= ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ =

УДК 519.63+517.958:532.5

# ВАЛИДАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА НА ОСНОВЕ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЁРКИНА ДЛЯ РЕЛАКСАЦИОННОЙ МОДЕЛИ БАЕРА-НУНИЦАТО

© 2022 г. Р. Р. Полехина, М. В. Алексеев, Е. Б. Савенков

Для моделирования динамики двухфазных сред в рамках полностью неравновесной модели Баера–Нунциато с учётом жёсткой механической релаксации рассматривается разрывный метод Галёркина/Рунге–Кутты. Для монотонизации решения используются лимитер WENO-S, который применяется непосредственно к консервативным переменным модели. Релаксационные процессы моделируются с использованием неявного метода Гира шестого порядка с адаптивным выбором шага интегрирования. Для построения численного потока применяется подход на основе теории DLM, позволяющей обобщить методы годуновского типа на случай неконсервативных гиперболических систем уравнений. С помощью разработанного метода проводится расчёт одномерных и двумерных задач, даётся анализ результатов расчётов. В двумерном случае данные расчётов сравниваются с результатами лабораторных экспериментов.

DOI: 10.31857/S0374064122070093, EDN: CEQMHD

Введение. Настоящая работа посвящена численному решению двухфазной полностью неравновесной модели Баера–Нунциато (БН) с релаксационными слагаемыми. Данная модель впервые предложена в работе [1] для анализа процесса перехода дефлаграции в детонацию при моделировании динамики горения гранулированных взрывчатых веществ. В дальнейшем она применялась для решения широкого спектра задач и в настоящее время может рассматриваться как базовая модель для целого ряда обобщений [2–6].

Математическая формулировка модели приведена в п. 1 настоящей работы. Укажем здесь ряд её свойств, которые усложняют задачу построения вычислительных алгоритмов для её решения:

(a) система уравнений БН является гиперболической системой первого порядка и включает в себя члены как в дивергентной, так и в квазилинейной форме. Она не может быть записана полностью в дивергентном виде;

(б) модель включает в себя релаксационные члены, которые описывают процесс релаксации механических и термодинамических параметров фаз к равновесному значению. По крайней мере в ряде приложений характерные времена релаксации могут быть значительно меньше характерных времён протекания других газодинамических процессов. В этом смысле система уравнений БН является "жёсткой".

В связи с этим численное решение уравнений БН является сложной задачей, решению которой посвящено значительное число работ (см., например, [7–11]). Бо́льшая их часть направлена на рассмотрение указанных выше трудностей.

Для построения аппроксимации задачи в настоящей работе используется разрывный метод Галёркина/Рунге-Кутты (RK/DG, Runge-Kutta/Discontinuous Galerkin method) [12]. Его использование предполагает построение слабой постановки задачи. Для неконсервативных систем такая постановка может быть построена с помощью так называемой теории DLM (DalMaso-LeFloch-Murat) [13]. Этот подход позволяет обобщить традиционные методы годуновского типа на случай неконсервативных систем уравнений. Теория DLM основана на понятии пути – гладкого отображения, которое интерполирует между состояниями решения на разрыве и определяет структуры ударной волны. При этом различным путям соответствуют различные решения задачи Римана. В связи с этим выбор пути однозначно определяет вид решения задачи. Обоснование того или иного способа выбора пути для конкретной постановки задачи является открытым вопросом (см. [14]).

Целью настоящей работы является реализация и исследование возможностей вычислительного алгоритма решения уравнений модели БН, основанного на совместном применении сравнительно простых компонент, которые включают в себя:

 применение разрывного метода Галёркина для построения пространственных аппроксимаций уравнений модели;

– лимитирование консервативных переменных с использованием геометрического лимитера WENO-S;

- применение теории DLM для формулировки слабой постановки задачи;

 использование простейшего расщепления по физическим процессам для учёта жёстких релаксационных слагаемых;

– применение неявного метода Гира для интегрирования правых частей модели.

Эффективность предложенной методики иллюстрируется результатами численных экспериментов. Рассмотренные тесты соответствуют физической постановке задачи, в которой среда эффективно является двухфазной и гетерогенной с прямым разрешением границы раздела фаз. Распределение фаз описывается в рамках так называемой диффузной границы. В этом случае обе фазы формально присутствуют в каждой точке пространства, но в области однородности фазы одна из двух объёмных долей пренебрежимо мала. В рамках такой постановки рассматриваются задачи прохождения ударной волны из лёгкого вещества в тяжёлое (в одномерной постановке) и взаимодействия ударной волны с пузырями более тяжёлого и более лёгкого (по отношению к вмещающей среде) газа.

В первом случае сравнение результатов расчётов проводится с аналитическим решением в рамках модели Капилы [5]. Последняя является равновесной по скоростям и давлениям фаз и может быть получена как предел модели БН при исчезающе малых временах релаксации. Для двумерных тестов результаты расчётов сравниваются с результатами лабораторных экспериментов.

Работа имеет следующую структуру. Математическая модель и её особенности представлены в п. 1. Описанию и особенностям реализации вычислительного алгоритма посвящён п. 2. В п. 3 описаны результаты моделирования и проводится их анализ. В заключении формулируются основные результаты работы.

1. Модель Баера–Нунциато с релаксацией. Модель БН описывает двухфазную среду как совокупность двух взаимопроникающих континуумов, каждый из которых характеризуется своей скоростью и совокупностью термодинамических параметров состояния. Скорости и давления фаз в общем случае не равны между собой, и, таким образом, модель является полностью неравновесной. Система уравнений модели БН в варианте, приведённом в [15], имеет вид

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \boldsymbol{u}_{\mathbf{I}} \cdot \nabla \alpha_k = \nu (P_k - P_{\overline{k}}), \tag{1a}$$

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \boldsymbol{u}_k) = 0, \tag{1b}$$

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k \boldsymbol{u}_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \boldsymbol{u}_k \bigotimes \boldsymbol{u}_k) + \nabla (\alpha_k P_k) - P_I \nabla \alpha_k = \mu (\boldsymbol{u}_{\overline{k}} - \boldsymbol{u}_k),$$
(1c)

$$\frac{\partial \alpha_k \rho_k E_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k (\rho_k E_k + P_k) \boldsymbol{u}_k) - P_I \boldsymbol{u}_I \nabla \alpha_k = \mu (\boldsymbol{u}_{\overline{k}} - \boldsymbol{u}_k) \cdot \boldsymbol{u}_I + \nu (P_{\overline{k}} - P_k) P_I.$$
(1d)

Здесь  $\alpha_k$ ,  $\rho_k$ ,  $u_k$ ,  $P_k$ ,  $E_k$  – объёмная доля, плотность, поле скоростей, давление и полная энергия фазы k = 1, 2 соответственно;  $\overline{k} = \{1, 2\} \setminus \{k\}$ ; величины  $\nu$ ,  $\mu$  – релаксационные параметры. Для объёмных долей выполнено условие нормировки  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ . Полная энергия k-й фазы определена равенством

$$E_k = \mathcal{U}_k + \boldsymbol{u}_k \cdot \boldsymbol{u}_k/2,$$

где  $\mathcal{U}_k$  – внутренняя энергия фазы.

Уравнения модели включают в себя: уравнение динамики для объёмной доли (1a), законы сохранения массы (1b), импульса (1c) и энергии (1d).

Величины  $u_I$  и  $P_I$  являются так называемыми интерфейсными скоростью и давлением и могут быть определены целым рядом способов (см. [1, 16–18]). В настоящей работе используется вариант, предложенный в оригинальной работе [1]:

$$\boldsymbol{u}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{u}_{1}, \quad P_{\mathrm{I}} = P_{2}, \tag{2}$$

где  $u_1$  – скорость более сжимаемой фазы,  $P_2$  – давление менее сжимаемой фазы.

Термодинамические свойства фаз определяются уравнениями состояния (УрС) и имеют вид  $\mathcal{U}_k = \mathcal{U}_k(P_k, \rho_k)$ . В данной работе рассматриваются УрС двух видов. Первое – это хорошо известное двучленное УрС

$$\mathcal{U}_k = \frac{P_k + \gamma_k P_{\infty,k}}{(\gamma_k - 1)\rho_k},\tag{3}$$

где  $P_{\infty,k}$  и  $\gamma_k$  – референсное давление и показатель адиабаты. Вторым является УрС Ми– Грюнайзена [19, раздел 2.7.6, с. 81]

$$\mathcal{U}_{k} = \frac{P_{k} - P_{k}^{\mathrm{x}}(\rho_{k})}{(\gamma_{k} - 1)\rho_{k}} + \mathcal{U}_{k}^{\mathrm{x}}(\rho_{k}), \quad \mathcal{U}_{k}^{\mathrm{x}} = \int_{\rho_{k}^{0}}^{\rho_{k}} \frac{P_{k}^{\mathrm{x}}(\rho_{k})}{\rho_{k}^{2}} d\rho_{k},$$
$$P_{k}^{\mathrm{x}}(\rho_{k}) = A_{1,k} \left(\frac{\rho_{k}^{0}}{\rho_{k}}\right)^{-E_{1,k}} - A_{2,k} \left(\frac{\rho_{k}^{0}}{\rho_{k}}\right)^{-E_{2,k}}, \tag{4}$$

где  $A_k$ ,  $E_k$  – параметры.

Правые части уравнений (1) описывают взаимодействие фаз и часто называются *релаксационными* в силу того, что они обеспечивают релаксацию скоростей и давлений фаз к одинаковому значению. Численные эксперименты, описанные в настоящей работе, соответствуют физической постановке с прямым разрешением межфазных границ. В постановках такого типа характерные времена релаксации много меньше характерных времён протекания других газодинамических процессов. В этом случае параметры  $\mu$  и  $\nu$  велики, и в этом смысле система уравнений (1) является "жёсткой".

Отметим, что система уравнений (1) содержит "неконсервативные произведения" вида  $P_{\rm I} \nabla \alpha_k$ ,  $P_{\rm I} u_{\rm I} \nabla \alpha_k$  и не может быть записана в консервативной форме. Эта особенность является типичной для целого ряда многофазных многоскоростных моделей (см. [20]). Обобщённое решение и соответствующие соотношения Ранкина–Гюгонио (РГ) для неконсервативных систем уравнений позволяет сформулировать теория DLM [13, 21], которая в дальнейшем также используется для построения численной схемы.

Для системы уравнений (1) может быть построен её предел при  $\mu, \nu \to +\infty$ . Соответствующая модель является равновесной по скоростям и давлениям и носит название *модели Kanuлы* [5]. Уравнения модели приведены в приложении. В силу того, что далее рассматривается случай жёсткой релаксации, соответствующий большим значениям  $\mu$  и  $\nu$ , представляется естественным сравнивать численные решения уравнений (1) с точным аналитическим решением модели Капилы. Точное решение задачи Римана о распаде разрыва для модели Капилы строится в приложении.

2. Вычислительный алгоритм. Использованный алгоритм численного решения системы уравнений (1) основан на применении следующих подходов: расщеплении по физическим процессам для расчёта релаксационных правых частей системы, разрывном методе Галёркина для решения однородной системы (1) и неявном многошаговом методе Гира [22, гл. 3, с. 331] для интегрирования "жёстких" правых частей системы (1). Далее в настоящем пункте описаны основные компоненты полного алгоритма решения задачи.

**2.1.** Разрывный метод Галёркина. Рассмотрим трёхмерный вариант неоднородной нелинейной гиперболической системы уравнений, записанной в декартовой системе координат:

$$\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t} + \sum_{\xi=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\xi}}{\partial x_{\xi}} + \sum_{\xi=1}^{3} \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\xi}(\boldsymbol{Q}) \frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial x_{\xi}} = \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{Q}),$$
(5)

где  $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, L_3] \subset \mathbb{R}^3, t \in [0, T] \subset \mathbb{R}^+, \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, t) = (Q_1, \ldots, Q_M) \in \Omega_q \subset \mathbb{R}^M, M$ – общее число компонент вектора  $\boldsymbol{Q}, \Omega_q$  – фазовое пространство вектора  $\boldsymbol{Q}, \mathcal{F}_{\xi}$  – вектор потока,  $\mathcal{B}_{\xi}$  – матрица, отвечающая квазилинейной неконсервативной части уравнений,  $\boldsymbol{S}$  – источники, описывающие механическую релаксацию.

Введём разбиение  $\{\omega_{ijk}\}$  (декартова сетка) области  $\Omega$  и обозначим ячейку сетки (конечный элемент)  $\omega_{ijk} = [x_{1,i}, x_{1,i+1}] \times [x_{2,j}, x_{2,j+1}] \times [x_{3,k}, x_{3,k+1}]$ , где  $x_{1,i} = i\Delta x_1$  ( $0 \leq i \leq N_1$ ),  $x_{2,j} = j\Delta x_2$  ( $0 \leq j \leq N_2$ ),  $x_{3,k} = k\Delta x_3$  ( $0 \leq k \leq N_3$ ). Пусть индекс  $\alpha$  каким-либо образом упорядочивает тройки индексов (i, j, k). Обозначим через  $\mathcal{V}_h^p(\Omega)$  подпространство элементов из  $\mathcal{L}^1(\Omega)$ , проекции которых на ячейки  $\omega_{\alpha}$  принадлежат векторному пространству  $\mathcal{P}^p(\omega_{\alpha})$  полиномов степени p:

$$\mathcal{V}_h^p = \{ v \in \mathcal{L}^1(\Omega) : v |_{\omega_\alpha} \in \mathcal{P}^p(\omega_\alpha), \quad 1 \le \alpha \le N \}, \quad N = N_1 N_2 N_3.$$

Представим решение Q(x,t) в ячейке  $\omega_{\alpha}$  конечномерной аппроксимацией  $Q_h \in \mathcal{V}_h^p$ :

$$\boldsymbol{Q}_{h}(\boldsymbol{x},t)|_{\omega_{\alpha}} = \sum_{l=0}^{p} \psi_{\alpha}^{(l)}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{Q}_{\alpha}^{(l)}(t), \qquad (6)$$

где  $\psi_{\alpha}^{(l)}$  – полином Лежандра степени *l*. Для получения полудискретной системы уравнений относительно приближённого решения  $Q_h(x,t)$  подставим представление (6) в систему (5), затем умножим (5) на пробную функцию  $v_h \in \mathcal{V}_h^p$  и проинтегрируем получившееся тождество по ячейке  $\omega_{\alpha}$ :

$$\int_{\omega_{\alpha}} \frac{\partial \boldsymbol{Q}_{h}}{\partial t} v_{h}(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} + \sum_{\xi=1}^{3} \int_{\omega_{\alpha}} \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\xi}}{\partial x_{\xi}} v_{h}(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} + \sum_{\xi=1}^{3} \int_{\omega_{\alpha}} \left[ \boldsymbol{\mathcal{B}}_{\xi}(\boldsymbol{Q}_{h}) \frac{\partial \boldsymbol{Q}_{h}}{\partial x_{\xi}} \right]_{\Psi} v_{h}(\boldsymbol{x}) = \int_{\omega_{\alpha}} \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{Q}_{h}) v_{h}(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x}.$$
(7)

Для определения обобщённого решения (7) в случае неконсервативных систем ( $\mathcal{B}_{\xi} \neq 0$ ) в настоящей работе используется распространённый подход, основанный на применении теории DLM [13, 21]. В рамках этого подхода для корректного определения "неконсервативного произведения" вводится липшицево отображение  $\Psi : [0,1] \times \Omega_q \times \Omega_q \to \Omega_q$  (путь), которое "соединяет" значения решения по разные стороны от разрыва в точке  $\boldsymbol{x}_d$  по направлению внешней единичной нормали  $\boldsymbol{n}, \ \Psi(\boldsymbol{Q}^-, \boldsymbol{Q}^+; 0) = \boldsymbol{Q}^-, \ \Psi(\boldsymbol{Q}^-, \boldsymbol{Q}^+; 1) = \boldsymbol{Q}^+, \ \Psi(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}; \eta) = \boldsymbol{Q},$  $\boldsymbol{Q}^{\pm} = \lim_{h \to 0} \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}_d \pm h\boldsymbol{n}).$ 

Третье слагаемое в левой части системы (5) имеет вид "неконсервативного" произведения  $\mathcal{B}_{\xi}(Q)\partial Q/\partial x_{\xi}$ . Его значения в слабом смысле могут быть определены следующим образом [13]:

$$\int_{\omega_{\alpha}} \left[ \mathcal{B}_{\xi}(\mathbf{Q}_{h}) \frac{\partial \mathbf{Q}_{h}}{\partial x_{\xi}} \right]_{\Psi} v_{h}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\omega_{\alpha}^{0}} \mathcal{B}_{\xi}(\mathbf{Q}_{h}) \frac{\partial \mathbf{Q}_{h}}{\partial x_{\xi}} v_{h}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \\
+ \int_{\partial\omega_{\alpha}} \left( \int_{0}^{1} \mathcal{B}_{\xi}(\Psi(\mathbf{Q}^{-}, \mathbf{Q}^{+}; s)) \frac{\partial \Psi(\mathbf{Q}^{-}, \mathbf{Q}^{+}; \eta)}{\partial \eta} d\eta \right) v_{h}(\mathbf{x}) d\sigma,$$
(8)

где  $\omega_{\alpha}^{0} = \omega_{\alpha} \setminus \partial \omega_{\alpha}$ ,  $\boldsymbol{n}$  – внешняя единичная нормаль к  $\partial \omega_{\alpha}$ . Заметим, что данное определение существенно зависит от выбранного пути  $\Psi$ . В дальнейшем используется линейный путь  $\Psi(\boldsymbol{Q}^{-}, \boldsymbol{Q}^{+}; \eta) = \boldsymbol{Q}^{-} + \eta(\boldsymbol{Q}^{+} - \boldsymbol{Q}^{-})$ . Выбор пути  $\Psi$  является важным компонентом численного алгоритма – он определяет решение задачи Римана системы (1) (см. [13, 21]).

На основе сделанных выше построений численная схема для разрывного метода Галёркина может быть записана в виде

$$\int_{\omega_{\alpha}} \frac{\partial \boldsymbol{Q}_{h}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} v_{h}(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} - \sum_{\xi=1}^{3} \int_{\omega_{\alpha}} \boldsymbol{\mathcal{F}}_{\xi} \frac{\partial v_{h}(\boldsymbol{x})}{\partial x_{\xi}} \, d\boldsymbol{x} + \sum_{\xi=1}^{3} \int_{\omega_{\alpha}^{0}} \boldsymbol{\mathcal{B}}(\boldsymbol{Q}_{h}) \frac{\partial \boldsymbol{Q}_{h}}{\partial x_{\xi}} v_{h}(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} +$$

$$+ \int_{\partial \omega_{\alpha}} v_h(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{D}_n(\boldsymbol{x}) \, d\sigma = \int_{\omega_{\alpha}} \boldsymbol{\mathcal{S}}(\boldsymbol{Q}_h) v_h(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x}.$$
(9)

В настоящей работе в качестве численного потока используется поток HLLEM [8]:

$$oldsymbol{D}_n = rac{s_{ ext{out}} \mathcal{F}(oldsymbol{Q}_{ ext{in}}) - s_{ ext{in}} \mathcal{F}(oldsymbol{Q}_{ ext{out}})}{s_{ ext{out}} - s_{ ext{in}}} n + \kappa rac{s_{ ext{out}} s_{ ext{in}}}{s_{ ext{out}} - s_{ ext{in}}} (oldsymbol{Q}_{ ext{out}} - oldsymbol{Q}_{ ext{in}}) - \kappa rac{s_{ ext{in}}}{s_{ ext{in}} - s_{ ext{out}}} [\widetilde{B}(oldsymbol{Q}_{ ext{out}}, oldsymbol{Q}_*)(oldsymbol{Q}_* - oldsymbol{Q}_{ ext{out}}) + \widetilde{B}(oldsymbol{Q}_*, oldsymbol{Q}_{ ext{in}})(oldsymbol{Q}_{ ext{in}} - oldsymbol{Q}_*)],$$

где  $\kappa = n_1 + n_2 + n_3$ ,  $Q_{in} \in \omega_{\alpha}$ ,  $Q_{out} \in \omega_{\beta}$ , где  $\omega_{\beta}$  – ячейка, смежная к  $\omega_{\alpha}$  через элемент её поверхности. Скорость распространения волн в задаче Римана оценивается следующим образом:

$$s^{\mathrm{in/out}} = \begin{cases} \min/\max(0, \mathbf{\Lambda}(\mathbf{Q}_{\mathrm{in/out}}), \mathbf{\Lambda}(\hat{\mathbf{Q}})), & \text{если } \kappa > 0, \\ \max/\min(0, \mathbf{\Lambda}(\mathbf{Q}_{\mathrm{in/out}}), \mathbf{\Lambda}(\hat{\mathbf{Q}})) & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad \hat{\mathbf{Q}} = 2^{-1}(\mathbf{Q}_{\mathrm{in}} + \mathbf{Q}_{\mathrm{out}}).$$

Рассматривая произвольное  $v_h \in \mathcal{V}_h^p$ ,  $v_h(x)|_{\omega_\alpha} \in \text{span}\{\psi_\alpha^{(l)}\}$ , получаем следующую полудискретную систему уравнений относительно переменных  $\{Q_\alpha^{(l)}\}$ , определённых в (6):

$$\mathbf{M}\frac{d\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{\alpha}}{dt} = \mathbf{H}(\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{\alpha}) + \mathbf{I}(\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{\alpha}).$$
(10)

Здесь  $\tilde{Q}_{\alpha} = (Q_{0,\alpha}^{(0)}, \dots, Q_{0,\alpha}^{(p)}, Q_{1,\alpha}^{(0)}, \dots, Q_{M,\alpha}^{(p)})$  – вектор неизвестных. Его компоненты  $Q_{m,\alpha}^{(l)}$  в дальнейшем будем называть *l-й гармоникой*  $(l = \overline{0,p})$  *m*-й компоненты вектора  $Q_{\alpha}$ . Матрица  $M \in \mathbb{R}^{(p+1)\times(p+1)}$  является матрицей Грама с компонентами  $[M]_{ml} = \int_{\omega_{\alpha}} \psi_{\alpha}^{(l)} \psi_{\alpha}^{(m)} dx$ , вектор  $\mathbf{H}(\tilde{Q}_{\alpha})$  – аппроксимация дифференциального оператора в левой части системы (5), вектор  $\mathbf{I}(\tilde{Q}_{\alpha})$  соответствует аппроксимации правой части системы (5):

$$\mathbf{I}_{m}^{(l)} = \int_{\omega_{\alpha}} \boldsymbol{\mathcal{S}}_{m}(\boldsymbol{Q}_{h})\psi_{\alpha}^{(l)} d\boldsymbol{x}.$$
(11)

Одна из наиболее простых стратегий решения системы (10) – расщепление по процессам первого порядка. Разобьём временно́й интервал на части точками  $\{t^n\}$ . Далее на каждом временно́м шаге  $t \in [t^n, t^{n+1}]$  сначала решается задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\mathbf{M}\frac{d\boldsymbol{Q}_{\alpha}}{dt} = \mathbf{H}(\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{\alpha}), \quad t \in (t^n, t^{n+1}], \tag{12}$$

с начальными данными  $\widetilde{Q}^0_{\alpha} = \widetilde{Q}_{\alpha}(t^n)$  для определения "промежуточного" решения  $\widetilde{Q}_{\alpha,\mathrm{H}} = \widetilde{Q}_{\alpha}(t^{n+1})$ . Затем решается задача Коши для системы ОДУ

$$\mathbf{M}\frac{d\tilde{\boldsymbol{Q}}_{\alpha}}{dt} = \mathbf{I}(\tilde{\boldsymbol{Q}}_{\alpha}), \quad t \in (t^n, t^{n+1}],$$
(13)

с начальными данными  $\widetilde{Q}_{\alpha,\mathrm{H}}$ . Её решение  $\widetilde{Q}_{\alpha}$  рассматривается как решение задачи (10).

Для интегрирования по времени однородной системы (12) далее используется вариант метода Рунге–Кутты TVD/RK3 [12] с лимитированием консервативных переменных на каждом шаге метода. В настоящей работе используется многостадийный лимитер на основе лимитера WENO-S и дополнительных лимитирующих процедур, обеспечивающих физическую корректность решения – положительность давления, внутренней энергии и объёмных долей фаз.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ том 58 № 7 2022

981

Процедура лимитирования будет описана в п. 2.3. Для интегрирования по пространству используется метод квадратур Гаусса–Лежандра.

Для интегрирования системы уравнений (13) используется неявный метод Гира с автоматическим выбором шага интегрирования, описанный в п. 2.2.

**2.2.** Алгоритм расчёта релаксационных слагаемых. Задача Коши для ОДУ (13) решается неявным линейным многошаговым методом Гира [22, гл. 3, с. 331]. на временном интервале  $t \in (t^n, t^{n+1}]$ . Разобьём временной интервал на части точками  $t_0^n$ ,  $t_1^n$ , ...,  $t_{\chi-1}^n$ , где  $t_{j+1}^n = t_j^n + \tau_j$ ,  $t_0^n = t_n$ ,  $t_{\chi-1}^n = t_{n+1}$ . Таким образом,  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  – шаг интегрирования газодинамической части задачи, а  $\tau_j$  – шаг интегрирования релаксационной части. Разностная схема решения задачи Коши для (13) имеет следующий вид:

$$\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{\alpha}^{0} = \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{\alpha}(t^{n}); \quad \sum_{k=0}^{K} \zeta_{k} \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{\alpha}^{j+1-k} = \tau_{j} \beta_{0} \boldsymbol{R}(\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{\alpha}^{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots$$
(14)

Здесь  $\tau_j = \text{const}$ ,  $\mathbf{R} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}$ . Аппроксимации релаксационных членов **I**, определённых в (11), рассчитываются численно методом квадратур Гаусса–Лежандра.

В дальнейшем все численные расчёты проводятся методом Гира 6-го порядка (K = 6). Коэффициенты метода представлены в табл. 1. Для начала счёта требуется знать значения  $\widetilde{Q}^{j}_{\alpha}$ ,  $j = \overline{1, K - 1}$ . Для этого рекуррентно используется метод Гира, т.е. сначала для нахождения  $\widetilde{Q}^{1}_{\alpha}$  используется метод Гира первого порядка, затем второго для  $\widetilde{Q}^{2}_{\alpha}$  и т.д.

K	$\beta$	$\zeta_1$	$\zeta_2$	$\zeta_3$	$\zeta_4$	$\zeta_5$	$\zeta_6$
1	1	-1					
2	2/3	-4/3	1/3				
3	6/11	-18/11	9/11	-2/11			
4	12/25	-48/25	36/25	-16/25	3/25		
5	60/137	-300/137	300/137	-200/137	75/137	-12/137	
6	60/147	-360/147	450/147	-400/147	225/147	-72/147	10/147

**Таблица 1.** Коэффициенты метода Гира до 6-го порядка,  $\zeta_0=1$ 

Нелинейная система уравнений (14) решается численно методом Ньютона:

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}(\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{\alpha}^{j+1})}{\partial \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{\alpha}^{j+1}} \Big|_{\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{\alpha}^{j+1,s}} (\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{\alpha}^{j+1,s+1} - \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{\alpha}^{j+1,s}) = -\boldsymbol{F}(\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{\alpha}^{j+1,s}), \tag{15}$$

где индекс s обозначает номер итерации,  $\widetilde{Q}_{\alpha}^{j+1,0} = \widetilde{Q}_{\alpha}^{j}$  соответствует s = 0. Функция F имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{F}(\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{\alpha}^{j+1}) = \zeta_0 \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{\alpha}^{j+1} - \tau_j \beta_0 \boldsymbol{R}(\widetilde{\boldsymbol{Q}}_{\alpha}^{j+1}) - \sum_{k=1}^K \zeta_p \widetilde{\boldsymbol{Q}}_{\alpha}^{j+1-k}$$

Матрица Якоби  $\partial F(\tilde{Q}^{j+1}_{\alpha})/\partial \tilde{Q}^{j+1}_{\alpha}$  в (15) вычисляется с применением численного дифференцирования или аналитически (для каждого численного расчёта ниже это указывается отдельно). Итерации метода Ньютона продолжаются до тех пор, пока величина  $r = \max_{m} |r_m|$  не станет меньше заданного значения. Здесь  $r_m$  определены следующим образом:

$$r_{m} = \begin{cases} \frac{\widetilde{Q}_{\alpha,m}^{j+1,s+1} - \widetilde{Q}_{\alpha,m}^{j+1,s}}{\widetilde{Q}_{\alpha,m}^{j+1,s+1}}, & \text{если } |\widetilde{Q}_{\alpha,m}^{j+1,s+1}| > 1, \\ \widetilde{Q}_{\alpha,m}^{j+1,s+1} - \widetilde{Q}_{\alpha,m}^{j+1,s} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$
(16)

Шаг  $\tau_j$  может быть переменным и определяется адаптивно. В начальный момент  $\tau_0 = \Delta t/6$ , где  $\Delta t$  – шаг интегрирования задачи (12). В случае если превышено максимальное

число  $N_{\text{max}}$  ньютоновских итераций (далее  $N_{\text{max}} = 10$ ) или если решение сходится к нефизичным результатам (отрицательное давление или объёмная доля и т.д.), то шаг интегрирования уменьшается. В случае когда число итераций меньше минимального значения  $N_{\text{min}}$ (далее  $N_{\text{min}} = 3$ ), шаг интегрирования увеличивается. При этом если шаг интегрирования меняется, то необходимо вернуться к первому шагу метода Гира и рекуррентно пересчитать значения  $\tilde{Q}^{j}_{\alpha}$ ,  $j = \overline{1, K - 1}$ , для нового значения временно́го шага  $\tau$ .

Коэффициенты релаксации  $\mu$  и  $\nu$  в системе (13) либо задаются постоянными, либо рассчитываются в каждой точке пространства динамически таким образом, чтобы фазовые давления и скорости релаксировали за один газодинамический временной шаг  $\Delta t$ . Соответствующая оценка строится следующим образом. Релаксация давлений и скоростей в случае межфазных соотношений (2) и УрС (3) может быть записана в виде

$$\frac{d(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2)}{dt} = -\mu(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) \left(\frac{1}{\alpha_1 \rho_1} + \frac{1}{\alpha_2 \rho_2}\right),$$

$$\frac{(P_1 - P_2)}{dt} = -\nu(P_1 - P_2) \left(\frac{P_1 + C_{1a}P_1 + C_{1b}}{\alpha_1 C_{1a}} + \frac{P_1 + C_{2a}P_1 + C_{2b}}{\alpha_2 C_{2a}}\right),$$
(17)

где  $C_{ka} = 1/(\gamma_k - 1)$ ,  $C_{kb} = \gamma_k P_{\infty,k}/(\gamma_k - 1)$ . Здесь также предполагается, что релаксация скоростей не влияет на релаксацию давлений. Другими словами, в первом уравнении в (17) фиксировано давление. Тогда коэффициенты релаксации можно оценить следующим образом:

$$\mu = \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{1}{\alpha_1 \rho_1} + \frac{1}{\alpha_2 \rho_2} \right)^{-1}, \quad \nu = \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{P_{\rm I} + C_{1a} P_1 + C_{1b}}{\alpha_1 C_{1a}} + \frac{P_{\rm I} + C_{2a} P_1 + C_{2b}}{\alpha_2 C_{2a}} \right)^{-1}.$$
 (18)

Такой выбор значений  $\mu$  и  $\nu$  обеспечивает релаксацию за один временной шаг  $\Delta t$ .

2.3. Алгоритм монотонизации решения. В качестве основного ограничителя для монотонизации решения используется ограничитель WENO-S, предложенный в работе [23]. Однако после его использования полученные значения компонент решения могут быть нефизичными – особенно вблизи зоны резкого изменения объёмной доли. Для решения этой проблемы используется дополнительное лимитирование решения. Общая схема лимитирования выглядит следующим образом.

1. Применение ограничителя, обеспечивающего положительность объёмных долей и плотностей фаз. Данный ограничитель обозначим через  $\Lambda_1$  [24].

2. Применение ограничителя WENO-S (обозначим его через  $\Lambda_2$ ).

3. Применение ограничителя, обеспечивающего положительность давлений фаз (обозначим его через  $\Lambda_3$ ).

Рассмотрим подробнее каждый из этапов лимитирования.

**Ограничитель**  $\Lambda_1$ . Пусть имеется вектор Q(x,t) с компонентами  $Q_m(x,t)$ . В ячейке  $\omega_{\alpha}$  согласно представлению (6) величины  $Q_m(x,t)$  имеют вид

$$(Q_m)_h(\boldsymbol{x},t)|_{\omega_\alpha} = \sum_{l=1}^k \psi_\alpha^{(l)}(\boldsymbol{x}) Q_{m,\alpha}^{(l)}(t), \quad m = \overline{1, M}.$$

Введём среднее значение  $Q_m(\boldsymbol{x},t)$  равенством

$$\overline{Q}_m = rac{1}{|\omega_{lpha}|} \int\limits_{\omega_{lpha}} (Q_m)_h(\boldsymbol{x}, t)|_{\omega_{lpha}} \, d\boldsymbol{x}.$$

Процесс лимитирования сводится к пересчёту всех величин по следующей формуле:

$$(\tilde{Q}_m)_h(\boldsymbol{x},t) = \overline{Q}_m + \theta((Q_m)_h(\boldsymbol{x},t) - \overline{Q}_m),$$
(19)

где  $\theta$  – параметр. Если область значений  $Q_m$  лежит на интервале (a, b), то для этой величины рассчитывается параметр  $\theta_m$  по формуле

$$\theta_m = \min\left\{\frac{\overline{Q}_m - (a+\varepsilon)}{\overline{Q}_m - (Q_m)_{\min}}, \frac{\overline{Q}_m - (b-\varepsilon)}{\overline{Q}_m - (Q_m)_{\max}}, 1\right\}$$

Если значения  $Q_m$  определены на  $(a, \infty)$ , то

$$\theta_m = \min\left\{\frac{\overline{Q}_m - (a + \varepsilon)}{\overline{Q}_m - (Q_m)_{\min}}, 1\right\},\,$$

где

$$(Q_m)_{\min} = \min_{\omega_{\alpha}} (Q_m)_h(\boldsymbol{x}, t)|_{\omega_{\alpha}} = \min_{\boldsymbol{x}_{\text{gp}}} (Q_m)_h(\boldsymbol{x}_{\text{gp}}, t)|_{\omega_{\alpha}}$$

$$(Q_m)_{\max} = \max_{\omega_{\alpha}} (Q_m)_h(x,t)|_{\omega_{\alpha}} = \max_{\boldsymbol{x}_{gp}} (Q_m)_h(\boldsymbol{x}_{gp},t)|_{\omega_{\alpha}}$$

 $x_{\rm gp}$  – квадратурные точки конечного элемента  $\omega_{\alpha}$ ,  $\varepsilon > 0$  – малая величина (в данной работе  $\varepsilon = 10^{-6}$ ).

Параметр  $\theta_m$  рассчитывается для величин  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1\rho_1, \alpha_2\rho_2\}$ , при этом значения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  определены на (0, 1), значения  $\rho_1$  и  $\rho_2$  определены на  $(0, \infty)$ . Общий коэффициент лимитирования рассчитывается по формуле

$$\theta = \min_{m} \{\theta_m\}.$$

Затем операция лимитирования  $\Lambda_1$  с общим коэффициентом  $\theta$  применяется ко всем компонентам вектора Q по формуле (19).

Ограничитель  $\Lambda_2$ . Ограничитель WENO-S применяется в два шага.

Шаг 1. Идентификация ячеек, в которых решение подлежит лимитированию. В данной работе используется TVB-индикатор [23].

Шаг 2. Применение ограничителя WENO-S для реконструкции решения в отмеченных ячейках.

Рассмотрим лимитер WENO-S. Сначала опишем его одномерный вариант по направлению оси  $Ox_1$ . Рассмотрим ячейки  $\omega_{ijk}$ , где  $i = i_0 - 1, i_0, i_0 + 1, j = j_0, k = k_0$ , а индекс  $\alpha$  их локально упорядочивает как  $\alpha = -1, 0, 1$  соответственно. Реконструкция решения в центральной ячейке  $\alpha = 0$  происходит в соответствии с выражением

$$Q_{m,0}^{\text{new}}(\boldsymbol{x}) = \kappa_{-1}Q_{m,-1}^{\text{mod}}(\boldsymbol{x}) + \kappa_{0}Q_{m,0}(\boldsymbol{x}) + \kappa_{1}Q_{m,1}^{\text{mod}}(\boldsymbol{x}),$$

где

$$\kappa_j = \overline{\kappa}_j \left(\sum_{n=-1,0,1} \overline{\kappa}_n\right)^{-1}, \quad \overline{\kappa}_n = \frac{\gamma_n}{(\varepsilon + \beta_n)^r}, \quad n = -1, 0, 1.$$

Здесь  $\gamma_n$  – линейный вес,  $\varepsilon = 10^{-6}$  и r = 2. Линейные веса должны удовлетворять следующим требованиям:

$$\gamma_0 \gg \gamma_{\pm 1}, \quad \gamma_{-1} + \gamma_0 + \gamma_{+1} = 1.$$

В настоящей работе  $\gamma_0 = 0.998$ ,  $\gamma_{\pm 1} = 0.001$ . Индикатор гладкости  $\beta_{\alpha}$  рассчитывается по формуле

$$\beta_{\alpha} = \sum_{l=1}^{p} \int_{\omega_{\alpha}} \Delta x_{1}^{2l-1} \left( \frac{\partial^{l}}{\partial x_{1}^{l}} Q_{m,\alpha}(\boldsymbol{x}) \right)^{2} dx_{1}, \quad \alpha = -1, 0, 1.$$

Здесь p – степень полинома  $Q_{m,\alpha}(\boldsymbol{x})$ .

Применение ограничителя может быть записано в операторном виде как  $Q_0^{\text{new}} = \Lambda_{2,\xi}Q_0$ для направления вдоль оси  $Ox_{\text{new}}\xi$ . Для многомерного случая и декартовых сеток  $Q_0^{\text{new}} = \Lambda_2 Q_0$ , где  $\Lambda_2 = \Lambda_{2,3}\Lambda_{2,2}\Lambda_{2,1}$ . Ограничитель  $\Lambda_3$ . На данном этапе лимитирования в каждой квадратурной точке ячейки  $\omega_{\alpha}$  вычисляются давления фаз. Если давление какой-либо фазы отрицательно хотя бы в одной точке, то в этой ячейке оставляются только средние величины консервативных переменных.

**3.** Вычислительные эксперименты. Тесты, рассмотренные ниже, соответствуют физической постановке с прямым разрешением межфазных границ. Напомним, что в постановках такого типа предполагается, что все фазы одновременно присутствуют в каждой точке пространства, но объёмные доли всех фаз, кроме одной, пренебрежимо малы всюду за исключением "диффузных границ" – относительно тонких пространственных областей, соответствующих границам раздела фаз среды.

Тесты 1 и 2, предложенные в [19] (разделы 2.7.5 и 2.7.6 соответственно), являются соответственно одномерной задачей Римана о распаде разрыва и задачей о прохождении ударной волны (УВ) через контактную границу двух веществ при больших соотношениях плотностей (из лёгкого в тяжёлое или из тяжёлого в лёгкое) и разных УрС. Эти тесты допускают аналитическое решение в рамках модели Капилы (см. приложение).

Тесты 3–5 исследуют в рамках пространственно двумерной постановки взаимодействие УВ с пузырём криптона, азота или гелия в воздухе. Полученные численные расчёты сравниваются с экспериментальными данными [25], а также с численными расчётами, полученными другими авторами [26].

Численные эксперименты проводились с шагом интегрирования, рассчитанным из условия Куранта:

$$\Delta t = \operatorname{CFL} \frac{\min(\Delta x_{\xi,k})}{\lambda_{\max}},\tag{20}$$

где CFL = 0.9 для p = 0 и CFL = 0.2 для p = 1 (здесь p – порядок полинома Лежандра в (6)),  $\lambda_{\text{max}}$  – максимальное собственное значение системы уравнений (1).

**Тест 1.** Тест характеризуется тем, что распад разрыва происходит на контактной границе при больших соотношениях давлений (×1000). Первая фаза представляет собой воду, а вторая – воздух ( $\rho_1/\rho_2 \approx 20$ ). Начальные данные приведены в табл. 2. Контактный разрыв (КР) в начальный момент времени задан в точке  $x_0$  для всех переменных. Коэффициенты релаксации оцениваются по формуле (18). Численные эксперименты проводились в расчётной области [0, 1].

Тест	Начальны	е данные	Тип УрС	Параметры	
1001	$x < x_0$	$x > x_0$	rini o po		
1	$P_1 = 10^9, P_2 = 10^9,$	$P_1 = 10^6, P_2 = 10^6,$	УрС (3)	$\gamma_1 = 4.4,  \pi_1 = 6 \cdot 10^8,$	
	$\rho_1 = 1000, \ \rho_2 = 50,$	$\rho_1 = 1000, \ \rho_2 = 50,$		$\gamma_2 = 1.4, \ \pi_2 = 0,$	
	$u_1 = 0,  u_2 = 0,$	$u_1 = 0,  u_2 = 0,$		$x_0 = 0.7$	
	$\alpha_1 = 1 - 10^{-4}$	$\alpha_1 = 10^{-4}$			
2	$P_1 = P_2 = 10^{-5},$	$P_1 = P_2 = 10^{-5},$	фаза 1: УрС (3)	$\gamma_1 = 1.4, \ \pi_1 = 0,$	
	$\rho_1 = 0.125, \ \rho_2 = 7.82,$	$\rho_1 = 0.125, \ \rho_2 = 7.82,$	фаза 2: УрС (4)	$\gamma_2 = 4.54777,$	
	$u_1 = u_2 = 0$	$u_1 = u_2 = 0,$		$A_{1,2} = A_{2,2} = 62.6,$	
	$\alpha_1 = 1 - 10^{-4}$	$\alpha_1 = 10^{-4}$		$E_{1,2} = 4, E_{2,2} = 1,$	
				$x_0 = 0.4$	

Таблица 2. Начальные данные 1D расчётов

Удельная внутренняя энергия *e*, представленная на рис. 1 и рис. 2, рассчитывается следующим образом:

$$e = \frac{\mathcal{U}_1 \alpha_1 \rho_1 + \mathcal{U}_2 \alpha_2 \rho_2}{\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2}$$

На рис. 1 показано сравнение результатов численных расчётов для N = 2500 с аналитическим решением, полученным в приложении, на момент времени  $t = 2.2 \cdot 10^{-4}$  с (см. табл. 2). Видно, что численные результаты достаточно хорошо воспроизводят аналитическое решение. На кривой давления результаты с p = 1 менее диссипативны, чем результаты для p = 0.



**Рис. 1.** Распределения для всех переменных в тесте 1 (1 – аналитическое решение, 2 – численный расчёт с p = 1, 3 – численный расчёт с p = 0).

**Тест 2.** Тест характеризуется тем, что УВ формируется в первой фазе, менее плотной, а затем проходит через КР из лёгкого вещества в тяжёлое. Таким образом, в отличие от предыдущего теста положения КР и скачка давления не совпадают в начальный момент времени. В начальный момент времени КР задан в точке  $x_0$  (см. табл. 2). Отношение плотностей сред  $\rho_2/\rho_1 \approx 60$ . Начальные данные представлены в табл. 2. На левой границе задаются следующие краевые условия:

$$\alpha_2 = 10^{-4}, \quad \alpha_1 = 1 - \alpha_2, \quad \alpha_1 \rho_1 = 0.1249875, \quad \alpha_2 \rho_2 = 0.000782,$$

$$\alpha_1 \rho_1 u_1 = 0.288596, \quad \alpha_2 \rho_2 u_2 = 0.0018.$$

На правой границе устанавливаются условия симметрии. Численные эксперименты проводились в расчётной области [-1.4, 1], а результаты расчётов представлены для расчётной области [0,1]. Коэффициенты релаксации при расчёте на временном интервале  $(t^n, t^{n+1}]$  задаются равными  $\lambda = 5 \cdot 10^9 \text{ кг/(м \cdot c)}, \ \nu_k^{(n)} = \alpha_{1,k}^{(n)} \alpha_{2,k}^{(n)} \cdot 10^6 \text{ Па}^{-1} \cdot \text{c}^{-1}, \ \text{где} \ \alpha_{i,k}^p$  – значение объёмной доли фазы i = 1, 2 в ячейке с номером k на временном слое p.

Результаты численных экспериментов представлены на рис. 2 на момент времени t = 0.606323 с для N = 5000 (p = 0, 1), N = 40000 (p = 0) и N = 160000 (p = 0). Обратим внимание на пик в окрестности УВ, который возникает в результате взаимодействия УВ с КР. Видно, что численное решение сходится к аналитическому решению, однако очень медленно. Такие результаты связаны с наличием в системе (1) "неконсервативных произведений".

Проблемы со сходимостью численного решения неконсервативной системы уравнений к обобщённому решению хорошо известны [7, 8] и подробно обсуждаются в работе [14]. Связано это с тем, что в отличие от консервативных систем соотношения РГ для неконсервативных систем зависят от структуры разрыва, т.е. от производных высших порядков [14]. Задавая путь в теории DLM, мы неявно задаём уравнение для определения структуры разрыва. С другой стороны, первое дифференциальное приближение разностной схемы, описанной в п. 2, зависит не только от заданного пути, но и от численной вязкости. Таким образом, уравнение для определения структуры разрыва, которое используется для получения аналитического решения, не совпадает с первым дифференциальным приближением численной схемы. Системное решение этой проблемы в настоящее время неизвестно.

![](_page_10_Figure_2.jpeg)

Рис. 2. Распределения для всех переменных в тесте 2: 1 – аналитическое решение; 2 – N = 5000, p = 0; 3 – N = 5000, p = 1; 4 – N = 40000, p = 0; 5 – N = 160000, p = 0.

**Тест 3–5.** В данной серии экспериментов исследуется прохождение УВ через пузырек гелия, азота или криптона диаметром  $D_0 = 0.4$  м, содержащийся в ударной трубе. Для фаз используется УрС (3) с параметрами, указанными в табл. 3. Термодинамические параметры пузырька и окружающего воздуха приведены в табл. 3 (референсное давление  $P_{\infty} = 0$ ). Схематическое представление расчётной области с размерами L = 0.3 м, H = 0.08 м,  $X_0 = 0.05$  м представлено на рис. 3. В камере низкого давления (КНД) задаются нормальные начальные условия, а в камере высокого давления (КВД) –  $P_0 = 249\,090$  Па. На твердых стенках устанавливаются условия симметрии. Численные эксперименты проводились на расчётной сетке для  $N_1 = 900$ ,  $N_2 = 240$  с p = 1. Коэффициенты релаксации оцениваются по формуле (18).

Физические свойства	Воздух	Гелий	Азот	Криптон
Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	1.29	0.167	1.25	3.506
Скорость звука $c$ , м/с	340	1007	367	220
Показатель адиабаты $\gamma$	1.4	1.67	1.67	1.67

Таблица 3. Термодинамические свойства воздуха и пузырька

Динамика прохождения УВ через пузырёк зависит от числа Атвуда

$$A = \frac{\rho_{\rm b} - \rho_{\rm s}}{\rho_{\rm b} + \rho_{\rm s}},$$

где  $\rho_{\rm b}$  – плотность пузырька,  $\rho_{\rm s}$  – плотность окружающей среды. После того как фронт УВ достигает газового пузырька, он перестаёт быть плоским, так как одна часть волны взаимодействуют с пузырьком (в дальнейшем будем называть её проходящей УВ), а другая нет (падающая УВ). Если плотность газового пузырька больше, чем плотность окружающей среды (A > 0), то УВ по газовому пузырьку распространяется медленнее. Соответственно, если плотность газового пузырька меньше, чем плотность окружающий среды (A < 0), то УВ по газовому пузырьку распространяется медленнее. Соответственно, если плотность газового пузырька меньше, чем плотность окружающий среды (A < 0), то УВ по газовому пузырьку распространяется быстрее. Результаты численных экспериментов по скорости распространения падающей и проходящей УВ представлены на рис. 4, а (криптон), рис. 4, в (гелий) и рис. 4, г (азот). Видно, что скорость проходящей УВ для криптона меньше, чем скорость падающей УВ (A = 0.4621), выше для гелия (A = -0.7708) и практически совпадают для азота (A = -0.0157). Наблюдается хорошее согласие полученных численных результатов с экспериментальными данными по скорости распространения падающей и проходящей УВ.

![](_page_11_Figure_2.jpeg)

Рис. 3. Схематическое представление расчётной области для тестов 3–5.

Эволюция газового пузырька исследуется путём отслеживания значений решения в точках 1 и 2, связанных с межфазной границей пузырька (см. рис. 3). Экспериментальные данные для точки 2 в [25] представлены только для азота. Для обработки результатов численных расчётов по определению положения межфазной границы устанавливалось пороговое значение  $\alpha_{\rm cr}$ . На рис. 4 представлены результаты с  $\alpha_{\rm cr} = 0.1$  и  $\alpha_{\rm cr} = 0.3$ . Видно, что полученные численные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными по описанию эволюции газового пузырька.

На рис. 5 представлена структура волн, которая формируется при взаимодействии пузырька азота и криптона с ударной волной (УВ). На рис. 5, а видно, что проходящая УВ медленнее падающей УВ (случай A = 0.4621), а при прохождении УВ через пузырёк азота её фронт практически не деформируется (случай A = -0.0157).

В работе [26] приведены также численные результаты для рассматриваемых постановок. Указанная работа отличается от настоящей тем, что в ней рассматривается равновесная по скорости модель [5]. Напомним, что в настоящей работе использовалась полностью неравновесная модель, а равновесие по скорости и давлению обеспечивается "жёсткой" механической релаксацией. На рис. 4 также видно согласие полученных численных расчётов с результатами численных расчётов, полученных в работе [26].

Заключение. В работе рассматривается полностью неравновесная модель Баера–Нунциато с релаксационными слагаемыми. Вычислительный алгоритм для решения этой модели включает в себя решение гиперболической части с помощью разрывного метода Галёркина с использованием метода Рунге–Кутты для интегрирования по времени, вычисление релаксационных слагаемых, а также монотонизация решения с использованием ограничителя, обеспечивающего положительность объёмных долей и плотностей, а также ограничителя WENO-S. В работе показано, что полученный вычислительный алгоритм демонстрирует достаточно хорошее совпадение рассчитанных данных с экспериментальными в ряде тестовых расчётов.

![](_page_12_Figure_1.jpeg)

Рис. 4. x - t диаграммы в тестах 3 (а, б), 4 (в,г) и 5 (д, е) для падающей и проходящей УВ – а, в, д: 1 – численный расчёт; 2 – эксперимент 1 [25]; 3 – эксперимент 2 [25]; 4 – численные расчёты [26] (тёмные значки – падающая УВ, светлые – проходящая УВ); x - t диаграммы для точки межфазной границы – б, г, е: 1 – численный расчёт,  $\alpha_{cr} = 0.3$ ; 2 – численный расчёт,  $\alpha_{cr} = 0.1$ ; 3 – эксперимент 1 [25]; 4 – эксперимент 2 [25]; 5 – численные расчёты [26] (тёмные значки – точка 1, светлые – точка 2).

Приложение. Задача Римана о распаде разрыва. В данном пункте динамика двухфазной среды в задаче Римана изучается на основе хорошо известной модели Капилы (которая в дальнейшем обозначается как БН5 [5]). Эта модель получена из модели БН7 (1) в предположении мгновенной механической релаксации [5]. Другими словами, скорости и давления фаз в каждой точке пространства для модели БН5 равны. Решение модели БН5 может быть использовано для валидации численных расчётов, полученных на основе модели БН7, для физических постановок, которые соответствуют прямому разрешению межфазных границ.

В модели БН5 законы сохранения массы записываются для каждой фазы отдельно, а законы сохранения импульса и энергии – для смеси в целом:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \alpha_1 = K \nabla \cdot \boldsymbol{u}, \quad \frac{\partial \alpha_k \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \boldsymbol{u}) = 0,$$

$$\frac{\partial \rho \boldsymbol{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u} \bigotimes \boldsymbol{u} + P) = 0, \quad \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho E + P)\boldsymbol{u}) = 0, \tag{21}$$

где **u** и P – скорость и давление смеси,  $\rho = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2$  и  $E = e + u^2/2$  – плотность и полная энергия смеси, коэффициент K определяет сжимаемость фаз [5]:

$$K = \left(\rho_2 c_2^2 - \rho_1 c_1^2\right) \bigg/ \left(\frac{\rho_1 c_1^2}{\alpha_1} + \frac{\rho_2 c_2^2}{\alpha_2}\right).$$

![](_page_13_Figure_4.jpeg)

**Рис. 5.** Структура волн в тестах 3 (a,6), 4 (в, г), 5 (д,е) для пузырька криптона (a, в, д) и азота (б, г, е), которая рассчитывалась как  $f(\rho_2) = 1 - \exp(-\|\nabla \rho_2\|_2/25)$  (МГ – межфазная граница, ОУВ – отражённая УВ, ВР – волна разрежения): a – t = 60 мкс, б – t = 50, в – t = 171, г – t = 102, д – t = 240, е – t = 179.

Система уравнений (21) дополняется нормировочным соотношением  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ , а также уравнением состояния смеси, которое имеет вид

$$P = \left(\rho e - \left(\frac{\alpha_1 \gamma_1 \pi_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{\alpha_2 \gamma_2 \pi_2}{\gamma_1 - 1}\right)\right) / \left(\frac{\alpha_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{\alpha_2}{\gamma_2 - 1}\right)$$
(22)

в случае, если для описания фаз используется двучленное УрС вида (3). Начальные условия имеют следующий вид:

![](_page_13_Figure_9.jpeg)

**Рис. 6.** Расположение линий разрыва для задачи Римана.

$$\boldsymbol{W}|_{t=0} = \begin{cases} \boldsymbol{W}_{\mathrm{L}}, & x < 0, \\ \boldsymbol{W}_{\mathrm{R}}, & x > 0, \end{cases}$$

где  $\boldsymbol{W} = (u, P, \rho_1, \rho_2, \alpha_1)$  – вектор примитивных переменных задачи.

С течением времени начальный разрыв распадается на несколько. На каждом из них выполняются соотношения РГ. Схематически автомодельная картина решения в одномерном случае на плоскости x-t представлена на рис. 6. Предполагается, что всего возможно пять конфигураций, а именно: левая и правая линии разрыва могут быть либо УВ, либо ВР, а центральная линия разрыва, если она есть, является КР. Запишем соотношения РГ для модели БН5 вдоль некоторого пути  $\Psi$  (k = 1, 2):

$$\xi[\alpha_1] = \int_0^1 (u)_{\Psi} \frac{\partial(\alpha_1)_{\Psi}}{\partial s} \, ds - \int_0^1 (K)_{\Psi} \frac{\partial(u)_{\Psi}}{\partial s} \, ds, \tag{23a}$$

$$\xi[\alpha_k \rho_k] = [\alpha_k \rho_k u], \tag{23b}$$

$$\xi[\rho u] = [\rho u^2 + P],\tag{23c}$$

$$\xi[\rho u] = [\rho u^2 + P], \tag{23c}$$
  
$$\xi[\rho E] = [\rho E u + P u], \tag{23d}$$

где скобки обозначают скачок на линии разрыва:  $[f] = f^+ - f^-$ , верхний индекс "+" ("-") указывает, что состояние вычисляется перед (за) разрывом,  $\xi$  – скорость разрыва.

В дальнейшем используем следующие обозначения. Невозмущённые области слева от разрыва будем обозначать индексом "<sub>L</sub>", невозмущённые области справа от него – индексом "<sub>R</sub>". Индекс 0 может обозначать как правое невозмущённое состояние, так и левое. Состояния слева и справа от контактного разрыва обозначим  $W_{\rm L}^*$  и  $W_{\rm R}^*$  соответственно (см. рис. 6). Утверждение. Решение задачи Римана ( $P^*, v_{1,{\rm L}}^*, v_{1,{\rm R}}^*$ ) для системы уравнений (21), (22)

вдоль линейного пути

$$\Psi(s; \boldsymbol{W}_L, \boldsymbol{W}_R) = (1-s)\boldsymbol{W}_L + s\boldsymbol{W}_R$$
(24)

удовлетворяют системе уравнений

$$F_1(P^*, v_{1,L}^*, v_{1,R}^*; \boldsymbol{W}_L, \boldsymbol{W}_R) = u_R - u_L + \Phi(P^*, v_{1,L}^*; \boldsymbol{W}_L) + \Phi(P^*, v_{1,R}^*; \boldsymbol{W}_R) = 0,$$
  
$$F_2(P^*, v_{1,L}^*; \boldsymbol{W}_L) = 0, \quad F_2(P^*, v_{1,R}^*; \boldsymbol{W}_R) = 0,$$

где

$$F_2(P, v_1; \mathbf{W}_0) = \begin{cases} (\alpha_1^0 - \alpha_1) \left(\frac{v^0 + v}{2}\right) - \left(\frac{K^0 + K}{2}\right) (v^0 - v) = 0, & ecnu \ P > P^0, \\ 0, & ecnu \ P \leqslant P^0, \end{cases}$$

$$\Phi(P, v_1; \mathbf{W}_0) = \begin{cases} (P - P^0)/m(P, v_1), & ecnu \ P > P^0, \\ \int\limits_{P^0}^{P} \frac{dP}{I(P)}, & ecnu \ P \leqslant P^0. \end{cases}$$
(25)

Здесь функции  $\alpha_1(P, v_1), v(P, v_1), K(P, v_1)$  и  $m(P, v_1)$  определяются соотношениями

$$\alpha_{1}(v_{1},v) = \frac{\alpha_{1}^{0}\rho_{1}^{0}v_{1}}{\rho^{0}v}, \quad v(v_{1},v_{2}) = Y_{1}^{0}v_{1} + Y_{2}^{0}v_{2},$$

$$v_{2}(v_{1},P) = \left\{Y_{1}^{0}v_{1}^{0}\left(\frac{P^{0}+\gamma_{1}\pi_{1}}{\gamma_{1}-1} + \frac{P^{0}+P}{2}\right) + Y_{2}^{0}v_{2}^{0}\left(\frac{P^{0}+\gamma_{2}\pi_{2}}{\gamma_{2}-1} + \frac{P^{0}+P}{2}\right) + Y_{1}^{0}v_{1}\left(\frac{P+\gamma_{1}\pi_{1}}{\gamma_{1}-1} + \frac{P^{0}+P}{2}\right)\right\} / \left\{Y_{2}^{0}\left(\frac{P+\gamma_{2}\pi_{2}}{\gamma_{2}-1} + \frac{P^{0}+P}{2}\right)\right\},$$

$$K(P,\alpha_{1}) = \frac{P(\gamma_{2}-\gamma_{1})+\gamma_{2}\pi_{2}-\gamma_{1}\pi_{1}}{P(\gamma_{1}/\alpha_{1}+\gamma_{2}/\alpha_{2})+\gamma_{1}\pi_{1}/\alpha_{1}+\gamma_{2}\pi_{2}/\alpha_{2}}, \quad m(P,v) = \sqrt{\frac{P-P^{0}}{v^{0}-v}}.$$
(26)

**Доказательство.** Преобразуем систему уравнений (23) с учётом пути (24) к следующему виду:

$$[\alpha_1]\overline{v} = \overline{K}[v], \tag{27a}$$

$$Y_k^+ = Y_k^-, \tag{27b}$$

$$\rho^+(u^+ - \xi) = \rho^-(u^- - \xi) = m, \qquad (27c)$$

$$P^{+} - P^{-} + m(u^{+} - u^{-}) = 0,$$
(27d)

$$P^{+} - P^{-} + m^{2}(v^{+} - v^{-}) = 0, \qquad (27e)$$

$$e^{+} - e^{-} + \frac{p^{+} + p^{-}}{2}(v^{+} - v^{-}) = 0,$$
 (27f)

где k = 1, 2, m – массовая скорость,  $Y_k = \alpha_k \rho_k / \rho$  – массовые доли,  $v_k = 1/\rho_k$  – удельный объём k-й фазы,  $v = Y_1 v_1 + Y_2 v_2$  – удельный объём смеси,  $\bar{f} = (f^+ + f^-)/2$ . Отметим, что уравнения (27b) и (27c) получены в результате сложения уравнений (23b) для k = 1, 2, а уравнения (27d) и (27e) эквиваленты друг другу (в дальнейшем используются оба соотношения).

Если  $m \neq 0$ , то разрыв является УВ, если m = 0, то КР. В последнем случае соответствующие соотношения (27) упрощаются до следующих:

$$u^+ = u^- = \xi, \quad P^+ = P^-.$$
 (28)

Соотношения в ВР для модели БН5 получены в работе [27]:

$$\rho_k = \rho_k^0 \left( \frac{P + \pi_k}{P^0 + \pi_k} \right)^{1/\gamma_k}, \quad dP = \pm I(P) du, \quad Y_k = Y_k^0, \tag{29}$$

где волна разрежения распространяется со скоростью  $\xi = u \pm c_w$ , k = 1, 2; знаки "+" и "-" относятся к правой и левой волнам разрежения соответственно; индекс 0 обозначает невозмущённое состояние, а I(P) имеет следующий вид:

$$I(P) = \rho c_w = \left( \sum_{k=1,2} Y_k^0 \middle/ (\rho_k^0 c_k^0)^2 \left( \frac{P + \pi_k}{P^0 + \pi_k} \right)^{(\gamma_k + 1)/\gamma_k} \right)^{-1/2}.$$

Выражения (27)–(29) позволяют получить решение задачи Римана общего вида. В самом деле, из соотношений (28) следует, что на КР давление и скорость непрерывны при переходе через разрыв:

$$P^* = P_{\rm L}^* = P_{\rm R}^*, \quad u^* = u_{\rm L}^* = u_{\rm R}^*.$$
(30)

Вид решения на разрыве (УВ или ВР) зависит только от  $P^*$ . Если  $P^* > P^0$ , то разрыв является УВ, если  $P^* \leq P^0$ , то ВР. Для скорости имеем  $u^* = u^0 \pm \Phi(P, v_1; W_0)$ , где  $\Phi(P, v_1; W_0)$  определяется равенством (25). Поэтому вне зависимости от конфигурации на линии разрыва для скорости справедливы соотношения

$$u_{\rm L}^* = u_{\rm L} - \Phi(P^*, v_{1,{\rm L}}^*; \boldsymbol{W}_{\rm L}), \quad u_{\rm R}^* = u_{\rm R} + \Phi(P^*, v_{1,{\rm R}}^*; \boldsymbol{W}_{\rm R}).$$
(31)

Далее из равенств (30) и (31) вытекает, что

$$F_1(P^*, v_{1,\mathrm{L}}^*, v_{1,\mathrm{R}}^*; \boldsymbol{W}_{\mathrm{L}}, \boldsymbol{W}_{\mathrm{R}}) = u_{\mathrm{R}}^* - u_{\mathrm{L}}^* = u_{\mathrm{R}} - u_{\mathrm{L}} + \Phi(P^*, v_{1,\mathrm{L}}^*; \boldsymbol{W}_{\mathrm{L}}) + \Phi(P^*, v_{1,\mathrm{R}}^*; \boldsymbol{W}_{\mathrm{R}}) = 0.$$

Для определения  $v_1$  используем уравнение (27a), которое запишем в виде

$$F_2(v_1, P; \mathbf{W}_0) = \begin{cases} (\alpha_1^0 - \alpha_1) \left(\frac{v^0 + v}{2}\right) - \left(\frac{K^0 + K}{2}\right) (v^0 - v) = 0, & \text{если } P > P^0, \\ 0, & \text{если } P \leqslant P^0. \end{cases}$$

Выражая переменные  $\alpha_1$ , v, K через переменные P и  $v_1$  и используя систему (27), получаем

$$\begin{aligned} \alpha_1(v_1,v) &= \frac{\alpha_1^0 \rho_1^0 v_1}{\rho^0 v}, \quad v(v_1,v_2) = Y_1^0 v_1 + Y_2^0 v_2, \\ v_2(v_1,P) &= \left\{ Y_1^0 v_1^0 \left( \frac{P^0 + \gamma_1 \pi_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{P^0 + P}{2} \right) + Y_2^0 v_2^0 \left( \frac{P^0 + \gamma_2 \pi_2}{\gamma_2 - 1} + \frac{P^0 + P}{2} \right) + \right. \\ &+ \left. Y_1^0 v_1 \left( \frac{P + \gamma_1 \pi_1}{\gamma_1 - 1} + \frac{P^0 + P}{2} \right) \right\} \Big/ \left\{ Y_2^0 \left( \frac{P + \gamma_2 \pi_2}{\gamma_2 - 1} + \frac{P^0 + P}{2} \right) \right\}, \\ &\quad K(P,\alpha_1) = \frac{P(\gamma_2 - \gamma_1) + \gamma_2 \pi_2 - \gamma_1 \pi_1}{P(\gamma_1/\alpha_1 + \gamma_2/\alpha_2) + \gamma_1 \pi_1/\alpha_1 + \gamma_2 \pi_2/\alpha_2}. \end{aligned}$$

В итоге приходим относительно трёх неизвестных  $P^*$ ,  $v_{1,L}^*$ ,  $v_{1,R}^*$  к системе трёх нелинейных уравнений

$$F_1(P^*, v_{1,\mathrm{L}}^*, v_{1,\mathrm{R}}^*; \boldsymbol{W}_{\mathrm{L}}, \boldsymbol{W}_{\mathrm{R}}) = 0, \quad F_2(P^*, v_{1,\mathrm{L}}^*; \boldsymbol{W}_{\mathrm{L}}) = 0, \quad F_2(P^*, v_{1,\mathrm{R}}^*; \boldsymbol{W}_{\mathrm{R}}) = 0, \quad (32)$$

что доказывает утверждение.

Система уравнений (32) относительно переменных  $(P^*, v_{1,L}^*, v_{1,R}^*)$  может быть решена, например, методом Ньютона. Далее по любой из формул (31) определяется скорость, а оставшиеся переменные находятся по формулам (26).

Исследование Полехиной (Тухватуллиной) Р.Р. (пп. 2.2, 3, приложение) выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-71-30004). Исследование Савенкова Е.Б. и Алексеева М.В. (введение, пп. 2.1, 2.3, заключение) выполнено при поддержке Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2019-1623).

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Baer M.R., Nunziato J.W. A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (ddt) in reactive granular materials// Int. J. of Multiphase Flow. 1986. V. 12. № 6. P. 861–889.
- 2. Drew D., Passman S. Theory of Multicomponent Fluids. New York, 2014.
- 3. Favrie N., Gavrilyuk S., Saurel R. Solid-fluid diffuse interface model in cases of extreme deformations // J. Comput. Phys. 2009. V. 228. № 16. P. 6037–6077.
- 4. Kapila A., Son S., Bdzil J., Menikoff R. Two-phase modeling of DDT: structure of the velocity-relaxation zone // Phys. Fluids. 1997. V. 9. № 12. P. 3885–3897.
- 5. Kapila A., Melnikoff R., Bdzil J., Son S., Stewart S. Two-phase modeling of deflagration-to-detonation transition in granular materials: reduced equations // Phys. Fluids. 2001. V. 13. № 10. P. 3002–3024.
- 6. Murrone A., Guillard H. A five-equation reduced model for compressible two phase flow problems // J. Comput. Phys. 2005. V. 202. № 2. P. 664–698.
- 7. De Lorenzo M., Pelanti M., Lafon P. HLLC-type and path-conservative schemes for a single-velocity six-equation two-phase flow model: a comparative study // Appl. Math. and Comput. 2018. V. 333. P. 95–117.
- 8. Dumbser M., Balsara D.S. A new efficient formulation of the hllem Riemann solver for general conservative and non-conservative hyperbolic systems // J. of Comput. Phys. 2016. V. 304. P. 275–319.
- Kemm F., Gaburro E., Thein F., Dumbser M. A simple diffuse interface approach for compressible flows around moving solids of arbitrary shape based on a reduced Baer–Nunziato model // Computers & Fluids. 2020. V. 204. P. 104536.
- Chiocchetti S., Müller C. A solver for stiff finite-rate relaxation in Baer–Nunziato two-phase flow models // Droplet Interactions and Spray Processes / Eds. G. Lamanna, S. Tonini, G.E. Cossali, B. Weigand. Cham, 2020. P. 31–44.
- Serezhkin A., Menshov I. On solving the Riemann problem for non-conservative hyperbolic systems of partial differential equations // Computers & Fluids. 2020. V. 210. P. 104675.
- 12. Cockburn B., Shu C.-W. The Runge–Kutta local projection–discontinuous–Galerkin finite element method for scalar conservation laws // ESAIM Math. Model. Numer. Anal. 1991. V. 25. № 3. P. 337–361.
- 9 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ том 58 № 7 2022

- 13. Dal Maso G., Lefloch P.G., Murat F. Definition and weak stability of nonconservative products // J. de Mathématiques Pures et Appliquées. 1995. V. 74. № 6. P. 483–548.
- Castro M.J., LeFloc C.h P.G., Luz Muñoz-Ruiz M., Parés C. Why many theories of shock waves are necessary: convergence error in formally path-consistent schemes // J. of Comput. Phys. 2008. V. 227. № 17. P. 8107–8129.
- Bdzil J.B., Menikoff R., Son S.F., Kapila A.K., Scott Stewart D. Two-phase modeling of deflagration-todetonation transition in granular materials: A critical examination of modeling issues // Phys. of Fluids. 1999. V. 11. № 2. P. 378–402.
- 16. Andrianov N., Warnecke G. The Riemann problem for the Baer–Nunziato two-phase flow model // J. of Comput. Phys. 2004. V. 195. № 2. P. 434–464.
- 17. Daude F., Berry R.A., Pascal Galon. A finite-volume method for compressible non-equilibrium two-phase flows in networks of elastic pipelines using the Baer–Nunziato model // Comput. Meth. in Appl. Mech. and Eng. 2019. V. 354. P. 820–849.
- Saurel R., Abgrall R. A simple method for compressible multifluid flows // SIAM J. Sci. Comput. 1999. V. 21. № 3. P. 1115–1145.
- 19. Янилкин Ю.В, Бондаренко Ю.А., Гончаров Е.А., Гужова А.Р., Колобянин В.Ю., Софронов В.Н., Стаценко В.П. Тесты для гидрокодов, моделирующих ударноволновые течения в многокомпонентных средах. Саров, 2017.
- 20. Nigmatulin R. Dynamics of Multiphase Media. New York, 1990.
- Le Floch P., Liu T.-P. Existence Theory for Nonlinear Hyperbolic Systems in Nonconservative Form. V. 5. Berlin; New York, 1993. P. 261–280.
- 22. Ваннер Г., Хайрер Э., Нёрсетт С. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М., 1990.
- 23. Zhong X., Shu C.-W. A simple weighted essentially nonoscillatory limiter for Runge–Kutta discontinuous Galerkin methods // J. Comput. Phys. 2013. V. 232. № 1. P. 397–415.
- 24. Zhong X., Shu C.-W. On positivity-preserving high order discontinuous Galerkin schemes for compressible Euler equations on rectangular meshes // J. Comput. Phys. 2010. V. 229. № 23. P. 8918–8934.
- 25. Layes G., Le Métayer O. Quantitative numerical and experimental studies of the shock accelerated heterogeneous bubbles motion // Physics of Fluids. 2007. V. 19. № 4. P. 042105.
- 26. Nowakowski A.F., Ballil A., Nicolleau F.C.G.A. Passage of a shock wave through inhomogeneous media and its impact on gas-bubble deformation // Phys. Rev. E. 2015. V. 92. № 2. P. 023028.
- 27. Petitpas F., Franquet E., Saurel R., Le Metayer O. A relaxation–projection method for compressible flows. Part ii: Artificial heat exchanges for multiphase shocks // J. of Comput. Phys. 2007. V. 225. № 2. P. 2214–2248.

Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, г. Москва Поступила в редакцию 04.03.2022 г. После доработки 04.03.2022 г. Принята к публикации 25.05.2022 г.