

УДК 519.622.2+681.5.015

ИНТЕРВАЛЬНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2022 г. А. Ю. Морозов, Д. Л. Ревизников

Представлен подход к решению задач параметрической идентификации динамических систем, целью которого является нахождение такой интервальной оценки параметров модели, при которой решение соответствующей задачи моделирования содержало бы исходные (экспериментальные) данные или минимизировало бы отклонение от них. В основе подхода лежит ранее разработанный, апробированный и обоснованный алгоритм адаптивной интерполяции для моделирования динамических систем с интервальными параметрами. Сформулирована задача минимизации расстояния между решением интервальной задачи и экспериментальными значениями фазовых переменных в пространстве границ интервальных оценок параметров модели. Получено выражение градиента минимизируемой целевой функции для дальнейшего применения методов оптимизации первого порядка. Выполнена апробация предложенного подхода на представительном ряде задач.

DOI: 10.31857/S0374064122070081, EDN: SEMWGM

Введение. Обратные задачи играют очень важную роль во многих областях. Определение закономерностей по имеющимся экспериментальным данным является ключевым моментом в построении математических моделей. Задача параметрической идентификации возникает на этапе, когда модель того или иного физического процесса уже определена, но неизвестными остаются параметры этой модели. Классический подход к определению параметров заключается в построении и минимизации некоторой целевой функции, которая характеризует отклонение модельного решения от экспериментальных данных.

Важной особенностью обратных задач является то, что они часто бывают некорректными. К признакам некорректности относятся: отсутствие решения, наличие более одного решения, сильная зависимость решения от погрешности входных данных (важность этого фактора связана с тем, что информация о фазовых переменных, как правило, поступает с некоторой погрешностью).

Существует ряд работ, посвящённых рассматриваемому классу задач [1–4]. В статьях [5, 6] предлагаются методы решения обратной коэффициентной задачи для уравнений в частных производных. В [7] решается обратная задача по определению плотности тепловых источников для уравнения субдиффузии. В работе [8] исследуется параметрическая идентификация в обратных задачах теплопроводности в условиях интервальной неопределённости на основе нейронных сетей, а в [9] предлагается структурно-параметрическая идентификация динамических объектов по интервальным исходным данным. В [10] представлен итеративный интервальный метод для прогнозирования границ параметров модели в условиях неопределённости в измеренных данных. Отметим важную роль обратных задач в аэрокосмической отрасли [11], вычислительной астрофизике [12] и электронике [13].

Применение интервального аппарата [14–16] в задачах параметрической идентификации связано с предположением, что параметры модели могут быть интервальными. Преимущество в использовании интервальных моделей заключается в том, что они дают ограничение сверху и снизу на интересующие величины, в отличие от классических моделей, которые их аппроксимируют.

При описании динамики различных объектов и процессов наиболее часто используются математические модели в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), поэтому далее рассматриваются именно они.

В работе сформулирована задача минимизации расстояния между решением интервальной задачи и исходными значениями фазовых переменных в пространстве границ интервальных оценок параметров модели. Для дальнейшего применения методов оптимизации первого порядка получено выражение градиента соответствующей минимизируемой целевой функции. В процессе определения границ интервальных оценок необходимо многократно решать прямую интервальную задачу, для этого применяется ранее разработанный алгоритм адаптивной интерполяции (см. [17]).

Алгоритм адаптивной интерполяции относится к группе методов, определяющих явную зависимость решения задачи от значений интервальных параметров. В данной группе можно выделить две подгруппы: методы, оперирующие символьными выражениями [18–20], и методы, представляющие решение в виде полинома относительно интервальных параметров [17, 21, 22]. Алгоритм адаптивной интерполяции входит во вторую подгруппу.

Алгоритм имеет теоретическое обоснование [17, 23, 24]. Его идея заключается в построении для каждого момента времени полинома, который интерполирует зависимость решения задачи от значений параметров в заданной области неопределённости. Интерполяционный полином строится по определённому набору узлов, которые образуют сетку. На каждом шаге алгоритма сначала выполняется обновление значений, хранящихся в узлах сетки, а далее в зависимости от погрешности интерполяции происходит адаптация. В тех местах сетки, где погрешность большая, происходит добавление новых узлов, а в тех местах, где погрешность маленькая, – разрежение сетки. В классической версии алгоритма используется интерполяция на полных сетках, и из-за экспоненциального роста числа узлов при увеличении размерности области неопределённости он может применяться только к системам с небольшим числом (6–7) интервальных параметров. В работах [25–27] рассмотрены два подхода, позволяющих расширить область применения на динамические системы с большим количеством интервальных параметров: разреженные сетки [28–30] и тензорные поездки [31, 32]. С использованием данных подходов были промоделированы системы, содержащие до 18 интервальных параметров.

Схематично процесс решения задачи параметрической идентификации можно представить следующим образом. Сначала выполняется инициализация неизвестных параметров некоторыми произвольными интервалами и решается прямая задача. В каждом моменте времени, в котором известна информация о значении фазовых переменных, решается задача минимизации расстояния между параметрическим множеством, полученным в процессе работы алгоритма адаптивной интерполяции, и исходными (экспериментальными) данными. Если точка минимума лежит на одной из границ области неопределённости, то граница соответствующего интервала расширяется. Если точки минимума для всех моментов времени не лежат на определённой границе области неопределённости, то граница соответствующего интервала сужается. Далее снова решается прямая задача и т.д. до тех пор, пока интервальные оценки параметров не сойдутся.

1. Постановка задачи. Рассматриваются математические модели, заданные в виде системы ОДУ с интервальными начальными условиями и параметрами:

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = f_i(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t), \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m, t), \quad i = \overline{1, n},$$

$$y_i(t_0) \in [y_i^0, \overline{y_i^0}], \quad i = \overline{1, n},$$

$$\theta_i \in [\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i], \quad i = \overline{1, m}, \quad t \in [t_0, t_N], \quad (1)$$

где n – количество уравнений в системе, m – количество параметров, $y_i^0, \overline{y_i^0}$, $i = \overline{1, n}$, $\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i$, $i = \overline{1, m}$, – нижние и верхние границы интервальных неопределённостей. Отметим, что интервальные неопределённости могут быть вырожденными, в этом случае границы будут совпадать. Вектор-функция $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ удовлетворяет всем условиям, обеспечивающим единственность и существование решения при всех $y_i(t_0) \in [y_i^0, \overline{y_i^0}]$, $i = \overline{1, n}$, и $\theta_i \in [\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i]$, $i = \overline{1, m}$.

Решение системы (1) в каждый момент времени t_k является параметрическим множеством:

$$\mathbf{Y}^k = \{ \mathbf{y}^k(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m) : x_i \in [\underline{y}_i^0, \overline{y}_i^0], \quad i = \overline{1, n}, \quad z_i \in [\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i], \quad i = \overline{1, m} \},$$

где $\mathbf{y}^k(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m) = (y_1(t_k), y_2(t_k), \dots, y_n(t_k))^T$ – решение следующей неинтервальной системы ОДУ:

$$\begin{aligned} \frac{dy_i(t)}{dt} &= f_i(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t), z_1, z_2, \dots, z_m, t), \quad i = \overline{1, n}, \\ y_i(t_0) &= x_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [t_0, t_k]. \end{aligned} \tag{2}$$

Пусть известны N экспериментальных точек в фазовом пространстве в различные моменты времени:

$$\hat{\mathbf{y}}(t_k) = (\hat{y}_1(t_k), \hat{y}_2(t_k), \dots, \hat{y}_n(t_k))^T, \quad k = \overline{1, N}. \tag{3}$$

Задача параметрической идентификации заключается в нахождении таких границ интервалов $\underline{y}_1^0, \overline{y}_1^0, \underline{y}_2^0, \overline{y}_2^0, \dots, \underline{y}_n^0, \overline{y}_n^0, \underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1, \underline{\theta}_2, \overline{\theta}_2, \dots, \underline{\theta}_m, \overline{\theta}_m$, что $\hat{\mathbf{y}}(t_k) \in \mathbf{Y}^k, k = \overline{1, N}$. В данной постановке подразумевается, что для каждого $\hat{\mathbf{y}}(t_k)$ должны существовать такие значения x_1, x_2, \dots, x_n и z_1, z_2, \dots, z_m , при которых $\mathbf{y}^k(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m) = \hat{\mathbf{y}}(t_k)$. Отметим, что не всегда можно добиться того, чтобы любая точка принадлежала множеству решений \mathbf{Y}^k , но, как правило, в практических задачах это выполнимо.

Для нахождения соответствующих интервальных оценок начальных условий и параметров выполняется переход к задаче минимизации отклонения модельного решения от экспериментальных данных. Минимизируется следующая целевая функция:

$$J(\underline{y}_1^0, \overline{y}_1^0, \dots, \underline{y}_n^0, \overline{y}_n^0, \underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1, \dots, \underline{\theta}_m, \overline{\theta}_m) = \sum_{k=1}^N \rho(\mathbf{Y}^k, \hat{\mathbf{y}}(t_k)), \tag{4}$$

где $\rho(\mathbf{Y}^k, \hat{\mathbf{y}}(t_k)) = \min_{\mathbf{y}^k \in \mathbf{Y}^k} \|\mathbf{y}^k - \hat{\mathbf{y}}(t_k)\|^2$ – квадрат расстояния между множеством \mathbf{Y}^k и точкой $\hat{\mathbf{y}}(t_k)$. Традиционно в качестве нормы вектора $\|\cdot\|$ используется взвешенная евклидова норма

$$\|\mathbf{a}\|^2 = \sum_{i=1}^n w_i a_i^2,$$

где w_i – веса, которые позволяют учесть разную природу фазовых переменных (для удобства изложения будем полагать, что $w_i = 1, i = \overline{1, n}$).

Как будет видно в дальнейшем, важную роль в предлагаемом подходе играет явное представление $\mathbf{y}^k(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m), x_i \in [\underline{y}_i^0, \overline{y}_i^0], i = \overline{1, n}, z_i \in [\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i], i = \overline{1, m}$, которое возможно получить с помощью алгоритма адаптивной интерполяции. В этом случае при вычислении $\rho(\mathbf{Y}^k, \hat{\mathbf{y}}(t_k))$ минимизацию можно выполнять в пространстве начальных условий и параметров без дополнительного интегрирования системы (2):

$$\rho(\mathbf{Y}^k, \hat{\mathbf{y}}(t_k)) = \min_{\substack{x_i \in [\underline{y}_i^0, \overline{y}_i^0], i = \overline{1, n} \\ z_i \in [\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i], i = \overline{1, m}}} \left[\sum_{i=1}^n (y_i^k(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) - \hat{y}_i(t_k))^2 \right]. \tag{5}$$

При минимизации (4) предполагается, что получающиеся интервальные оценки являются правильными:

$$\underline{y}_i^0 \leq \overline{y}_i^0, \quad i = \overline{1, n}, \quad \underline{\theta}_i \leq \overline{\theta}_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Утверждение. Если $\tilde{y}_1^0, \tilde{y}_1^0, \dots, \tilde{y}_n^0, \tilde{y}_n^0, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_m, \tilde{\theta}_m$ – набор значений, на котором достигается минимум целевой функции (4), то на любом другом наборе $\underline{y}_1^0, \underline{y}_1^0, \dots, \underline{y}_n^0, \underline{y}_n^0, \underline{\theta}_1, \underline{\theta}_1, \dots, \underline{\theta}_m, \underline{\theta}_m$ таком, что

$$\begin{aligned} \underline{y}_1^0 &\leq \tilde{y}_1^0, & \tilde{y}_1^0 &\leq \overline{y}_1^0, & \dots, & \underline{y}_n^0 &\leq \tilde{y}_n^0, & \tilde{y}_n^0 &\leq \overline{y}_n^0, \\ \underline{\theta}_1 &\leq \tilde{\theta}_1, & \tilde{\theta}_1 &\leq \overline{\theta}_1, & \dots, & \underline{\theta}_m &\leq \tilde{\theta}_m, & \tilde{\theta}_m &\leq \overline{\theta}_m, \end{aligned} \quad (6)$$

будет достигаться минимум.

Докажем от противного. Предположим, что существует такой набор $\underline{y}_1^0, \underline{y}_1^0, \dots, \underline{y}_n^0, \underline{y}_n^0, \underline{\theta}_1, \underline{\theta}_1, \dots, \underline{\theta}_m, \underline{\theta}_m$, удовлетворяющий условию (6), при котором минимум не достигается, тогда

$$J(\underline{y}_1^0, \underline{y}_1^0, \dots, \underline{y}_n^0, \underline{y}_n^0, \underline{\theta}_1, \underline{\theta}_1, \dots, \underline{\theta}_m, \underline{\theta}_m) > J(\tilde{y}_1^0, \tilde{y}_1^0, \dots, \tilde{y}_n^0, \tilde{y}_n^0, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_1, \dots, \tilde{\theta}_m, \tilde{\theta}_m).$$

Целевая функция (4) представляет собой сумму слагаемых, следовательно, существует такое k -е слагаемое, для которого выполняется неравенство

$$\min_{\substack{x_i \in [\underline{y}_i^0, \overline{y}_i^0], i=1, n \\ z_i \in [\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i], i=1, m}} \left[\sum_{i=1}^n (y_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - \hat{y}_i(t_k))^2 \right] > \min_{\substack{x_i \in [\tilde{y}_i^0, \overline{\tilde{y}}_i^0], i=1, n \\ z_i \in [\tilde{\theta}_i, \overline{\tilde{\theta}}_i], i=1, m}} \left[\sum_{i=1}^n (y_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - \hat{y}_i(t_k))^2 \right],$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m)$. С учётом того, что $[\tilde{y}_i^0, \overline{\tilde{y}}_i^0] \subseteq [\underline{y}_i^0, \overline{y}_i^0]$ и $[\tilde{\theta}_i^0, \overline{\tilde{\theta}}_i^0] \subseteq [\underline{\theta}_i^0, \overline{\theta}_i^0]$, получаем противоречие. Утверждение доказано.

Сформулированное утверждение можно рассматривать и в обратную сторону – в плане возможности уменьшения найденных интервальных оценок, что является важным при практической реализации. Однако отметим, что целью предлагаемого подхода является не нахождение минимальной интервальной оценки, а только определение таких значений $\underline{y}_1^0, \underline{y}_1^0, \dots, \underline{y}_n^0, \underline{y}_n^0, \underline{\theta}_1, \underline{\theta}_1, \dots, \underline{\theta}_m, \underline{\theta}_m$, при которых целевая функция (4) будет равна нулю или минимальна. Тем не менее если очевидным образом можно уменьшить получаемые интервальные оценки начальных условий и параметров, то эта процедура выполняется.

2. Методы решения. Поиск минимума целевой функции (4) в аналитическом виде зачастую затруднителен, поэтому необходимо применять численные методы оптимизации [33, 34]. Наиболее широко использующимися являются градиентные методы, которые, хотя и требуют знания градиента целевой функции, обладают высокой скоростью сходимости, компенсирующей затраты на вычисления градиента.

Одна итерация метода градиентного спуска записывается следующим образом:

$$\mathbf{u}^{(j+1)} = \mathbf{u}^{(j)} - \lambda^{(j)} \nabla F(\mathbf{u}^{(j)}),$$

где \mathbf{u} – вектор переменных, ∇F – градиент минимизируемой функции F , $\lambda^{(j)}$ – скорость градиентного спуска. Данный класс методов является хорошо изученным и исследованным, поэтому подробно рассматриваться в данной работе не будет.

Для того чтобы вычислить градиент целевой функции (4), необходимо продифференцировать (5) по границе области поиска минимума. Обозначим через $(\tilde{x}_1^k, \dots, \tilde{x}_n^k, \tilde{z}_1^k, \dots, \tilde{z}_m^k)$ точку минимума (5):

$$(\tilde{x}_1^k, \dots, \tilde{x}_n^k, \tilde{z}_1^k, \dots, \tilde{z}_m^k) = \arg \min_{\substack{x_i \in [\underline{y}_i^0, \overline{y}_i^0], i=1, n \\ z_i \in [\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i], i=1, m}} J^k(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m), \quad (7)$$

где

$$J^k(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) = \sum_{i=1}^n (y_i^k(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) - \hat{y}_i(t_k))^2.$$

Дополнительно запишем компоненты градиента J^k :

$$\begin{aligned} & \frac{dJ^k(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m)}{dx_j} = \\ & = 2 \sum_{i=1}^n (y_i^k(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) - \hat{y}_i(t_k)) \frac{dy_i^k(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m)}{dx_j}, \quad j = \overline{1, n}, \\ & \frac{dJ^k(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m)}{dz_j} = \\ & = 2 \sum_{i=1}^n (y_i^k(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) - \hat{y}_i(t_k)) \frac{dy_i^k(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m)}{dz_j}, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \tag{8}$$

Очевидно, что если точка минимума лежит не на границе рассматриваемой области, то изменение границы никак не будет на неё влиять, т.е. производная по границе будет равна нулю. А если точка лежит на границе, то производная равна частной производной в этой точке. В результате компоненты градиента (4) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dJ(\underline{y}_1^0, \overline{y}_1^0, \dots, \underline{y}_n^0, \overline{y}_n^0, \underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1, \dots, \underline{\theta}_m, \overline{\theta}_m)}{dy_j^0} &= \sum_{k=1}^N \begin{cases} 0, & \tilde{x}_j^k \neq \underline{y}_j^0, \\ \frac{dJ^k(\tilde{x}_1^k, \dots, \tilde{x}_n^k, \tilde{z}_1^k, \dots, \tilde{z}_m^k)}{dx_j}, & \tilde{x}_j^k = \underline{y}_j^0, \end{cases} \\ \frac{dJ(\underline{y}_1^0, \overline{y}_1^0, \dots, \underline{y}_n^0, \overline{y}_n^0, \underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1, \dots, \underline{\theta}_m, \overline{\theta}_m)}{dy_j^0} &= \sum_{k=1}^N \begin{cases} 0, & \tilde{x}_j^k \neq \overline{y}_j^0, \\ \frac{dJ^k(\tilde{x}_1^k, \dots, \tilde{x}_n^k, \tilde{z}_1^k, \dots, \tilde{z}_m^k)}{dx_j}, & \tilde{x}_j^k = \overline{y}_j^0, \end{cases} \\ & j = \overline{1, n}, \\ \frac{dJ(\underline{y}_1^0, \overline{y}_1^0, \dots, \underline{y}_n^0, \overline{y}_n^0, \underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1, \dots, \underline{\theta}_m, \overline{\theta}_m)}{d\theta_j} &= \sum_{k=1}^N \begin{cases} 0, & \tilde{z}_j^k \neq \underline{\theta}_j, \\ \frac{dJ^k(\tilde{x}_1^k, \dots, \tilde{x}_n^k, \tilde{z}_1^k, \dots, \tilde{z}_m^k)}{dz_j}, & \tilde{z}_j^k = \underline{\theta}_j, \end{cases} \\ \frac{dJ(\underline{y}_1^0, \overline{y}_1^0, \dots, \underline{y}_n^0, \overline{y}_n^0, \underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1, \dots, \underline{\theta}_m, \overline{\theta}_m)}{d\theta_j} &= \sum_{k=1}^N \begin{cases} 0, & \tilde{z}_j^k \neq \overline{\theta}_j, \\ \frac{dJ^k(\tilde{x}_1^k, \dots, \tilde{x}_n^k, \tilde{z}_1^k, \dots, \tilde{z}_m^k)}{dz_j}, & \tilde{z}_j^k = \overline{\theta}_j, \end{cases} \\ & j = \overline{1, m}. \end{aligned} \tag{9}$$

Проанализируем (8). Так как $(\tilde{x}_1^k, \dots, \tilde{x}_n^k, \tilde{z}_1^k, \dots, \tilde{z}_m^k)$ является точкой минимума, то градиент (8) в этой точке будет равен нулю в случае, когда точка находится внутри рассматриваемой области $[\underline{y}_1^0, \overline{y}_1^0] \times \dots \times [\underline{y}_n^0, \overline{y}_n^0] \times [\underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1] \times \dots \times [\underline{\theta}_m, \overline{\theta}_m]$, или может быть направлен внутрь области в случае, когда точка находится на границе. Отсюда

$$\frac{dJ^k(\tilde{x}_1^k, \dots, \tilde{x}_n^k, \tilde{z}_1^k, \dots, \tilde{z}_m^k)}{dx_j} \begin{cases} \leq 0, & \tilde{x}_j^k = \overline{y}_j^0, \\ = 0, & \underline{y}_j^0 < \tilde{x}_j^k < \overline{y}_j^0, \\ \geq 0, & \tilde{x}_j^k = \underline{y}_j^0, \end{cases} \quad j = \overline{1, n},$$

$$\frac{dJ^k(\tilde{x}_1^k, \dots, \tilde{x}_n^k, \tilde{z}_1^k, \dots, \tilde{z}_m^k)}{dz_j} \begin{cases} \leq 0, & \tilde{z}_j^k = \overline{\theta}_j, \\ = 0, & \theta_j < \tilde{z}_j^k < \overline{\theta}_j, \quad j = \overline{1, m}, \\ \geq 0, & \tilde{z}_j^k = \underline{\theta}_j, \end{cases}$$

и для (9) получаем

$$\begin{aligned} \frac{dJ(\underline{y}_1^0, \overline{y}_1^0, \dots, \underline{y}_n^0, \overline{y}_n^0, \underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1, \dots, \underline{\theta}_m, \overline{\theta}_m)}{dy_j^0} &= \sum_{k=1}^N \max \left[0, \frac{dJ^k(\tilde{x}_1^k, \dots, \tilde{x}_n^k, \tilde{z}_1^k, \dots, \tilde{z}_m^k)}{dx_j} \right], \\ \frac{dJ(\underline{y}_1^0, \overline{y}_1^0, \dots, \underline{y}_n^0, \overline{y}_n^0, \underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1, \dots, \underline{\theta}_m, \overline{\theta}_m)}{dy_j^0} &= \sum_{k=1}^N \min \left[0, \frac{dJ^k(\tilde{x}_1^k, \dots, \tilde{x}_n^k, \tilde{z}_1^k, \dots, \tilde{z}_m^k)}{dx_j} \right], \quad j = \overline{1, n}, \\ \frac{dJ(\underline{y}_1^0, \overline{y}_1^0, \dots, \underline{y}_n^0, \overline{y}_n^0, \underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1, \dots, \underline{\theta}_m, \overline{\theta}_m)}{d\theta_j} &= \sum_{k=1}^N \max \left[0, \frac{dJ^k(\tilde{x}_1^k, \dots, \tilde{x}_n^k, \tilde{z}_1^k, \dots, \tilde{z}_m^k)}{dz_j} \right], \\ \frac{dJ(\underline{y}_1^0, \overline{y}_1^0, \dots, \underline{y}_n^0, \overline{y}_n^0, \underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1, \dots, \underline{\theta}_m, \overline{\theta}_m)}{d\theta_j} &= \sum_{k=1}^N \min \left[0, \frac{dJ^k(\tilde{x}_1^k, \dots, \tilde{x}_n^k, \tilde{z}_1^k, \dots, \tilde{z}_m^k)}{dz_j} \right], \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Следовательно, в процессе минимизации целевой функции (4) нижние границы интервалов не будут увеличиваться, а верхние границы – уменьшаться, т.е. получающаяся область неопределённости $[\underline{y}_1^0, \overline{y}_1^0] \times \dots \times [\underline{y}_n^0, \overline{y}_n^0] \times [\underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1] \times \dots \times [\underline{\theta}_m, \overline{\theta}_m]$ не будет сужаться. Однако если ни одна точка минимума (7) не лежит на определённой границе, то соответствующая производная равна нулю и границу можно передвинуть, тем самым уменьшив рассматриваемую область. Таким образом, получаем правила сужения:

$$\begin{aligned} \underline{y}_i^0 &= \min_k(\tilde{x}_i^k), \quad \text{если } \frac{dJ}{dy_i^0} = 0, \quad \overline{y}_i^0 = \max_k(\tilde{x}_i^k), \quad \text{если } \frac{dJ}{dy_i^0} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \\ \underline{\theta}_i &= \min_k(\tilde{z}_i^k), \quad \text{если } \frac{dJ}{d\theta_i} = 0, \quad \overline{\theta}_i = \max_k(\tilde{z}_i^k), \quad \text{если } \frac{dJ}{d\theta_i} = 0, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Это соответствует следствию из ранее сформулированного утверждения о том, что получающиеся интервальные оценки можно уменьшить. Отметим, что в контексте рассматриваемых задач данный момент является ключевым, потому что позволяет исключить постоянное расширение интервальных оценок.

3. Алгоритм адаптивной интерполяции. Для решения задачи параметрической идентификации требуется знать

$$\mathbf{y}^k(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m), \quad k = \overline{1, N}, \quad x_i \in [\underline{y}_i^0, \overline{y}_i^0], \quad i = \overline{1, n}, \quad z_i \in [\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i], \quad i = \overline{1, m}.$$

В свою очередь, для этого необходимо решить прямую задачу (1).

В данном пункте приводится краткое описание алгоритма адаптивной интерполяции для интегрирования систем ОДУ с интервальными начальными условиями и параметрами в соответствии с работами [17, 25, 26].

Цель алгоритма – для каждого момента времени t_k построить вектор-функцию

$$\mathbf{P}^k(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m),$$

интерполирующую $\mathbf{y}^k(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m)$ с контролируемой точностью.

В начальный момент времени t_0 вектор-функция \mathbf{P}^0 определяется тривиальным образом:

$$\mathbf{P}^0(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m) = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T.$$

Построим с помощью индукции решение для произвольного момента времени. Пусть в момент времени t_k известна $\mathbf{P}^k(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m)$. Получение

$$\mathbf{P}^{k+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m)$$

сводится к интерполяции неявной функции

$$\mathbf{F}(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m) = (y_1(t_{k+1}), y_2(t_{k+1}), \dots, y_n(t_{k+1}))^T,$$

заданной в виде системы ОДУ

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = f_i(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t), z_1, z_2, \dots, z_m, t), \quad i = \overline{1, n},$$

$$y_i(t_k) = P_i^k(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}].$$

Традиционно интерполяционный полином $\mathbf{P}^k(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m)$ строится по определённому набору узлов, которые образуют сетку. Поэтому сначала выполняется перенос решений, которые соответствуют узлам, на $(k + 1)$ -й временной слой, а далее в зависимости от значения погрешности интерполяции происходит адаптация. В тех местах сетки, где погрешность большая, происходит добавление новых узлов, а в тех местах, где погрешность маленькая, – разрежение сетки. Интерполяционный полином \mathbf{P} может быть любым, необходимо только, чтобы была возможность контролировать погрешность интерполяции.

При решении задачи параметрической идентификации $\mathbf{y}^k(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m)$ заменяется полученным интерполяционным полиномом $\mathbf{P}^k(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m)$. Отметим, что так как полином представляет собой явную функцию, то требуемые в процессе вычислений частные производные можно вычислить аналитически.

4. Результаты. Далее решены несколько задач параметрической идентификации. В качестве критерия остановки градиентного спуска применялось ограничение на значение минимизируемой целевой функции $J < 10^{-12}$. Во всех примерах вместо экспериментальных точек использовались квазиреальные экспериментальные точки, полученные следующим образом. Параметры и начальные условия задавались интервально и решалась прямая задача. В равномерно распределённые в интервале интегрирования моменты времени t_k в найденное решение $\mathbf{P}^k(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m)$ подставлялись случайные значения из соответствующих интервалов:

$$\begin{aligned} x_1 = \hat{x}_1^k &\sim U(\underline{y}_1^0, \overline{y}_1^0), & x_2 = \hat{x}_2^k &\sim U(\underline{y}_2^0, \overline{y}_2^0), & \dots, & & x_n = \hat{x}_n^k &\sim U(\underline{y}_n^0, \overline{y}_n^0), \\ z_1 = \hat{z}_1^k &\sim U(\underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1), & z_2 = \hat{z}_2^k &\sim U(\underline{\theta}_2, \overline{\theta}_2), & \dots, & & z_m = \hat{z}_m^k &\sim U(\underline{\theta}_m, \overline{\theta}_m), \end{aligned} \tag{10}$$

где $U(a, b)$ – непрерывное равномерное распределение на отрезке $[a, b]$. Таким образом,

$$\hat{\mathbf{y}}(t_k) = \mathbf{P}^k(\hat{x}_1^k, \hat{x}_2^k, \dots, \hat{x}_n^k, \hat{z}_1^k, \hat{z}_2^k, \dots, \hat{z}_m^k).$$

Исходные интервальные оценки начальных условий и параметров:

$$\left[\min_k(\hat{x}_i^k), \max_k(\hat{x}_i^k) \right], \quad i = \overline{1, n}, \quad \left[\min_k(\hat{z}_i^k), \max_k(\hat{z}_i^k) \right], \quad i = \overline{1, m}.$$

Вначале рассматривается система ОДУ с двумя неизвестными параметрами, которая соответствует модели Лотки–Вольтерры [35]:

$$\begin{aligned} u' &= \alpha u - 2uv, & v' &= -v + \beta uv, \\ u(0) &= 1, & v(0) &= 3, & t &\in [0, 5.3]. \end{aligned} \tag{11}$$

Из интервала интегрирования были взяты 20 равномерно расположенных точек с шагом по времени 0.265. Квазиреальные экспериментальные точки на фазовой плоскости получены при следующих интервальных оценках параметров: $\alpha \in [1.95, 2.035]$ и $\beta \in [0.9652, 1.045]$. Начальное приближение в методе градиентного спуска: $\alpha^{(0)} \in [1.5, 1.51]$ и $\beta^{(0)} \in [0.6, 0.61]$. На рис. 1 проиллюстрирован процесс параметрической идентификации системы.

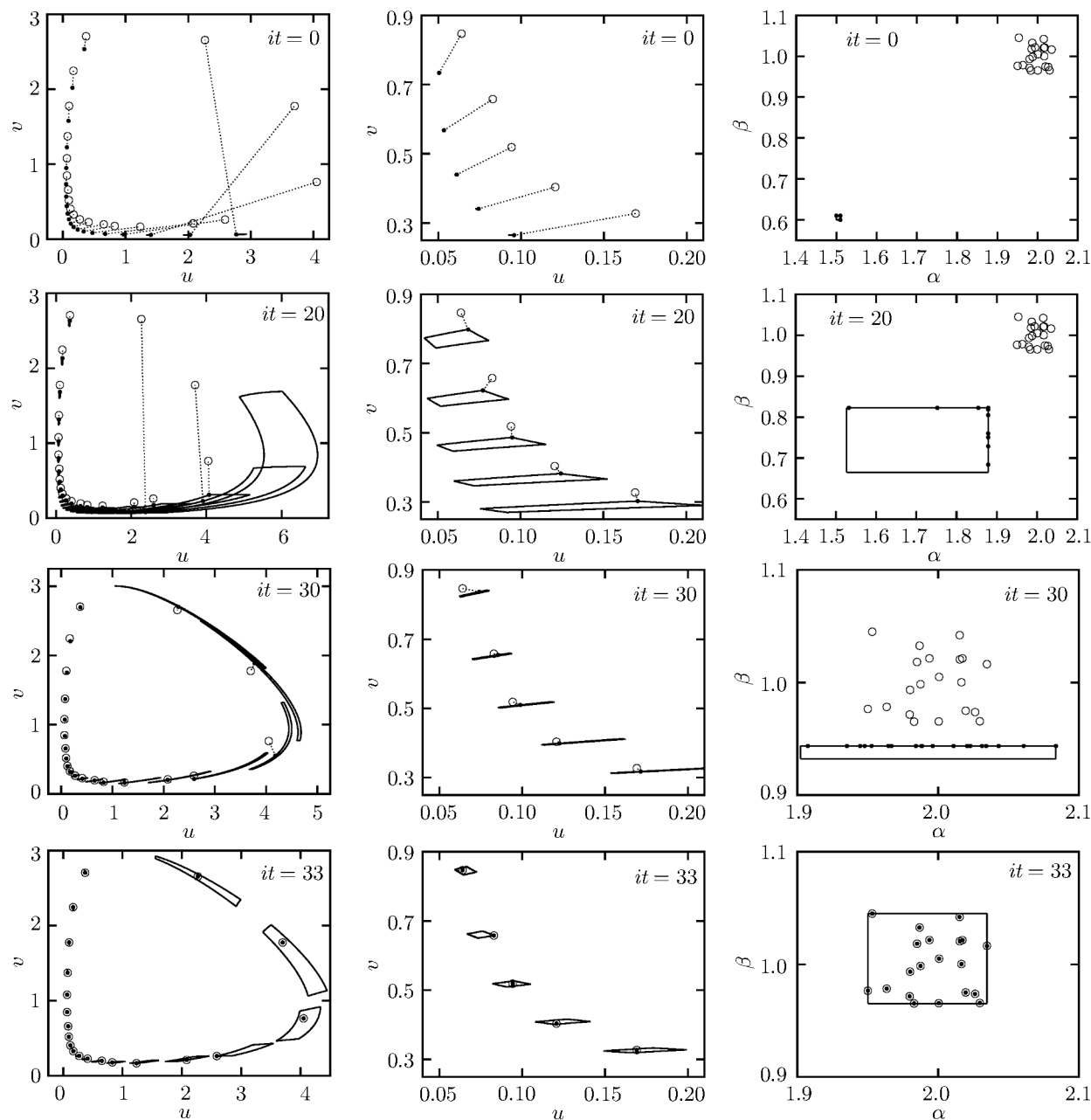


Рис. 1. Результаты решения задачи параметрической идентификации для системы (11).

На рис. 1 и на всех рисунках далее сплошными линиями показаны множества решений прямой задачи в различные моменты времени (первая и вторая колонка на рис. 1), светлые кружки – экспериментальные данные. Жирная точка обозначает ближайшую точку к экспериментальной точке в множестве решений прямой задачи, а пунктирная линия – расстояние между ними. Сумма квадратов расстояний фактически определяет значение минимизируемой целевой функции (4).

Каждая строка рис. 1 соответствует определённой итерации градиентного спуска. Слева показана фазовая плоскость, а по центру – её увеличенная часть ($u \in [0.04, 0.21]$ и $v \in [0.25, 0.9]$). На рисунках справа продемонстрировано решение задачи в пространстве параметров. Здесь светлыми кружками показаны полученные случайным образом значения параметров (10) при генерации экспериментальных точек; жирными точками – решение соответствующей задачи (7); сплошной линией – интервальная оценка параметров (получающаяся область неопределённости).

В процессе минимизации множества решений прямой задачи стремятся покрыть экспериментальные точки, о чем свидетельствует уменьшение расстояний между ними. При $it = 30$ наблюдается, что все жирные точки принадлежат верхней границе интервальной оценки параметра β . Это говорит о том, что исходные значения параметров (10) расположились с одной стороны относительно текущей области неопределённости. На последней итерации видно, что полученные множества решений полностью покрыли экспериментальные точки, кроме того, определены соответствующие значения параметров, о чем свидетельствует совпадение жирных точек со светлыми кружками на рисунке справа.

Далее рассматривается система ОДУ, в которой неизвестными являются начальные условия:

$$u' = 4u - \frac{5}{4}uv + \frac{1}{10}u^2, \quad v' = -2v + \frac{1}{2}uv + \frac{1}{10}v^2,$$

$$u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0, \quad t \in [0, 4]. \tag{12}$$

Аналогично предыдущему примеру из интервала интегрирования были взяты 20 равномерно расположенных точек с шагом по времени 0.2. Исходные интервальные оценки начальных условий: $u_0 \in [4.301, 4.639]$ и $v_0 \in [2.861, 3.180]$. Начальное приближение: $u_0^{(0)} \in [3.3, 3.7]$ и $v_0^{(0)} \in [3.8, 4.2]$. На рис. 2 показан процесс решения задачи.

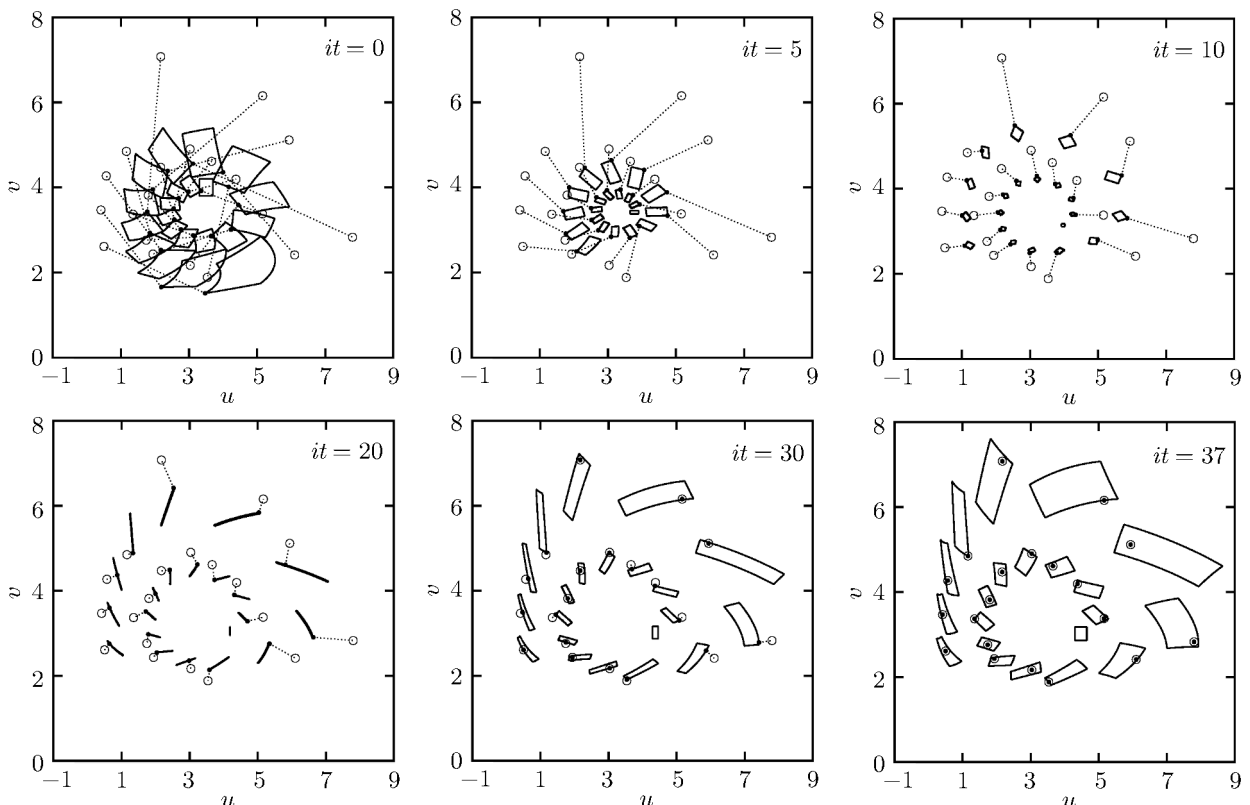


Рис. 2. Иллюстрация решения задачи параметрической идентификации для системы (12).

Траектория решения прямой задачи имеет спиралевидную структуру, что является особенностью рассматриваемой системы ОДУ. С каждой итерацией градиентного спуска получающиеся множества решений приближаются к экспериментальным точкам, уменьшается суммарная длина пунктирных линий. На 37-й итерации все экспериментальные точки содержатся в соответствующих множествах решений прямой задачи. Полученные интервальные оценки начальных условий $u_0^{(37)} \in [4.301, 4.639]$ и $v_0^{(37)} \in [2.861, 3.180]$ совпадают с исходными. Однако такая ситуация имеет место не всегда, далее будут рассмотрены примеры, где количество фазовых переменных отличается от количества неизвестных величин.

Отметим, что решение задачи (12) можно получить, выполнив интегрирование в обратную сторону для каждой экспериментальной точки, тем самым найдя соответствующие прообразы в пространстве начальных условий, по которым можно построить интервальную оценку.

Рассмотрим задачу (11) с увеличенным количеством неизвестных величин. Из системы исключим информацию о начальных условиях:

$$\begin{aligned} u' &= \alpha u - 2uv, & v' &= -v + \beta uv, \\ u(0) &= u_0, & v(0) &= v_0, & t &\in [0, 5.3]. \end{aligned} \quad (13)$$

Исходные интервальные оценки начальных условий и параметров, по которым генерировались экспериментальные точки на фазовой плоскости:

$$u_0 \in [0.9505, 1.046], \quad v_0 \in [2.952, 3.050], \quad \alpha \in [1.959, 2.041], \quad \beta \in [0.9732, 1.048].$$

Начальное приближение:

$$u_0^{(0)} \in [0.8, 0.81], \quad v_0^{(0)} \in [2.8, 2.81], \quad \alpha^{(0)} \in [1.8, 1.81], \quad \beta^{(0)} \in [0.6, 0.61].$$

На рис. 3 показан процесс поиска интервальных оценок параметров и начальных условий. Множество решений прямой задачи в каждый момент времени представляет собой проекцию деформирующегося четырёхмерного прямоугольного параллелепипеда.

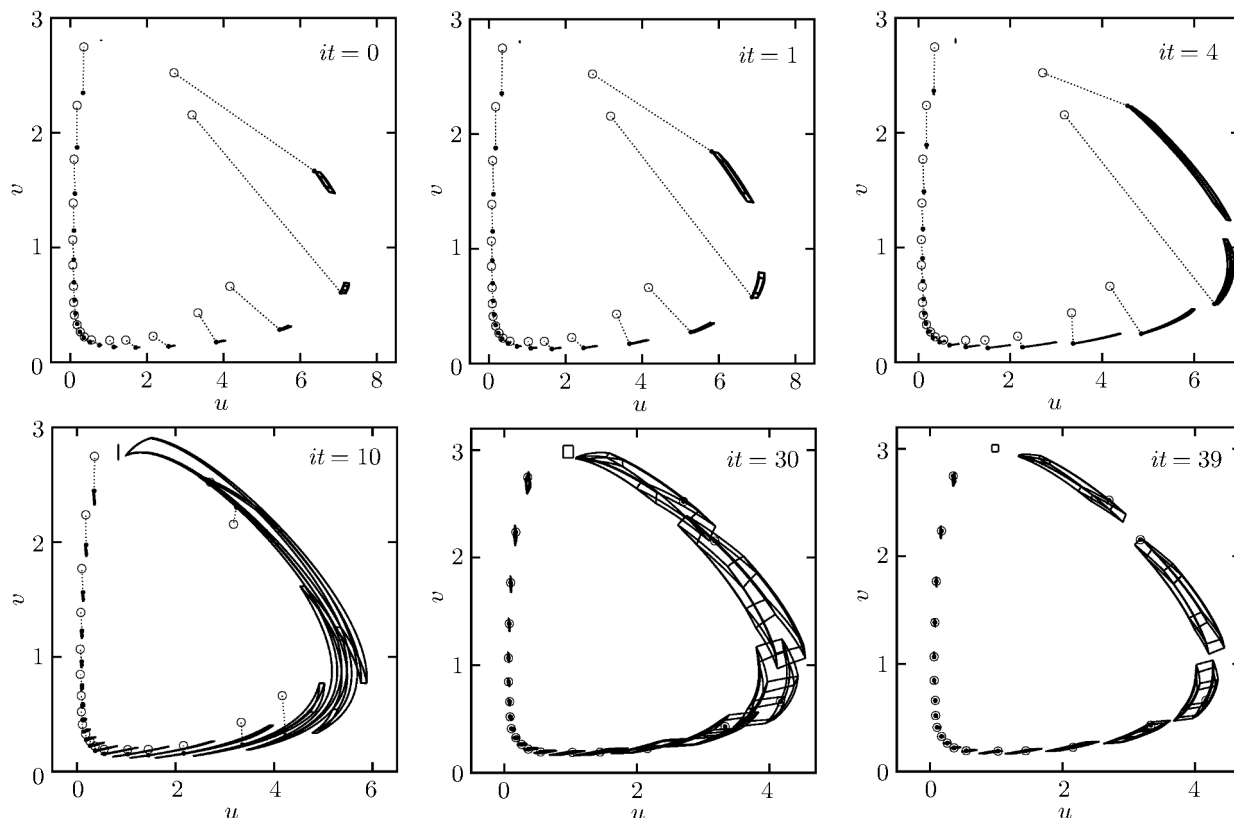


Рис. 3. Процесс решения задачи параметрической идентификации для системы (13).

На последней итерации получены следующие интервальные оценки: $u_0^{(39)} \in [0.9393, 1.033]$, $v_0^{(39)} \in [2.972, 3.037]$, $\alpha^{(39)} \in [1.970, 2.035]$ и $\beta^{(39)} \in [0.9749, 1.033]$. Они отличаются от исходных оценок, но при этом все экспериментальные точки содержатся в соответствующих множествах решений прямой задачи. Отметим, что результат зависит от выбора начального приближения, так как минимизируемая целевая функция является многоэкстремальной.

В заключение рассмотрим модельную задачу: движение тела с неизвестным начальным положением, неизвестными начальными скоростями и неизвестной массой под действием сил гравитации вокруг массивного тела. Система ОДУ в безразмерных переменных имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} x_1' &= vx_1, & y_1' &= vy_1, \\ vx_1' &= m_2 \frac{x_2 - x_1}{((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)^{3/2}}, & vy_1' &= m_2 \frac{y_2 - y_1}{((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)^{3/2}}, \\ x_2' &= vx_2, & y_2' &= vy_2, \\ vx_2' &= m_1 \frac{x_1 - x_2}{((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)^{3/2}}, & vy_2' &= m_1 \frac{y_1 - y_2}{((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)^{3/2}}, \\ x_1(0) &= x_{1,0}, & y_1(0) &= y_{1,0}, \\ vx_1(0) &= vx_{1,0}, & vy_1(0) &= vy_{1,0}, \\ x_2(0) &= y_2(0) = 0, & vx_2(0) &= vy_2(0) = 0, \\ m_2 &= 10^2, & t &\in [0, 0.2]. \end{aligned} \quad (14)$$

В отличие от предыдущих примеров здесь с шагом по времени 0.02 было взято меньше точек – 10. Кроме того, экспериментальные данные содержали информацию только о фазовых переменных, соответствующих положению первого тела (x_1, y_1) . Подобные задачи возникают в астрофизике, когда об исследуемом космическом объекте кроме его положения на небесной сфере ничего не известно. Исходные интервальные оценки начальных условий и массы тела: $x_{1,0} \in [1.000, 1.018]$, $y_{1,0} \in [3.583 \cdot 10^{-3}, 1.956 \cdot 10^{-2}]$, $vx_{1,0} \in [8.183 \cdot 10^{-3}, 3.794 \cdot 10^{-1}]$, $vy_{1,0} \in [10.04, 10.48]$ и $m_1 \in [10.07, 10.45]$. Начальное приближение: $x_{1,0}^{(0)} \in [0.9, 0.91]$, $y_{1,0}^{(0)} \in [-0.2, -0.1]$, $vx_{1,0}^{(0)} \in [0.0, 0.1]$, $vy_{1,0}^{(0)} \in [9.5, 9.6]$ и $m_1^{(0)} \in [9.5, 9.6]$. На рис. 4 продемонстрировано изменение множеств решений прямой задачи в процессе параметрической идентификации.

Здесь показаны две последовательности множеств, которые соответствуют положению двух тел в пространстве в различные моменты времени. Так как второе тело более массивное и изначально находится в состоянии покоя, его перемещение в пространстве незначительно по сравнению с первым телом.

На 40-й итерации градиентного спуска получены следующие интервальные оценки начального положения, скорости и массы первого тела, при которых решение прямой задачи полностью содержит экспериментальные точки:

$$\begin{aligned} x_{1,0}^{(40)} &\in [1.016, 1.027], & y_{1,0}^{(40)} &\in [3.042 \cdot 10^{-2}, 1.011 \cdot 10^{-1}], \\ vx_{1,0}^{(40)} &\in [-0.2047, -0.1264], & vy_{1,0}^{(40)} &\in [9.721, 10.10], & m_1^{(40)} &\in [9.480, 9.483]. \end{aligned}$$

Отметим, что в процессе параметрической идентификации данной системы выполнялась минимизация целевой функции в десятимерном пространстве (пять интервальных неопределённостей, в каждой по две границы).

Таким образом, с помощью предложенного подхода успешно была решена задача интервальной параметрической идентификации для различных систем ОДУ с разным количеством неизвестных значений.

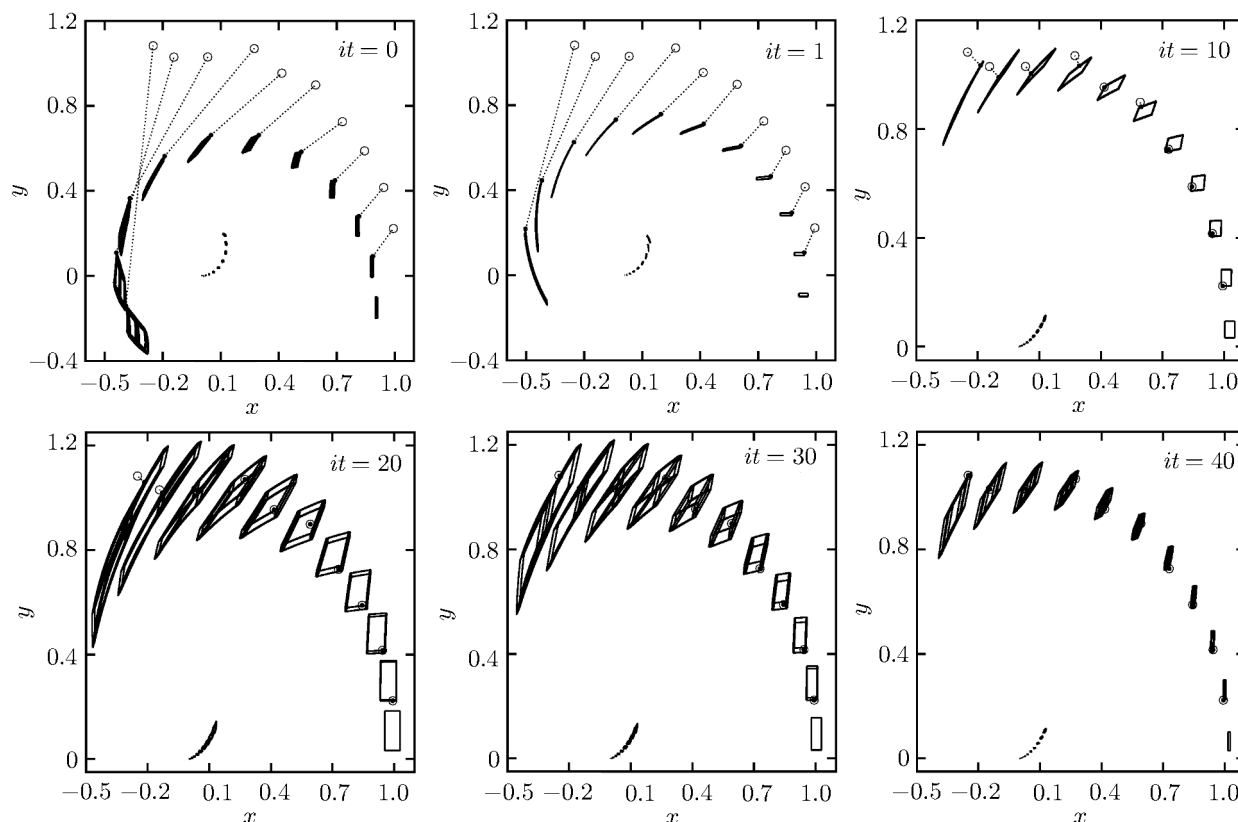


Рис. 4. Параметрическая идентификация системы (14).

5. Обсуждение. В общем случае задача (7) может иметь множество решений. В частности, данная ситуация возникает, когда точка $\hat{y}(t_k)$ принадлежит множеству \mathbf{Y}^k , тогда (7) превращается в систему

$$\begin{aligned} y_1^k(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) &= \hat{y}_1(t_k), & y_2^k(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) &= \hat{y}_2(t_k), & \dots \\ \dots, & & y_n^k(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) &= \hat{y}_n(t_k), \end{aligned} \quad (15)$$

в которой n уравнений и $(n + m)$ неизвестных. На рис. 3 видно, что множество решений системы ОДУ (13) представляет собой проекцию четырёхмерного деформирующегося прямоугольного параллелепипеда. Здесь каждой точке на фазовой плоскости соответствует двумерная поверхность в пространстве параметров и начальных условий, которая определяется решением соответствующей системы (15).

В качестве $(\tilde{x}_1^k, \dots, \tilde{x}_n^k, \tilde{z}_1^k, \dots, \tilde{z}_m^k)$ имеет смысл брать любую точку, наиболее близкую к центру рассматриваемой области

$$[\underline{y}_1^0, \overline{y}_1^0] \times \dots \times [\underline{y}_n^0, \overline{y}_n^0] \times [\underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1] \times \dots \times [\underline{\theta}_m, \overline{\theta}_m],$$

т.е.

$$(\tilde{x}_1^k, \dots, \tilde{x}_n^k, \tilde{z}_1^k, \dots, \tilde{z}_m^k) = \arg \min_{(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) \in \chi} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i^0 + \overline{y}_i^0}{2} - x_i \right)^2 + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\theta_i + \overline{\theta}_i}{2} - z_i \right)^2 \right],$$

где χ – множество решений (15). Выбор точки таким образом дополнительно способствует сужению получаемых интервальных оценок.

Представленный в работе подход также применим, когда в один и тот же момент t_k известно несколько экспериментальных точек. В этом случае целевая функция (4) примет следующий вид:

$$J(\underline{y}_1^0, \overline{y}_1^0, \dots, \underline{y}_n^0, \overline{y}_n^0, \underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1, \dots, \underline{\theta}_m, \overline{\theta}_m) = \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{N_k} \rho(\mathbf{Y}^k, \hat{\mathbf{y}}^j(t_k)),$$

где N_k – количество экспериментальных точек в момент t_k , $\hat{\mathbf{y}}^j(t_k)$ – j -я экспериментальная точка.

Кроме того, рассматриваемый подход обобщается на случай, когда вместо экспериментальных точек известны интервальные оценки фазовых переменных:

$$\hat{\mathbf{Y}}^k = \left([\underline{\hat{y}}_0^k, \overline{\hat{y}}_0^k], [\underline{\hat{y}}_1^k, \overline{\hat{y}}_1^k], \dots, [\underline{\hat{y}}_n^k, \overline{\hat{y}}_n^k] \right)^T, \quad k = \overline{1, N}.$$

Целевая функция (4) запишется следующим образом:

$$J(\underline{y}_1^0, \overline{y}_1^0, \dots, \underline{y}_n^0, \overline{y}_n^0, \underline{\theta}_1, \overline{\theta}_1, \dots, \underline{\theta}_m, \overline{\theta}_m) = \sum_{k=1}^N \rho(\mathbf{Y}^k, \hat{\mathbf{Y}}^k), \tag{16}$$

где $\rho(\mathbf{Y}^k, \hat{\mathbf{Y}}^k)$ характеризует степень непересечения множеств \mathbf{Y}^k и $\hat{\mathbf{Y}}^k$. В частности, величина $\rho(\mathbf{Y}^k, \hat{\mathbf{Y}}^k)$ может соответствовать расстоянию между множеством \mathbf{Y}^k и самой удалённой от него точкой множества $\hat{\mathbf{Y}}^k$:

$$\rho(\mathbf{Y}^k, \hat{\mathbf{Y}}^k) = \max_{\substack{\hat{y}_i^k \in [\underline{\hat{y}}_i^k, \overline{\hat{y}}_i^k] \\ i = \overline{1, n}}} \min_{\substack{x_i \in [y_i^0, \overline{y}_i^0], i = \overline{1, n} \\ z_i \in [\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i], i = \overline{1, m}}} \left[\sum_{i=1}^n (y_i^k(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) - \hat{y}_i^k)^2 \right]$$

или, например, являться интегральной характеристикой:

$$\rho(\mathbf{Y}^k, \hat{\mathbf{Y}}^k) = \int_{\underline{\hat{y}}_1^k}^{\overline{\hat{y}}_1^k} \int_{\underline{\hat{y}}_2^k}^{\overline{\hat{y}}_2^k} \dots \int_{\underline{\hat{y}}_n^k}^{\overline{\hat{y}}_n^k} \min_{\substack{x_i \in [y_i^0, \overline{y}_i^0], i = \overline{1, n} \\ z_i \in [\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i], i = \overline{1, m}}} \left[\sum_{i=1}^n (y_i^k(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m) - \hat{y}_i^k)^2 \right] d\hat{y}_n^k d\hat{y}_{n-1}^k \dots d\hat{y}_1^k.$$

Решение задачи параметрической идентификации при наличии интервальных оценок фазовых переменных (минимизация (16)) требует применения специального математического аппарата. Данное направление является предметом дальнейших исследований.

Заключение. В работе представлен интервальный подход к решению задачи интервальной параметрической идентификации. Цель подхода заключается в нахождении такой интервальной оценки начальных условий и параметров системы ОДУ, при которой решение содержало бы экспериментальные данные или минимизировало бы отклонение от них. Приведена целевая функция, зависящая от границ соответствующих интервальных неопределённостей, минимизация которой эквивалентна решению исходной задачи параметрической идентификации. Выполнен анализ целевой функции и получено выражение градиента для дальнейшего применения методов оптимизации первого порядка. Сформулировано и доказано утверждение о том, что если минимум целевой функции достигается на определённых интервальных оценках, то и на более широких оценках он тоже будет достигаться. При вычислении значения целевой функции и градиента необходимо решать прямую интервальную задачу, для которой применяется ранее разработанный алгоритм адаптивной интерполяции. Выполнена апробация предложенного подхода на нескольких системах ОДУ, содержащих разное количество неизвестных параметров. Продемонстрирована эффективность подхода: для всех задач успешно получены интервальные оценки параметров, при которых решение содержит экспериментальные точки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М., 2009.
2. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М., 1994.
3. Марчук Г.И. Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. М., 1992.
4. Ватутьян А.О. Математические модели и обратные задачи // Соросовский образоват. журн. 1998. № 11. С. 143–148.
5. Денисов А.М. Итерационный метод решения обратной коэффициентной задачи для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 7. С. 943.
6. Гаврилов С.В., Денисов А.М. Численные методы решения нелинейного операторного уравнения, возникающего в обратной коэффициентной задаче // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 7. С. 900–906.
7. Ашуров Р.Р., Мухиддинова А.Т. Обратная задача по определению плотности тепловых источников для уравнения субдиффузии // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1596–1609.
8. Диллигенская А.Н., Самокиш А.В. Параметрическая идентификация в обратных задачах теплопроводности в условиях интервальной неопределённости на основе нейронных сетей // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. 2020. Т. 28. № 4 (68). С. 6–18.
9. Петрикевич Я.И. Структурно-параметрическая идентификация динамических объектов по интервальным исходным данным: дис. ... канд. техн. наук. М., 2006.
10. Xiao N., Fedele F., Muhanna R.L. Inverse problems under uncertainties—an interval solution for the beam finite element // Conf. Paper: 11th Intern. Conf. on Structural Safety & Reliability. New York, 2013. (<https://www.researchgate.net/publication/269518192>).
11. Nenarokotov A.V., Alifanov O.M., Krainova I.V., Titov D.M., Morzhukhina A.V. Estimation of environmental influence on spacecraft materials radiative properties by inverse problems technique // Acta Astronautica. 2019. V. 160. P. 323–330.
12. Кабанихин С.И., Куликов И.М., Шишленин М.А. Алгоритм восстановления характеристик начального состояния сверхновой звезды // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2020. Т. 60. № 6. С. 1035–1044.
13. Абгарян К.К., Носков Р.Г., Ревизников Д.Л. Обратная коэффициентная задача теплопереноса в слоистых наноструктурах // Изв. вузов. Материалы электронной техники. 2017. Т. 20. № 3. С. 213–219.
14. Moore R. Interval Analysis. New Jersey, 1966.
15. Moore R.E., Kearfott R.B., Cloud M.J. Introduction to Interval Analysis. Philadelphia, 2009.
16. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск, 2019.
17. Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л. Алгоритм адаптивной интерполяции на основе kd-дерева для численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными начальными условиями // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 7. С. 963–974.
18. Makino K., Berz M. Models and Their Applications // Numerical Software Verification 2017: conf. July 22–23, 2017. Germany, Heidelberg, 2017. P. 3–13.
19. Nataraj P.S.V., Sundur S. The extrapolated Taylor model // Reliable Computing. July, 2011. P. 251–278.
20. Розалев А.Н. Гарантированные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе преобразования символьных формул // Вычислит. технологии. 2003. Т. 8. № 5. С. 102–116.
21. Fu C., Ren X., Yang Y.-F., Lu K., Qin W. Steady-state response analysis of cracked rotors with uncertain but bounded parameters using a polynomial surrogate method // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul. 2019. V. 68. P. 240–256.
22. Fu C., Xu Y., Yang Y., Lu K., Gu F., Ball A. Response analysis of an accelerating unbalanced rotating system with both random and interval variables // J. Sound Vibrat. 2020. V. 466. P. 115047.
23. Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л., Гидаспов В.Ю. Алгоритм адаптивной интерполяции на основе kd-дерева для решения задач химической кинетики с интервальными параметрами // Мат. моделирование. 2018. Т. 30. № 12. С. 129–144.
24. Морозов А.Ю., Журавлев А.А., Ревизников Д.Л. Анализ и оптимизация алгоритма адаптивной интерполяции численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными параметрами // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 7. С. 960–974.
25. Гидаспов В.Ю., Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л. Алгоритм адаптивной интерполяции с использованием ТТ-разложения для моделирования динамических систем с интервальными параметрами // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2021. Т. 61. № 9. С. 1416–1430.

26. *Morozov A.Yu., Zhuravlev A.A., Reviznikov D.L.* Sparse grid adaptive interpolation in problems of modeling dynamic systems with interval parameters // *Math.* 2021. V. 9. P. 298.
27. *Морозов А.Ю., Ревизников Д.Л.* Алгоритм адаптивной интерполяции на разреженных сетках для численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с интервальными неопределённостями // *Дифференц. уравнения.* 2021. Т. 57. № 7. С. 976–987.
28. *Смоляк С.А.* Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // *Докл. АН СССР.* 1963. Т. 148. № 5. С. 1042–1045.
29. *Bungartz H.-J., Griebel M.* Sparse grids // *Acta Numerica.* 2004. V. 13. № 1. P. 147–269.
30. *Gerstner T., Griebel M.* Sparse grids // *Encycl. of Quantitat. Finance / Ed. R. Cont.* New York, 2010.
31. *Oseledets I.V.* Tensor-train decomposition // *SIAM J. on Sci. Comput.* 2011. V. 33. № 5. P. 2295–2317.
32. *Oseledets I., Tyrtyshnikov E.* TT-cross approximation for multidimensional arrays // *Linear Algebra and its Appl.* 2010. V. 432. № 1. P. 70–88.
33. *Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.* Практическая оптимизация. М., 1985.
34. *Пантелеев А.В., Летова Т.А.* Методы оптимизации в примерах и задачах. М., 2005.
35. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск, 2000.

Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление” РАН, г. Москва,
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 20.02.2022 г.
После доработки 20.02.2022 г.
Принята к публикации 25.05.2022 г.