1^2}\eta_1^{-1_2}\xi_2 > 0,$$

$$B_7 = \frac{\tau}{12h_2^2}\xi_1\eta_2^{-1_1} + \frac{\tau}{12h_1^2}\xi_1^{+1_2}\eta_2 > 0, \quad B_8 = \frac{\tau}{12h_2^2}\eta_1\eta_2^{+1_1} + \frac{\tau}{12h_1^2}\eta_1^{+1_2}\eta_2 > 0,$$

$$F = (1+\tau)\left[\left(1 + \lambda - \frac{1}{12}(\theta_1+\theta_2)\right)y_{ij}^n + \xi_1 y_{i-1j}^n + \eta_1 y_{i+1j}^n + \xi_2 y_{ij-1}^n + \eta_2 y_{ij+1}^n\right],$$

$$D = (1+\lambda)(1+\tau y_{ij}^n) + \frac{\tau}{12}(\xi_1 y_{i-1j}^n + \eta_1 y_{i+1j}^n + \xi_2 y_{ij-1}^n + \eta_2 y_{ij+1}^n - (\theta_1+\theta_2)y_{ij}^n),$$

где

$$\theta_\alpha = 2\kappa_\alpha + h_\alpha b_\alpha^+ - h_\alpha b_\alpha^-, \quad \tilde\theta_\alpha = 2\tilde\kappa_\alpha + h_\alpha \tilde b_\alpha^+ - h_\alpha \tilde b_\alpha^-,$$

$$\xi_\alpha = \kappa_\alpha + h_\alpha b_\alpha^+, \quad \tilde\xi_\alpha = \tilde\kappa_\alpha + h_\alpha \tilde b_\alpha^+, \quad \eta_\alpha = \kappa_\alpha - h_\alpha b_\alpha^-, \quad \tilde\eta_\alpha = \tilde\kappa_\alpha - h_\alpha \tilde b_\alpha^-.$$

Параметр регуляризации $\sigma_0^*$ выбираем из условия неотрицательности коэффициентов $B_\alpha$, $\alpha = \overline{1,4}$ (см. работы [10, 11]), т.е.

$$\sigma_0^* \geqslant \max_\alpha \{2/h_\alpha^2\}, \quad \frac{1}{\sqrt5} \leqslant \frac{h_1}{h_2} \leqslant \sqrt5. \tag{37}$$

Итак, имеет место следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия (37) и*

$$\max_{\alpha=1,2}\{h_\alpha\} < h_0, \quad h_0^2 = \frac{12}{m_3}e^T, \quad \tau > \tau_0, \quad \tau_0 = \max_{\alpha=1,2}\left\{\frac{h_\alpha^2}{12 - h_\alpha^2 e^T m_3}\right\}.$$

*Тогда разностное решение $y(x,t)$, $(x,t)\in\bar\omega$, неотрицательно и для всех $i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}$, $\alpha = 1,2$, $k = \overline{0, N_0}$ имеет место двусторонняя оценка*

$$0 \leqslant y_{i_1 i_2}^k \leqslant e^{t_k} m_3,$$

*где* $m_3 = \max\limits_{(x,t)\in Q_T}\{\max\{\mu_1(t),\mu_2(t),\mu_3(t),\mu_4(t)\}, u_0(x)\}$.

**Замечание.** При выполнении условий теоремы 2 разностная схема (35) является монотонной.

**Следствие 3.** *Для решения разностной схемы (35), (36) имеет место априорная оценка*

$$\|y^n\|_{\overline{C}} \leqslant m_3 e^{t_n}, \quad n = \overline{0, N_0}.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fisher R.A.* The wave of advance of advantageous genes // Ann. Hum. Genetic. 1937. V. 7. № 4. P. 353–369.
2. *Kolmogorov A.N., Petrovskii I.G., Piskunov N.S.* A study of the equation of diffusion with increase in the quantity of matter, and its application to a biological problem // Moscow University Mathematics Bull. 1937. V. 1. P. 1–26.
3. *Шаповалов А.В., Трифонов А.Ю.* Метод разложения Адомиана для одномерного нелокального уравнения Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова // Изв. вузов. Физика. 2019. Т. 62. № 4. С. 135–143.
4. *Murray J.D.* Mathematical Biology: I. An Introduction. New York, 2002.
5. *Толстых А.И.* Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М., 1990.
6. *Матус П.П., Хоанг Тхи Киеу Ань.* Компактные разностные схемы на трёхточечном шаблоне для гиперболических уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 7. С. 963–975.
7. *Утебаев Б.Д.* Компактные разностные схемы для уравнений конвекции–диффузии // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2021. Т. 57. № 3. С. 311–318.
8. *Матус П.П., Утебаев Б.Д.* Компактные и монотонные разностные схемы для параболических уравнений // Мат. моделирование. 2021. Т. 33. № 4. С. 60–78.
9. *Самарский А.А.* О монотонных разностных схемах для эллиптических и параболических уравнений в случае несамосопряжённого эллиптического оператора // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1965. Т. 5. № 3. С. 548–551.
10. *Полевиков В.К.* Схема повышенного порядка точности для задач высокоинтенсивного тепломассообмена // Современные проблемы тепловой гравитационной конвекции. Минск, 1974. С. 84–88.
11. *Полевиков В.К.* Монотонная разностная схема повышенного порядка точности для двумерных уравнений конвекции–диффузии // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2019. № 3. С. 71–83.

12. *Gaspar F.G., Lisbona F.J., Matus P., Tuyen V.T.K.* Monotone finite difference schemes for quasilinear parabolic problems with mixed boundary conditions // Comput. Methods in Appl. Math. 2016. V. 16. № 2. P. 231–243.
13. *Matus P., Hieu L.M., Vulkov L.G.* Analysis of second order difference schemes on nonuniform grids for quasilinear parabolic equations // J. of Comput. and Appl. Math. 2017. V. 310. P. 186–199.
14. *Matus P., Lemeshevsky S.* Stability and monotonicity of difference schemes for nonlinear scalar conservation laws and multidimensional quasi-linear parabolic equations // Comput. Methods in Appl. Math. 2009. V. 9. № 3. P. 253–280.
15. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М., 1983.
16. *Матус П.П., Хиеу Л.М., Волков Л.Г.* Принцип максимума для разностных схем с незнакопостоянными входными данными // Докл. НАН Беларуси. 2015. Т. 59. № 5. С. 13–17.
17. *Галанин М.П., Савенков Е.Б.* Методы численного анализа математических моделей. М., 2010.
18. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения задач конвекции–диффузии. М., 1999.
19. *Вабищевич П.Н., Самарский А.А.* Монотонные разностные схемы для задач конвекции–диффузии на треугольных сетках // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2002. Т. 42. № 9. С. 1368–1382.
20. *Friedrichs K.O., Hyers D.H.* Symmetric hyperbolic linear differential equations // Comm. on Pure and Appl. Math. 1954. V. 7. № 2. P. 345–392.
21. *Матус П.П., Поляков Д.Б.* О согласованных двусторонних оценках решений квазилинейных параболических уравнений и их аппроксимаций // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 7. С. 991–1000.
22. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967.
23. *Самарский А.А.* Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1963. Т. 3. № 5. С. 812–840.
24. *Берковский Б.М., Полевиков В.К.* Вычислительный эксперимент в конвекции. Минск, 1988.
25. *Wang Xinyi, Lu Yuekai.* Exact solutions of the extended Burgers–Fisher equation // Chinese Phys. Lett. 1990. V. 7. № 4. P. 145–147.


Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск,
Католический университет имени Иоанна-Павла II,
г. Люблин, Польша

Поступила в редакцию 09.03.2022 г.
После доработки 09.03.2022 г.
Принята к публикации 25.05.2022 г.