

УДК 519.6+517.9

ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА СО СТАБИЛИЗАТОРОМ ДРОБНОЙ ГЛАДКОСТИ В ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВОЛНОВОГО ФРОНТА ПО ЕГО НАКЛОНАМ

© 2022 г. А. В. Разгулин, Н. Г. Ирошников, А. В. Ларичев,
С. А. Турганбаев, Т. Е. Романенко

Рассматривается проекционный метод со стабилизатором дробной гладкости для аппроксимации задачи восстановления волнового фронта по его наклонам. Показана устойчивость метода в шкале периодических функций двух аргументов. Найдены условия согласования параметров стабилизатора с шагом сетки, позволяющие провести вывод согласованных с гладкостью наклонов оценок скорости сходимости проекционного метода. С помощью теории интерполяции получены оценки точности метода при естественных требованиях на гладкость наклонов из шкалы анизотропных пространств Соболева дробной гладкости.

DOI: 10.31857/S037406412207010X, EDN: CERLCH

Введение. Одной из важных задач адаптивной оптики является восстановление волнового фронта по данным об измерениях его локальных наклонов. Такие измерения проводятся с помощью датчика Шака–Гартмана (см., например, [1]), который также с успехом применяется для оценки параметров атмосферной турбулентности [2], при конструировании оптоэлектронных инструментов [3], в прикладных задачах медицинской физики [4] и в др. областях. Поскольку на практике измерения наклонов сопровождаются искажениями различной природы, то данные о наклонах обычно являются негладкими функциями координат. Кроме того, сами волновые фронты зачастую являются негладкими и даже разрывными. Разработка устойчивых методов восстановления волнового фронта в этих условиях является весьма актуальной задачей (см. работы [5–10]).

Ранее в статьях [9, 10] было предложено семейство новых методов реконструкции волнового фронта, в основе которых лежит вариационный подход в сочетании с проекционным методом на основе билинейных сплайнов. Такая комбинация методов наилучшим образом подходит для случая восстановления волнового фронта, не обладающего высокой гладкостью и не обязательно непрерывного. Отличительной особенностью схем работы [10] является использование стабилизатора с разностными производными второго порядка в дробной степени, нацеленного на улучшение пространственно-частотной характеристики (ПЧХ) метода, причём параметры стабилизатора выбираются также на основе вариационного подхода. В сравнении с широко используемым методом Симпсона [5] семейство методов в статье [10] позволяет достичь лучшего профиля ПЧХ в области высоких частот, а по сравнению с семейством кумулятивных методов в работе [6] в практическом применении не приводит к накоплению погрешности и устойчиво работает в случае потери данных о наклонах.

Представляемые в данной статье результаты посвящены исследованию точности проекционного метода, описанного в [10], используемого для конечномерной аппроксимации вариационной задачи восстановления волнового фронта. Сложностью рассматриваемой задачи является возможная негладкость волновых фронтов и, соответственно, необходимость развивать такие способы исследования погрешности, которые позволяли бы получать оценки скорости сходимости аппроксимаций в естественных функциональных классах исходных данных (наклонов) без априорных предположений об их дополнительной гладкости.

1. Вариационный метод восстановления волнового фронта по его наклонам. Опишем и исследуем вариационный подход к восстановлению волнового фронта $u(x, y)$ по измерениям его наклонов $g_1(x, y)$, $g_2(x, y)$ вдоль соответствующих направлений x и y . Отметим,

что непосредственное восстановление волнового фронта из условия равенства градиентов волнового фронта (или их конечномерных аппроксимаций) измеряемым наклонам приводит к операторному уравнению первого рода, которое представляет собой плохообусловленную задачу (см. [7]), устойчивое решение которой строится на основе регуляризованного варианта метода сингулярных разложений. Вместо операторного уравнения сформулируем задачу восстановления волнового фронта в пределах квадратной апертуры $\mathbb{T}^2 = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ в виде задачи минимизации функционала невязки $J(u)$:

$$J(u) = \iint_{\mathbb{T}^2} ((u_x(x, y) - g_1(x, y))^2 + (u_y(x, y) - g_2(x, y))^2) dx dy. \tag{1}$$

Функционал $J(u)$ задаёт среднеквадратичное отклонение между наблюдаемыми наклонами волнового фронта $g_1(x, y)$, $g_2(x, y)$ и соответствующими производными $u_x = \partial u / \partial x$, $u_y = \partial u / \partial y$ искомого волнового фронта.

Для дальнейшего изложения потребуются некоторые обозначения и вспомогательные утверждения. Сокращения $\langle u, \phi \rangle = \iint_{\mathbb{T}^2} u(x, y)\phi(x, y) dx dy$ и $\|u\| = (\langle u, u \rangle)^{1/2}$ обозначают стандартные скалярное произведение и норму в $L_2(\mathbb{T}^2)$. Для вектора наклонов $g = (g_1, g_2) \in L_2(\mathbb{T}^2) \times L_2(\mathbb{T}^2)$ используется евклидова норма $\|g\| = (\|g_1\|^2 + \|g_2\|^2)^{1/2}$. Для полной ортонормированной в $L_2(\mathbb{T}^2)$ системы комплексных экспонент $e_{k,m}(x, y) = (2\pi)^{-1} \exp(i(kx + my))$, $k, m \in \mathbb{Z}$, и коэффициентов $\hat{u}_{k,m} = \langle u, e_{k,m}^* \rangle$, $e_{k,m}^* = e_{-k,-m}$ разложения функции $u \in L_2(\mathbb{T}^2)$ по этой системе в силу равенства Парсеваля имеем $\|u\|^2 = \sum_{(k,m) \in \mathbb{Z}^2} |\hat{u}_{k,m}|^2$.

Будем использовать анизотропные пространства функций

$$H^{s,r}(\mathbb{T}^2) = \{u \in L_2(\mathbb{T}^2) : \|u\|_{H^{s,r}(\mathbb{T}^2)}^2 = \sum_{(k,m) \in \mathbb{Z}^2} (1 + k^{2s} + m^{2r}) |\hat{u}_{k,m}|^2 < +\infty\}, \quad s, r > 0.$$

Нетрудно видеть, что по теореме о следах [11, гл. 1, § 4] используемые далее пространства $H^{s,0}(\mathbb{T}^2)$ ($H^{0,r}(\mathbb{T}^2)$) при $s > 0.5$ ($r > 0.5$ соответственно) состоят из 2π -периодических функций по переменной x (y соответственно), которые Гёльдер-непрерывны по x (y соответственно) со значениями в $L_2(0, 2\pi)$ с показателем $s - 0.5$ ($r - 0.5$ соответственно).

Будем использовать изотропное пространство функций $H^s(\mathbb{T}^2) = H^{s,s}(\mathbb{T}^2)$. В частности, пространство $H^1(\mathbb{T}^2)$ является замкнутым подпространством пространства Соболева H^1 на множестве \mathbb{T}^2 (см. [12, гл. 3]) с эквивалентными нормами

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|^2 + \|u_x\|^2 + \|u_y\|^2)^{1/2}, \quad \|u\|_{H^1(\mathbb{T}^2)}^2 = \sum_{(k,m) \in \mathbb{Z}^2} (1 + k^2 + m^2) |\hat{u}_{k,m}|^2.$$

Для пространства Соболева второго порядка H^2 используется норма

$$\|u\|_{H^2} = (\|u\|^2 + \|u_x\|^2 + \|u_y\|^2 + \|u_{xx}\|^2 + \|u_{xy}\|^2 + \|u_{yy}\|^2)^{1/2}.$$

Рассмотрим подпространство $\tilde{H}^\theta(\mathbb{T}^2)$ функций с нулевым средним (или, что то же самое, $\hat{u}_{0,0} = 0$), т.е. $\tilde{H}^\theta(\mathbb{T}^2) = \{u \in H^\theta(\mathbb{T}^2) : \iint_{\mathbb{T}^2} u(x, y) dx dy = 0\}$. Для функций из $\tilde{H}^1(\mathbb{T}^2)$ имеет место неравенство Пуанкаре

$$\iint_{\mathbb{T}^2} (|u_x|^2 + |u_y|^2) dx dy \geq \iint_{\mathbb{T}^2} |u|^2 dx dy, \tag{2}$$

проверка которого в рассматриваемом случае легко проводится с помощью разложения по комплексным экспонентам $e_{k,m}(x, y)$. Отметим, что обзору современных результатов по точным константам в неравенствах типа Пуанкаре посвящена работа [13].

В качестве допустимого множества функционала (1) будем использовать пространство $\tilde{H}^1(\mathbb{T}^2)$. Такой выбор допустимого множества функционала невязки представляется достаточно естественным для рассматриваемой задачи восстановления волнового фронта, поскольку,

во-первых, позволяет естественным образом вычислять его наклоны и, во-вторых, охватывает широкий круг негладких поверхностей, в том числе разрывных (пример см. в [11, п. 9.4]).

Необходимое условие минимума функционала невязки (1) на $\tilde{H}^1(\mathbb{T}^2)$ получается из равенства нулю его первой вариации и приводит к интегральному тождеству

$$\langle u_x, \phi_x \rangle + \langle u_y, \phi_y \rangle = \langle g_1, \phi_x \rangle + \langle g_2, \phi_y \rangle \quad \text{для любых функций } \phi \in \tilde{H}^1(\mathbb{T}^2), \quad (3)$$

которому должен удовлетворять искомый волновой фронт $u(x, y) \in \tilde{H}^1(\mathbb{T}^2)$.

Теорема 1. Пусть $g_1, g_2 \in L_2(\mathbb{T}^2)$. Тогда вариационная задача (3) имеет единственное решение $u \in \tilde{H}^1(\mathbb{T}^2)$. Решение непрерывно зависит от вектора наклонов и справедлива оценка

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{T}^2)} \leq \sqrt{2}\|g\|. \quad (4)$$

Доказательство. Задача (3) может быть записана в стандартном для вариационных задач виде

$$a(u, \phi) = \ell(\phi) \quad \text{для любой } \phi \in \tilde{H}^1(\mathbb{T}^2), \quad (5)$$

где введены обозначения для билинейной формы $a(u, \phi) = \langle u_x, \phi_x \rangle + \langle u_y, \phi_y \rangle$ и линейного функционала $\ell(\phi) = \langle g_1, \phi_x \rangle + \langle g_2, \phi_y \rangle$. Непрерывность билинейной формы и функционала вытекает из оценок

$$|a(u, \phi)| \leq \|u_x\| \|\phi_x\| + \|u_y\| \|\phi_y\| \leq \|u\|_{H^1(\mathbb{T}^2)} \|\phi\|_{H^1(\mathbb{T}^2)}, \quad |\ell(\phi)| \leq \|g\| \|\phi\|_{H^1(\mathbb{T}^2)}. \quad (6)$$

Свойство коэрцитивности билинейной формы следует из неравенства Пуанкаре (2) и записывается в виде

$$a(u, u) \geq 0.5\|u\|_{H^1(\mathbb{T}^2)}^2 \quad \text{для всех функций } u \in \tilde{H}^1(\mathbb{T}^2). \quad (7)$$

Тогда существование и единственность решения вариационной задачи (5) следует из непрерывности функционала, непрерывности и коэрцитивности билинейной формы и теоремы Лакса–Мильграма (см., например, [14, с. 19; 15, с. 43]). Оценка (4) является следствием неравенства (2) и вытекающей из (5) и неравенства Коши–Буняковского оценки $\|u_x\|^2 + \|u_y\|^2 \leq \|g\|^2$. Теорема доказана.

Исследуем гладкость решения вариационной задачи в зависимости от гладкости входных данных g_1, g_2 .

Теорема 2. Пусть $g_1 \in H^{s,0}(\mathbb{T}^2)$, $g_2 \in H^{0,s}(\mathbb{T}^2)$, $s \in (0, 1]$. Тогда решение вариационной задачи (3) принадлежит $\tilde{H}^{1+s}(\mathbb{T}^2)$ и имеет место оценка

$$\|u\|_{H^{1+s}(\mathbb{T}^2)} \leq C(\|g_1\|_{H^{s,0}(\mathbb{T}^2)} + \|g_2\|_{H^{0,s}(\mathbb{T}^2)}). \quad (8)$$

Доказательство. Рассмотрим разложение $u = \sum_{(0,0) \neq (n,m) \in \mathbb{Z}^2} \hat{u}_{n,m} e_{n,m}(x, y)$ полученного в теореме 1 решения задачи (3) (или, что то же самое, (5)). Возьмём в (5) пробную функцию $\phi = e_{k,l}^*$. Несложные вычисления показывают, что $a(u, e_{k,l}^*) = (k^2 + l^2)u_{k,l}$ и $\ell(e_{k,l}^*) = -i(k\hat{g}_{1,k,l} + l\hat{g}_{2,k,l})$, где $\hat{g}_{j,k,l} = \langle g_j, e_{k,l}^* \rangle$ – коэффициенты разложения наклонов, $j = 1, 2$. Получаем

$$\hat{u}_{k,l} = -i \frac{k\hat{g}_{1,k,l} + l\hat{g}_{2,k,l}}{k^2 + l^2}, \quad (0, 0) \neq (k, l) \in \mathbb{Z}^2, \quad \hat{u}_{0,0} = 0. \quad (9)$$

Воспользуемся (9) и оценим норму

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^{1+s}(\mathbb{T}^2)}^2 &= \sum_{(0,0) \neq (k,l) \in \mathbb{Z}^2} (1 + k^{2(1+s)} + l^{2(1+s)}) |\hat{u}_{k,l}|^2 \leq \\ &\leq 2 \sum_{(0,0) \neq (k,l) \in \mathbb{Z}^2} \frac{(1 + k^{2(1+s)} + l^{2(1+s)})(k^2 |\hat{g}_{1,k,l}|^2 + l^2 |\hat{g}_{2,k,l}|^2)}{(k^2 + l^2)^2}. \end{aligned}$$

Заметим, что для всех индексов, по которым проводится суммирование, справедливо

$$\frac{(1 + k^{2(1+s)} + l^{2(1+s)})k^2}{(k^2 + l^2)^2} = \frac{(1 + k^{2(1+s)} + l^{2(1+s)})k^{2(1-s)}}{(k^2 + l^2)^2} k^{2s} \leq 3k^{2s}.$$

Аналогично получаем

$$\frac{(1 + k^{2(1+s)} + l^{2(1+s)})l^2}{(k^2 + l^2)^2} \leq 3l^{2s}.$$

С учётом этих оценок имеем

$$\|u\|_{H^{1+s}(\mathbb{T}^2)}^2 \leq C_1 \sum_{(0,0) \neq (k,l) \in \mathbb{Z}^2} (k^{2s} |\hat{g}_{1,k,l}|^2 + l^{2s} |\hat{g}_{2,k,l}|^2) = C_1 (\|g_1\|_{H^{s,0}(\mathbb{T}^2)}^2 + \|g_2\|_{H^{0,s}(\mathbb{T}^2)}^2).$$

Отсюда вытекают включение $u \in \tilde{H}^{1+s}(\mathbb{T}^2)$ и искомая оценка (9). Теорема доказана.

2. Проекционная схема аппроксимации вариационной задачи. Для построения конечномерной аппроксимации вариационной задачи (3) на основе проекционного метода возьмём натуральное чётное N , введём множество индексов

$$\mathbb{I} = \{-N/2, -N/2 + 1, \dots, N/2 - 1\}$$

и рассмотрим подпространство

$$S^1(\mathbb{T}^2) = \text{Lin} \{ \phi_{k,l}(x, y) \} \subset H^1(\mathbb{T}^2)$$

размерности $N \times N$ кусочно-линейных по каждому направлению сплайнов, являющихся линейными комбинациями функций $\phi_{k,l}(x, y) = \phi_k(x)\phi_l(y)$, $(k, l) \in \mathbb{I}^2$, где $\phi_k(t) = \max(0, 1 - |t - kh|/h)$, $k \in \mathbb{I} \setminus \{-N/2\}$, $\phi_{-N/2}(t) = \phi_{1-N/2}(t+h) + \phi_{1-N/2}(t+h-2\pi)$, $h = 2\pi N^{-1}$.

Обозначим $\tilde{S}^1(\mathbb{T}^2) = S^1(\mathbb{T}^2) \cap \tilde{H}^1(\mathbb{T}^2)$. Представив далее аппроксимацию искомого волнового фронта в виде конечной суммы $u^h(x, y) = \sum_{(k,l) \in \mathbb{I}^2} u_{k,l}^h \phi_{k,l}(x, y) \in \tilde{S}^1(\mathbb{T}^2)$ и ограничившись в тождестве (3) пробными функциями из подпространства $\tilde{S}^1(\mathbb{T}^2)$, приходим к конечномерной вариационной задаче

$$\langle u_x^h, \phi_x \rangle + \langle u_y^h, \phi_y \rangle = \langle g_1, \phi_x \rangle + \langle g_2, \phi_y \rangle \quad \text{при всех } \phi \in \tilde{S}^1(\mathbb{T}^2). \tag{10}$$

Условие принадлежности решения u^h пространству $\tilde{S}^1(\mathbb{T}^2)$ накладывает условие равенства нулю среднего значения сеточной функции

$$\sum_{(k,l) \in \mathbb{I}^2} u_{k,l}^h = 0. \tag{11}$$

Отметим, что поскольку в записи равенств (10) пробные функции $\phi \in \tilde{S}^1(\mathbb{T}^2)$ участвуют только под знаком производных, то фактически можно расширить класс пробных функций до всего пространства $S^1(\mathbb{T}^2)$. Тогда задача (10) допускает эквивалентную запись в виде операторного уравнения относительно матрицы искомых коэффициентов $u^h = \{u_{kl}^h\}$ (см. [10])

$$B_2 \Lambda_1 u^h + B_1 \Lambda_2 u^h = f, \quad f = f^1 + f^2 \tag{12}$$

с дополнительным условием (11), где

$$f_{k,l}^1 = h^{-3} \int_{y_{l-1}}^{y_{l+1}} \phi_l(y) \int_{x_{k-1}}^{x_k} (g_1(x, y) - g_1(x+h, y)) dx dy,$$

$$f_{k,l}^2 = h^{-3} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \phi_k(x) \int_{y_{l-1}}^{y_l} (g_2(x, y) - g_2(x, y+h)) dx dy.$$

Операторы B_j, Λ_j задаются с помощью матриц Грама (см. монографию [16, гл. 2, § 2]) в $L_2(-\pi, \pi)$ рассматриваемых одномерных сплайнов и их градиентов, $B_j = E_j - h^2 \Lambda_j / 6$, E_j – единичный оператор по соответствующему направлению, $j = 1, 2$. Отметим особенность записи слагаемых в уравнении (12): операторы с индексом $j = 1$ действуют по переменной x (по строкам), операторы с индексом $j = 2$ действуют по переменной y (по столбцам). Таким образом, например, запись $B_2 \Lambda_1$ означает суперпозицию двух операторов, действующих по разным переменным.

Далее каждой функции $u^h(x, y) = \sum_{(k,l) \in \mathbb{I}^2} u_{k,l}^h \phi_{k,l}(x, y)$ из пространства сплайнов $S^1(\mathbb{T}^2)$ сопоставим заданную на \mathbb{I}^2 сеточную функцию $u^h = \{u_{k,l}^h\}$, составленную из коэффициентов разложения по базисным сплайнам. Для сеточных функций будем использовать дискретное скалярное произведение и соответствующую дискретную евклидову норму

$$\langle u^h, v^h \rangle_h = \sum_{(k,l) \in \mathbb{I}^2} u_{k,l}^h v_{k,l}^h h^2, \quad \|u^h\|_h = \sqrt{\langle u^h, u^h \rangle_h}.$$

Сеточные комплексные экспоненты

$$e_k(x_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(i \frac{2\pi k j}{N}\right), \quad e_m(y_l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(i \frac{2\pi m l}{N}\right)$$

являются собственными функциями как операторов Λ_1, Λ_2 с собственными значениями

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{kh}{2}\right), \quad \lambda_m = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{mh}{2}\right), \quad k, m \in \mathbb{I}, \tag{13}$$

так и операторов B_1, B_2 с собственными значениями

$$\mu_k = 1 - \frac{h^2}{6} \lambda_k, \quad \mu_m = 1 - \frac{h^2}{6} \lambda_m, \quad k, m \in \mathbb{I}.$$

Собственные значения допускают известные двусторонние оценки

$$0 \leq \lambda_k \leq \frac{4}{h^2}, \quad k \in \mathbb{I}, \tag{14}$$

$$\frac{1}{3} \leq \mu_k \leq 1, \quad k \in \mathbb{I}. \tag{15}$$

Сеточные комплексные экспоненты $e_{k,m}(x_j, y_l) = e_k(x_j) e_m(y_l)$ представляют собой ортонормированный базис в пространстве сеточных функций на \mathbb{I}^2 : $\langle e_{k,m}, e_{p,q}^* \rangle_h = \delta_{k,m} \delta_{p,q}$, где $\delta_{k,m}$ – символ Кронекера. Любая заданная на \mathbb{I}^2 сеточная функция $\{z_{j,l}\}$ однозначно раскладывается в сумму

$$z_{j,l} = \sum_{(k,m) \in \mathbb{I}^2} \hat{z}_{k,m} e_{k,m}(x_j, y_l), \quad \hat{z}_{k,m} = \langle z, e_{k,m}^* \rangle_h.$$

Для функции $u^h(x, y)$ из пространства сплайнов $\tilde{S}^1(\mathbb{T}^2)$ и её сеточного варианта u^h справедливо соотношение $\|u^h\|^2 = \langle u^h, u^h \rangle = \langle B_1 B_2 u^h, u^h \rangle_h$, где $B_1 B_2$ означает суперпозицию двух операторов по соответствующим переменным. Отсюда в силу (15) вытекает эквивалентность норм для функций из $\tilde{S}^1(\mathbb{T}^2)$:

$$\frac{1}{3} \|u^h\|_h \leq \|u^h\| \leq \|u^h\|_h. \tag{16}$$

Задачу (10) можно записать в аналогичном задаче (5) виде:

$$a(u^h, v^h) = \ell(v^h), \quad u^h \in \tilde{S}^1(\mathbb{T}^2) \quad \text{для любой функции} \quad v^h \in \tilde{S}^1(\mathbb{T}^2). \tag{17}$$

Теорема 3. Пусть $g_1, g_2 \in L_2(\mathbb{T}^2)$. Тогда задача (17) имеет единственное решение $u^h \in \tilde{S}^1(\mathbb{T}^2)$ и справедлива оценка

$$\|u^h\|_{H^1(\mathbb{T}^2)} \leq \sqrt{2}\|g\|. \quad (18)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Следующие теоремы дают оценки скорости сходимости u^h к функции u в различных нормах и при различных требованиях к гладкости измеряемых наклонов g_1, g_2 .

Теорема 4. Пусть $g_1 \in H^{1,0}(\mathbb{T}^2)$, $g_2 \in H^{0,1}(\mathbb{T}^2)$. Тогда имеют место оценки скорости сходимости решения u^h задачи (17) к решению u задачи (3):

$$\|u^h - u\|_{H^1(\mathbb{T}^2)} \leq C_1 h (\|g_1\|_{H^{1,0}(\mathbb{T}^2)} + \|g_2\|_{H^{0,1}(\mathbb{T}^2)}), \quad (19)$$

$$\|u^h - u\| \leq C_2 h^2 (\|g_1\|_{H^{1,0}(\mathbb{T}^2)} + \|g_2\|_{H^{0,1}(\mathbb{T}^2)}). \quad (20)$$

Доказательство. В силу симметричности билинейной формы, оценок (6), (7) и замечания 2.3.1 к лемме Сеа [14, с. 109] имеем

$$\|u^h - u\|_{H^1(\mathbb{T}^2)} \leq \sqrt{2} \inf_{v^h \in \tilde{S}^1(\mathbb{T}^2)} \|u - v^h\|_{H^1(\mathbb{T}^2)}.$$

Используя аппроксимационные свойства тензорного произведения кусочно-линейных сплайнов [17, с. 37], приходим к оценке с независимой от решения u и шага сетки константой $C_1 > 0$:

$$\|u^h - u\|_{H^1(\mathbb{T}^2)} \leq C_1 h \|u\|_{H^2(\mathbb{T}^2)}. \quad (21)$$

Воспользовавшись далее оценкой (8) из теоремы 2, окончательно получаем (19). При тех же требованиях к гладкости наклонов для получения оценки в норме $L_2(\mathbb{T}^2)$ воспользуемся леммой Обэна–Нитше (см., например, [14, с. 139]). Имеем

$$\|u^h - u\| \leq M \|u^h - u\|_{H^2(\mathbb{T}^2)} \times \sup_{q \in L_2(\mathbb{T}^2)} \left(\frac{1}{\|q\|} \inf_{\phi^h \in \tilde{S}^1(\mathbb{T}^2)} \|\phi_q - \phi^h\|_{H^1(\mathbb{T}^2)} \right), \quad (22)$$

где ϕ_q – единственное решение вариационной задачи

$$a(\phi_q, v) = \langle q, v \rangle \quad \text{для всех } v \in \tilde{H}^1(\mathbb{T}^2). \quad (23)$$

Инфимум в (22) оценивается аналогично (21) и подобно доказательству оценки (8) теоремы 2 имеем

$$\inf_{\phi^h \in \tilde{S}^1(\mathbb{T}^2)} \|\phi_q - \phi^h\|_{H^1(\mathbb{T}^2)} \leq C_1 h \|\phi_q\|_{H^2(\mathbb{T}^2)} \leq C_2 h \|q\|. \quad (24)$$

Подставив полученную оценку в (22) с учётом неравенства (19), окончательно получаем (20). Теорема доказана.

Исследуем сходимость метода в норме $L_2(\mathbb{T}^2)$ при негладких наклонах $g_1, g_2 \in L_2(\mathbb{T}^2)$.

Теорема 5. Пусть $g_1, g_2 \in L_2(\mathbb{T}^2)$. Тогда справедлива оценка скорости сходимости

$$\|u^h - u\| \leq C_3 h \|g\|. \quad (25)$$

Доказательство. Обратимся снова к неравенству (22). Поскольку задача (23) не зависит от наклонов g_1, g_2 , то для оценки инфимума воспользуемся (24). В силу неравенства треугольника и (4), (18) имеем

$$\|u^h - u\|_{H^1(\mathbb{T}^2)} \leq \|u^h\|_{H^1(\mathbb{T}^2)} + \|u\|_{H^1(\mathbb{T}^2)} \leq 2\sqrt{2}\|g\|.$$

Подставив полученные оценки в (22), приходим к (25). Теорема доказана.

3. Проекционная схема со стабилизатором дробной гладкости. Рассмотрим следующую модификацию схемы (5):

$$B_2 \Lambda_1 w^h + B_1 \Lambda_2 w^h + \gamma (\Lambda_1 \Lambda_2)^s w^h = f. \quad (26)$$

По сравнению с (5) схема (26) содержит зависящий от двух параметров $\gamma > 0$, $s > 0$ дополнительный стабилизатор $\gamma (\Lambda_1 \Lambda_2)^s w^h$. Это слагаемое отвечает за выравнивание частотной характеристики метода в области средних частот и приносит в уравнение смешанные производные дробного порядка. Различные способы выбора параметров стабилизатора обсуждаются в работе [10].

Действие стабилизатора реализуется в пространстве фурье-коэффициентов разложения по комплексным экспонентам $e_{m,n}$ в виде мультипликатора $\gamma (\lambda_m \lambda_n)^s$, а для самих коэффициентов $\hat{w}_{m,n}^h$ разложения искомого решения задачи (26) имеет место формула

$$\hat{w}_{m,n}^h = \frac{\hat{f}_{m,n}}{\mu_n \lambda_m + \mu_m \lambda_n + \gamma (\lambda_m \lambda_n)^s}, \quad 0 \neq (m, n) \in \mathbb{I}^2,$$

где $\hat{f}_{m,n}$ – коэффициенты Фурье правой части f . Из (14), (15) вытекает корректность вычислений по формуле (26).

Далее потребуется вариационный аналог операторного уравнения (26):

$$a_s(w^h, v^h) = \ell(v^h), \quad w^h \in \tilde{S}^1(\mathbb{T}^2) \quad \text{при всех} \quad v^h \in \tilde{S}^1(\mathbb{T}^2), \quad (27)$$

где отвечающая задаче (26) билинейная форма имеет вид

$$a_s(w^h, v^h) = \langle u_x^h, v_x^h \rangle + \langle w_y^h, v_y^h \rangle + \gamma \langle B_1^{-1} B_2^{-1} (\Lambda_1 \Lambda_2)^s u^h, v^h \rangle. \quad (28)$$

Отметим, что в формуле (28) в скалярном произведении в четвертом слагаемом использовано обозначение для восполнения сеточной функции

$$B_1^{-1} B_2^{-1} (\Lambda_1 \Lambda_2)^s w^h = \sum_{(k,l) \in \mathbb{I}^2} (B_1^{-1} B_2^{-1} (\Lambda_1 \Lambda_2)^s w^h)_{k,l} \phi_{k,l}(x, y) \in \tilde{S}^1(\mathbb{T}^2).$$

Теорема 6. Пусть $g_1, g_2 \in L_2(\mathbb{T}^2)$. Тогда задача (26) (задача (27)) имеет единственное решение $w^h \in \tilde{S}^1(\mathbb{T}^2)$ и справедлива оценка

$$\|w^h\|_{H^1(\mathbb{T}^2)} \leq C_1 \|g\|. \quad (29)$$

Пусть $g_1 \in H^{1,0}(\mathbb{T}^2)$, $g_2 \in H^{0,1}(\mathbb{T}^2)$. Тогда справедлива оценка

$$\|\Lambda_j w^h\|_h \leq C_2 (\|g_1\|_{H^{1,0}(\mathbb{T}^2)} + \|g_2\|_{H^{0,1}(\mathbb{T}^2)}), \quad j = 1, 2. \quad (30)$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1. Существование вытекает из (26), где знаменатель не обращается в нуль. Для вывода оценки (29) возьмём в (27) $v^h = w^h$ в качестве пробной функции. Имеем

$$a(w^h, w^h) + \gamma \langle B_1^{-1} B_2^{-1} (\Lambda_1 \Lambda_2)^s w^h, w^h \rangle = \ell(w^h).$$

Перейдём к дискретным функциям во втором слагаемом левой части и получим

$$a(w^h, w^h) + \gamma \langle (\Lambda_1 \Lambda_2)^s w^h, w^h \rangle_h = \ell(w^h).$$

Воспользовавшись далее коэрцитивностью билинейной формы $a(w^h, w^h)$ (оценка (7)), непрерывностью функционала $\ell(w^h)$ (оценка (6)), а также вытекающей из оценки (14) неотрицательностью операторов Λ_1 , Λ_2 , приходим к неравенству (29).

Для доказательства оценки (30) воспользуемся (26), равенством Парсеваля и неравенствами (15):

$$\begin{aligned} \|\Lambda_1 w^h\|_h^2 &= \sum_{(0,0) \neq (m,n) \in \mathbb{I}^2} \lambda_m^2 |\hat{w}_{m,n}^h|^2 = \sum_{(0,0) \neq (m,n) \in \mathbb{I}^2} \frac{\lambda_m^2 |\hat{f}_{m,n}|^2}{(\mu_n \lambda_m + \mu_m \lambda_n + \gamma(\lambda_m \lambda_n)^s)^2} \leq \\ &\leq C_1 \sum_{(0,0) \neq (m,n) \in \mathbb{I}^2} |\hat{f}_{m,n}|^2 = C_1 \|f\|_h^2 \leq C_2 (\|g_1\|_{H^{1,0}(\mathbb{T}^2)}^2 + \|g_2\|_{H^{0,1}(\mathbb{T}^2)}^2). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Исследуем близость решения w^h к точному решению u задачи (3).

Теорема 7. Пусть $g_1, g_2 \in L_2(\mathbb{T}^2)$. Тогда справедлива оценка скорости сходимости

$$\|w^h - u\| \leq (C_3 h + C_4 \gamma \lambda_{N/2}^{\sigma(s)}) \|g\|, \quad \sigma(s) = \max\{2s - 3/2, 0\}. \tag{31}$$

Пусть $g_1 \in H^{1,0}(\mathbb{T}^2)$, $g_2 \in H^{0,1}(\mathbb{T}^2)$. Тогда при $0.25 \leq s$ справедлива оценка скорости сходимости

$$\|w^h - u\|_{H^1(\mathbb{T}^2)} \leq (C_5 h + C_6 \gamma \lambda_{N/2}^{\sigma(s)}) (\|g_1\|_{H^{1,0}(\mathbb{T}^2)} + \|g_2\|_{H^{0,1}(\mathbb{T}^2)}). \tag{32}$$

При $0 < s < 0.25$ оценка имеет вид

$$\|w^h - u\|_{H^1(\mathbb{T}^2)} \leq C_7 h (\|g_1\|_{H^{1,0}(\mathbb{T}^2)} + \|g_2\|_{H^{0,1}(\mathbb{T}^2)}) + C_8 \gamma \|g\|. \tag{33}$$

Также справедлива оценка

$$\|w^h - u\| \leq (C_9 h^2 + C_{10} \gamma \lambda_{N/2}^{\eta(s)}) (\|g_1\|_{H^{1,0}(\mathbb{T}^2)} + \|g_2\|_{H^{0,1}(\mathbb{T}^2)}), \quad \eta(s) = \max\{2s - 2, 0\}. \tag{34}$$

Доказательство. В силу неравенства треугольника имеем

$$\|w^h - u\| \leq \|w^h - u^h\| + \|u^h - u\|, \quad \|w^h - u\|_{H^1(\mathbb{T}^2)} \leq \|w^h - u^h\|_{H^1(\mathbb{T}^2)} + \|u^h - u\|_{H^1(\mathbb{T}^2)}.$$

В правых частях этих неравенств нормы разности $u^h - u$ оцениваются с помощью (19), (20) и (25). Осталось оценить нормы разности $z^h = w^h - u^h$ решения w^h задачи (26) и решения u^h задачи (12). Вычитая почленно равенства (26) и (12), приходим к уравнению

$$B_2 \Lambda_1 z^h + B_1 \Lambda_2 z^h + \gamma (\Lambda_1 \Lambda_2)^s w^h = 0 \tag{35}$$

или, в эквивалентной вариационной форме,

$$a(z^h, v^h) + \gamma \langle B_1^{-1} B_2^{-1} (\Lambda_1 \Lambda_2)^s w^h, v^h \rangle = 0 \quad \text{при каждой } v^h \in \tilde{S}^1(\mathbb{T}^2).$$

Полагая $v^h = z^h$ и используя коэрцитивность билинейной формы, в случае $0.25 \leq s$ имеем

$$\begin{aligned} 0.5 \|z^h\|_{H^1(\mathbb{T}^2)}^2 &\leq a(z^h, z^h) = -\gamma \langle B_1^{-1} B_2^{-1} (\Lambda_1 \Lambda_2)^s w^h, z^h \rangle = \\ &= -\gamma \langle (\Lambda_1 \Lambda_2)^s w^h, z^h \rangle_h = -\gamma \langle (\Lambda_1 \Lambda_2)^{s-1/4} w^h, (\Lambda_1 \Lambda_2)^{1/4} z^h \rangle_h \leq \\ &\leq \gamma \|(\Lambda_1 \Lambda_2)^{s-1/4} w^h\|_h \|(\Lambda_1 \Lambda_2)^{1/4} z^h\|_h \leq C_1 \gamma \|(\Lambda_1 \Lambda_2)^{s-1/4} w^h\|_h \|z^h\|_{H^1(\mathbb{T}^2)}. \end{aligned}$$

Отсюда следуют неравенства

$$\|z^h\|_{H^1(\mathbb{T}^2)} \leq \gamma C_2 \|(\Lambda_1 \Lambda_2)^{s-1/4} w^h\|_h \leq \gamma \lambda_{N/2}^{\sigma(s)} C_3 \|(\Lambda_1 \Lambda_2)^{1/2} w^h\|_h.$$

С помощью оценки (30) имеем

$$\|(\Lambda_1 \Lambda_2)^{1/2} w^h\|_h \leq C_3 (\|\Lambda_1 w^h\|_h + \|\Lambda_2 w^h\|_h) \leq C_4 (\|g_1\|_{H^{1,0}(\mathbb{T}^2)} + \|g_2\|_{H^{0,1}(\mathbb{T}^2)}).$$

Следовательно,

$$\|z^h\|_{H^1(\mathbb{T}^2)} \leq \gamma \lambda_{N/2}^{\sigma(s)} C_5 (\|g_1\|_{H^{1,0}(\mathbb{T}^2)} + \|g_2\|_{H^{0,1}(\mathbb{T}^2)}).$$

В более простом случае $0 < s < 0.25$ воспользуемся оценкой (29):

$$0.5 \|z^h\|_{H^1(\mathbb{T}^2)}^2 \leq \gamma C_1 \|w^h\|_h (\Lambda_1 \Lambda_2)^{1/4} \|z^h\|_h \leq \gamma C_2 \|w^h\|_{H^1(\mathbb{T}^2)} \|z^h\|_{H^1(\mathbb{T}^2)} \leq \gamma C_3 \|g\| \|z^h\|_{H^1(\mathbb{T}^2)},$$

в результате получим

$$\|z^h\|_{H^1(\mathbb{T}^2)} \leq \gamma C_3 \|g\|.$$

Применив далее оценку (19), приходим к (32) и (33).

Получим для z^h оценки дискретной нормы L_2 . Из уравнения (35) вытекает выражение для соответствующих коэффициентов Фурье

$$\hat{z}_{m,n}^h = -\frac{\gamma (\lambda_m \lambda_n)^s \hat{w}_{m,n}^h}{\mu_n \lambda_m + \mu_m \lambda_n}.$$

Отсюда в случае $s > 0.75$ с использованием (14), (15) и неравенства $(\lambda_m \lambda_n)^{1/2} \leq (\lambda_m + \lambda_n)/\sqrt{2}$ имеем

$$\begin{aligned} \|z^h\|_h^2 &= \sum_{(0,0) \neq (m,n) \in \mathbb{I}^2} |\hat{z}_{m,n}^h|^2 = \gamma^2 \sum_{(0,0) \neq (m,n) \in \mathbb{I}^2} \frac{(\lambda_m \lambda_n)^{2s} |\hat{w}_{m,n}^h|^2}{(\mu_n \lambda_m + \mu_m \lambda_n)^2} \leq \\ &\leq C_5 \gamma^2 \sum_{(0,0) \neq (m,n) \in \mathbb{I}^2} \frac{(\lambda_m \lambda_n)^{2s-1/2} (\mu_n \lambda_m + \mu_m \lambda_n) |\hat{w}_{m,n}^h|^2}{(\mu_n \lambda_m + \mu_m \lambda_n)^2} \leq C_5 \gamma^2 \lambda_{N/2}^{4s-3} \|w^h\|_{H^1(\mathbb{T}^2)}^2 \leq C_6 \gamma^2 \lambda_{N/2}^{4s-3} \|g\|^2. \end{aligned}$$

Тогда с учётом (16) получаем

$$\|z^h\| \leq C_7 \gamma \lambda_{N/2}^{2s-3/2} \|g\|.$$

При $0 < s \leq 0.75$ имеем $(\lambda_m \lambda_n)^{2s} \leq C_9 (\mu_n \lambda_m + \mu_m \lambda_n)^3$ и оценка нормы принимает вид

$$\|z^h\| \leq C_9 \gamma \|g\|.$$

Объединив полученные оценки с неравенством (25), заключаем, что при $g \in L_2(\mathbb{T}^2)$ справедливо неравенство

$$\|w^h - u\| \leq (C_3 h + C_{10} \gamma \lambda_{N/2}^{\sigma(s)}) \|g\|.$$

Оценка (31) доказана.

При дополнительной гладкости наклонов $g_1 \in H^{1,0}(\mathbb{T}^2)$, $g_2 \in H^{0,1}(\mathbb{T}^2)$ воспользуемся неравенством

$$(\lambda_m \lambda_n)^{2s} \leq C_{12} \lambda_{N/2}^{2\eta(s)} (\mu_n \lambda_m + \mu_m \lambda_n)^2 (\lambda_m + \lambda_n)^2, \quad \eta(s) = \max\{2s - 2, 0\}.$$

Тогда с учётом неравенств (30) имеем

$$\begin{aligned} \|z^h\|_h^2 &= \gamma^2 \sum_{(0,0) \neq (m,n) \in \mathbb{I}^2} \frac{(\lambda_m \lambda_n)^{2s} |\hat{w}_{m,n}^h|^2}{(\mu_n \lambda_m + \mu_m \lambda_n)^2} \leq \\ &\leq C_{11} \gamma^2 \lambda_{N/2}^{2\eta(s)} \sum_{(0,0) \neq (m,n) \in \mathbb{I}^2} (\lambda_m + \lambda_n)^2 |\hat{w}_{m,n}^h|^2 \leq C_{12} \gamma^2 \lambda_{N/2}^{2\eta(s)} (\|\Lambda_1 w^h\|_h^2 + \|\Lambda_2 w^h\|_h^2) \leq \\ &\leq C_{13} \gamma^2 \lambda_{N/2}^{2\eta(s)} (\|g_1\|_{H^{1,0}(\mathbb{T}^2)}^2 + \|g_2\|_{H^{0,1}(\mathbb{T}^2)}^2). \end{aligned}$$

С помощью (20) получаем неравенство (34). Теорема доказана.

Обсудим согласование параметров в оценках теоремы 7. Полученные в теореме 7 оценки показывают, что для сходимости проекционного метода выбор параметров γ и s необходимо согласовывать с шагом сетки h в зависимости от гладкости наклонов и выбора нормы. Учтём, что в силу (13) $\lambda_{N/2} = 4h^{-2}$. Тогда для случая $g_1, g_2 \in L_2(\mathbb{T}^2)$ при согласовании $0 < \gamma < C_{14}h^{1+2\sigma(s)}$ в силу (31) имеет место оценка

$$\|w^h - u\| \leq C_{15}h\|g\|. \tag{36}$$

Если же $g_1 \in H^{1,0}(\mathbb{T}^2)$, $g_2 \in H^{0,1}(\mathbb{T}^2)$, то при $0 < \gamma < C_{16}h^{2+2\eta(s)}$ в силу (34) справедлива оценка скорости сходимости

$$\|w^h - u\| \leq C_{17}h^2(\|g_1\|_{H^{1,0}(\mathbb{T}^2)} + \|g_2\|_{H^{0,1}(\mathbb{T}^2)}), \tag{37}$$

а при $0 < \gamma < C_{18}h^{1+2\sigma(s)}$ в силу (32) имеем

$$\|w^h - u\|_{H^1(\mathbb{T}^2)} \leq C_{19}h(\|g_1\|_{H^{1,0}(\mathbb{T}^2)} + \|g_2\|_{H^{0,1}(\mathbb{T}^2)}). \tag{38}$$

Таким образом, при выполнении вычислительных экспериментов для наилучшего использования свойства выравнивания частотной характеристики схемы при одновременном сохранении точности вычислений параметр γ следует брать достаточно малым. Результаты вычислительных экспериментов подтверждают справедливость сделанных теоретических оценок точности с согласованным выбором параметров.

4. Оценки скорости сходимости в пространствах дробной гладкости. В данном пункте с помощью интерполяции оператора погрешности выведем оценки скорости сходимости в анизотропных пространствах дробной гладкости. Введём необходимые обозначения. Пусть X и Y – гильбертовы пространства со скалярными произведениями $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$ и соответствующими евклидовыми нормами $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$, причём X вложено в Y , всюду плотно и непрерывно. Из [11, п. 2.1] известно, что существует $\Lambda = \Lambda^* > 0$ – некоторый, вообще говоря, неограниченный оператор в Y с $D(\Lambda) = X$, причём норма в X эквивалентна норме графика Λ . Следуя [11], для $\theta \in [0, 1]$ рассмотрим промежуточные пространства Лионса $[X, Y]_\theta = D(\Lambda^{1-\theta})$ с нормой графика $\|u\|_{[X, Y]_\theta} = (\|u\|_Y^2 + \|\Lambda^{1-\theta}u\|_Y^2)^{1/2}$. Очевидно, что $[X, Y]_0 = X$, $[X, Y]_1 = Y$, т.е. пространства $[X, Y]_\theta$ непрерывно соединяют крайние пространства X и Y . В частности, аналогично [11, гл. 1, ш. 9 и 13] с использованием теоремы об интерполяции пересечений пространств проверяется, что для $\theta \in [0, 1]$ справедливы равенства

$$[H^1(\mathbb{T}^2), L_2(\mathbb{T}^2)]_\theta = H^{1-\theta}(\mathbb{T}^2), \tag{39}$$

$$[H^{1,0}(\mathbb{T}^2) \times H^{0,1}(\mathbb{T}^2), L_2(\mathbb{T}^2) \times L_2(\mathbb{T}^2)]_\theta = H^{1-\theta,0}(\mathbb{T}^2) \times H^{0,1-\theta}(\mathbb{T}^2). \tag{40}$$

Также потребуются интерполяционные пространства, построенные с помощью К-метода. Рассмотрим функционалы

$$K_p(t, a; X, Y) = \inf_{a_0+a_1=a, a_0 \in X, a_1 \in Y} (\|a_0\|_X^p + t^p\|a_1\|_Y^p)^{1/p}, \quad p \in \{1, 2\}.$$

Согласно [18, п. 1.3.2] при $\theta \in (0, 1)$ определим интерполяционные пространства

$$(X, Y)_{\theta, 2} = \left\{ a \in Y : \|a\|_{(X, Y)_{\theta, 2}} = \left(\int_0^{+\infty} t^{-1-2\theta} K_1^2(t, a; X, Y) dt \right)^{1/2} < +\infty \right\}.$$

Поскольку $K_2 \leq K_1 \leq \sqrt{2}K_2$, то использование функционала K_2 в предыдущем определении даёт эквивалентную норму. Отсюда в силу [11, теорема 15.1] при каждом $\theta \in (0, 1)$ вытекает

эквивалентность норм пространств $[X, Y]_\theta$ и $(X, Y)_{\theta,2}$. Однако равномерной по параметру θ эквивалентности нет в силу полученного в упомянутой теореме равенства

$$\int_0^{+\infty} t^{-1-2\theta} K_2^2(t, a; X, Y) dt = C(\theta) \|\Lambda^{1-\theta} a\|_Y^2 \tag{41}$$

с неограниченным при $\theta \rightarrow 0 + 0$, $\theta \rightarrow 1 - 0$ множителем

$$C(\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{s^{1-2\theta}}{1+s^2} ds = \frac{\pi}{2 \sin(\pi\theta)}$$

(см. также [19, с. 116]).

Если \mathcal{X} и \mathcal{Y} – другая пара пространств со свойствами, аналогичными свойствам пары X и Y , то имеет место следующее утверждение (см., например, [18, теорема 1.3.3]).

Теорема 8. Пусть для двух пар пространств X, Y и \mathcal{X}, \mathcal{Y} задан линейный оператор $T \in L(X \rightarrow \mathcal{X}) \cap L(Y \rightarrow \mathcal{Y})$. Тогда $T \in L((X, Y)_{\theta,2} \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{Y})_{\theta,2})$ и справедлива оценка

$$\|T\|_{L((X, Y)_{\theta,2} \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{Y})_{\theta,2})} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta, \quad M_0 = \|T\|_{L(X \rightarrow \mathcal{X})}, \quad M_1 = \|T\|_{L(Y \rightarrow \mathcal{Y})}. \tag{42}$$

Нам потребуется следствие из этой теоремы для промежуточных пространств Лионса. Для любого $a \in [X, Y]_\theta$ в силу (42) имеем неравенство

$$\|Ta\|_{(\mathcal{X}, \mathcal{Y})_{\theta,2}} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|a\|_{(X, Y)_{\theta,2}}. \tag{43}$$

Поскольку при переходе от нормы пространства К-метода к норме пространства Лионса фигурирующий в (41) множитель $C(\theta)$ входит в обе части неравенства (43), то после несложных перенормировок получаем неравенство в пространствах Лионса с независимой от $\theta \in [0, 1]$ константой $C_{20} > 0$:

$$\|Ta\|_{[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]_\theta} \leq C_{20} M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|a\|_{[X, Y]_\theta}. \tag{44}$$

Теорема 9. Пусть выполнено условие согласования параметров схемы и шага сетки $0 < \gamma < C_{21} h^{1+2\sigma(s)}$, $0 < h < 1$. Тогда для любых $\alpha \in [0, 1]$ справедливы следующие оценки:

$$\|w^h - u\|_{H^\alpha(\mathbb{T}^2)} \leq C_{22} h (\|g_1\|_{H^{\alpha,0}(\mathbb{T}^2)} + \|g_2\|_{H^{0,\alpha}(\mathbb{T}^2)}), \tag{45}$$

$$\|w^h - u\|_{L_2(\mathbb{T}^2)} \leq C_{23} h^{1+\alpha} (\|g_1\|_{H^{\alpha,0}(\mathbb{T}^2)} + \|g_2\|_{H^{0,\alpha}(\mathbb{T}^2)}), \tag{46}$$

$$\|w^h - u\|_{H^\alpha(\mathbb{T}^2)} \leq C_{24} h^{2-\alpha} (\|g_1\|_{H^{1,0}(\mathbb{T}^2)} + \|g_2\|_{H^{0,1}(\mathbb{T}^2)}). \tag{47}$$

Доказательство. Рассмотрим оператор погрешности проекционной схемы

$$R : g = (g_1, g_2) \mapsto w^h - u$$

на разных сочетаниях пар пространств, участвующих в оценках (36)–(38).

Начнём с оценок (36), (38). Имеем $R \in L(L_2(\mathbb{T}^2) \times L_2(\mathbb{T}^2) \rightarrow L_2(\mathbb{T}^2))$ с операторной нормой $M_1 \leq C_{15} h$ и $R \in L(H^{1,0}(\mathbb{T}^2) \times H^{0,1}(\mathbb{T}^2) \rightarrow H^1(\mathbb{T}^2))$ с операторной нормой $M_0 \leq C_{19} h$. Применим неравенство (44), в котором в роли T выступает оператор погрешности R на парах пространств $Y = L_2(\mathbb{T}^2) \times L_2(\mathbb{T}^2)$, $\mathcal{Y} = L_2(\mathbb{T}^2)$ и $X = H^{1,0}(\mathbb{T}^2) \times H^{0,1}(\mathbb{T}^2)$, $\mathcal{X} = H^1(\mathbb{T}^2)$. Тогда с учётом соотношений (39), (40) неравенство (44) принимает вид

$$\|w^h - u\|_{H^{1-\theta}(\mathbb{T}^2)} \leq C_{22} h (\|g_1\|_{H^{1-\theta,0}(\mathbb{T}^2)} + \|g_2\|_{H^{0,1-\theta}(\mathbb{T}^2)}).$$

Обозначив $\alpha = 1 - \theta$, получим (45).

Из рассмотрения оценок (36), (37) вытекает возможность применить для оператора погрешности R неравенство (44) на парах пространств $Y = L_2(\mathbb{T}^2) \times L_2(\mathbb{T}^2)$, $\mathcal{Y} = L_2(\mathbb{T}^2)$ с операторной нормой $M_1 \leq C_{15}h$ и $X = H^{1,0}(\mathbb{T}^2) \times H^{0,1}(\mathbb{T}^2)$, $\mathcal{X} = L_2(\mathbb{T}^2)$ с операторной нормой $M_0 \leq C_{17}h^2$. Положив $\theta = 1 - \alpha$, приходим к оценке (46).

Наконец, оценки (37), (38) позволяют рассмотреть оператор погрешности на парах пространств $Y = H^{1,0}(\mathbb{T}^2) \times H^{0,1}(\mathbb{T}^2)$, $\mathcal{Y} = L_2(\mathbb{T}^2)$ с операторной нормой $M_1 \leq C_{17}h^2$ и $X = H^{1,0}(\mathbb{T}^2) \times H^{0,1}(\mathbb{T}^2)$, $\mathcal{X} = H^1(\mathbb{T}^2)$ с операторной нормой $M_0 \leq C_{19}h$. Положив $\theta = 1 - \alpha$ и применив (44), получим (47). Теорема доказана.

5. Пример восстановления негладкого волнового фронта по неточно заданным наклонам. Качество восстановления негладкого волнового фронта продемонстрируем на примере поверхности, задаваемой уравнением

$$u(x, y, n, \varkappa) = u_0 + \exp\{-(r/a)^{2M}\}U(x, y, n, \varkappa),$$

$$U(x, y, n, \varkappa) = \begin{cases} (\varkappa r + 2n(\varphi - \pi/2) + \pi/6) \bmod 2\pi, & \text{если } \left[\frac{\varkappa r + 2n(\varphi - \pi/2) + \pi/6}{2\pi} \right] \text{ нечётное;} \\ 2\pi - (\varkappa r + 2n(\varphi - \pi/2) + \pi/6) \bmod 2\pi, & \text{если } \left[\frac{\varkappa r + 2n(\varphi - \pi/2) + \pi/6}{2\pi} \right] \text{ чётное,} \end{cases} \quad (48)$$

где $\varphi = \operatorname{argctg}(y/x)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $n \in \mathbb{N}$, $\varkappa \in \mathbb{R}$, $[\cdot]$ – целая часть числа. Функция из (48) описывает многолепестковую (при $\varkappa = 0$) и спиральную (при $\varkappa \neq 0$) структуры с n рукавами, при этом параметр \varkappa отвечает за степень закрученности спирали. Такая функция служит адекватной моделью для кусочно-гладких фазовых фронтов, встречающихся при работе датчиков Шака–Гартмана. Константа u_0 выбирается из условия равенства нулю среднего значения функции, 2π -периодичность рассматриваемой функции по переменным x , y обеспечивалась приближённым равенством нулю самой функции и её производных при достаточно большом M (в расчётах брались значения $a = 0.7\pi$, $M = 4$).

В приведённом примере для численного моделирования в качестве исходных данных брались дискретные значения точных наклонов волнового фронта (48), к которым далее добавлялся 5%-й гауссов шум для имитации искажений измерений наклонов на сетке 512×512 . Далее проводилось восполнение дискретных наклонов из пространства сплайнов $S^1(\mathbb{T}^2)$ и находилась правая часть в (12), которая в этом случае выражается через разностные производные от дискретных наклонов (подробнее см. в [9]). Результаты вычислений на примере волнового фронта (48) с параметрами $\varkappa = 2$, $n = 3$ иллюстрируются на рис. 1, а для схемы без стабилизатора ($\gamma = 0$) и на рис. 1, б для схемы со стабилизатором ($\gamma = 0.03$, $s = 0.9$) в виде сечений волнового фронта окружностью $r = \pi/2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. На рис. 2 приведены графики сечений отклонений от искомого волнового фронта (48) полученного решения со стабилизатором и без него. Сравнение показывает, что схема уверенно справляется с восстановлением кусочно-гладких фаз. При этом линии разрывов производной точно локализуются и в областях вне разрывов имеет место хорошее поточечное приближение. Как видно из графиков, использование стабилизатора приводит к эффективному локальному сглаживанию паразитных искажений волнового фронта, вызванных неточностью измерений наклонов.

Заключение. В работе рассмотрена проблема восстановления волнового фронта по его наклонам, которая возникает в адаптивной оптике и связана с определением фазы световой волны на основе датчика Шака–Гартмана. Вариационная постановка задачи приводит к уравнению Пуассона на подпространстве периодических функций с нулевым средним, при этом свойство коэрцитивности задачи вытекает из неравенства Пуанкаре для таких функций. При условии согласования шага сетки с параметрами стабилизатором дробного порядка получены оценки точности проекционного метода на основе билинейных сплайнов при естественных требованиях к гладкости волнового фронта из анизотропных пространств Соболева с целыми показателями гладкости. На основе выбора специальных анизотропных пространств с дробными показателями гладкости, составляющих непрерывную шкалу, соединяющую пространства

с целыми показателями гладкости, и использования связанных с ними методов интерполяции оператора погрешности проекционного метода получены шкалы оценок точности метода, согласованные с дробной гладкостью наклонов. Теоретические оценки иллюстрируются результатами численного эксперимента по эффективному восстановлению кусочно-негладких спиральных волновых фронтов в условиях неточно заданных дискретных наклонов.

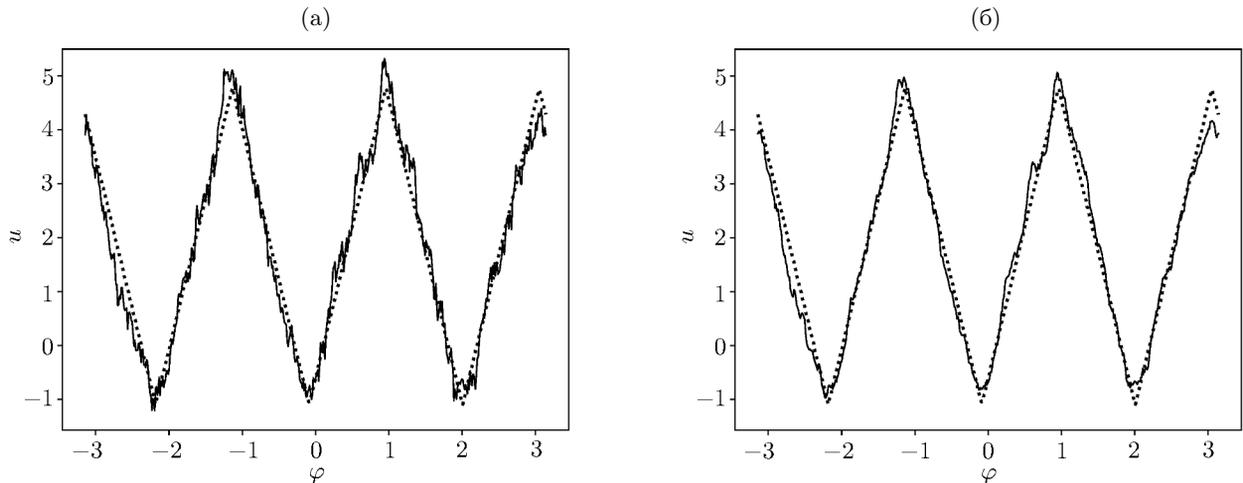


Рис. 1. Графики сечений при $r = \pi/2$ искомого фронта $u(x, y, 3, 2)$ (пунктирная линия) и w^h (сплошная линия) без стабилизатора (а) и со стабилизатором (б).

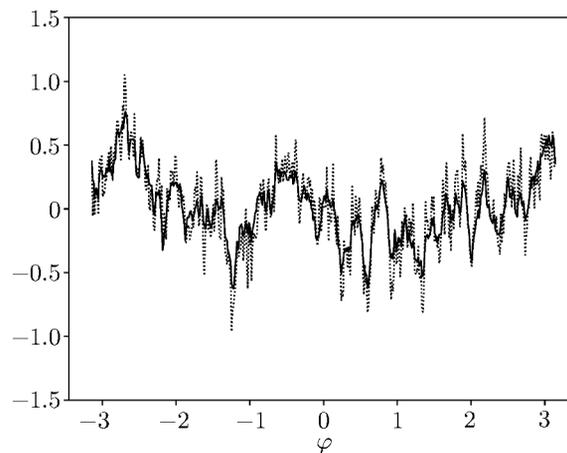


Рис. 2. Графики сечений при $r = \pi/2$ отклонений w^h от искомого фронта $u(x, y, 3, 2)$ без стабилизатора (пунктирная линия) и со стабилизатором (сплошная линия).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-29-02103) (А.В. Разгулин, Н.Г. Ирошников, А.В. Ларичев) и Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение 075-15-2022-284) (А.В. Разгулин, Т.Е. Романенко).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Platt B.C., Shack R. History and principles of Shack–Hartmann wavefront sensing // J. Refract. Surg. 2001. V. 17. № 5. P. S573–S577.
2. Andreeva M.S., Iroshnikov N.G., Koryabin A.B., Larichev A.V., Shmalgauzen V.I. Usage of wavefront sensor for estimation of atmospheric turbulence parameters // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2012. V. 48. P. 197–204.

3. *Baryshnikov N.V., Denisov D.G., Dzhumamuratova A.A., Larichev A.V.* Development and research of an optoelectronic device based on a wavefront sensor to control the form parameters of intraocular lenses // *Measurement Techniques*. 2019. V. 62. P. 31–35.
4. *Goncharov A.S., Iroshnikov N.G., Larichev A.V., Nikolaev I.P.* The impact of speckle on the measurement of eye aberrations // *J. of Modern Optics*. 2015. V. 62. № 21. P. 1775–1780.
5. *Bahk S.W.* Highly accurate wavefront reconstruction algorithms over broad spatial-frequency bandwidth // *Optics Express*. 2011. V. 19. № 20. P. 18997–19014.
6. *Zhariy M., Neubauer A., Rosensteiner M., Ramlau R.* Cumulative wavefront reconstructor for the Shack–Hartmann sensor // *Inverse Problems and Imaging*. 2011. V. 5. № 4. P. 893–913.
7. *Neubauer A.* On the ill-posedness and convergence of the Shack–Hartmann based wavefront reconstruction // *J. of Inverse and Ill-posed Problems*. 2010. V. 18. № 5. P. 551–576.
8. *Kindermann S., Neubauer A., Ramlau R.* A singular value decomposition for the Shack–Hartmann based wavefront reconstruction // *J. of Comput. and Appl. Math.* 2012. V. 236. № 8. P. 2186–2199.
9. *Razgulin A.V., Kuzhamaliyev Y.Z., Goncharov A.S., Larichev A.V.* A variational method for wavefront reconstruction from Shack–Hartman sensor measurements // *Atmospheric and Oceanic Optics*. 2017. V. 30. № 4. P. 399–403.
10. *Razgulin A.V., Kuzhamaliyev Y.Z., Iroshnikov N.G., Larichev A.V.* A variational method of wavefront reconstruction from local slope measurements using a fractional order of smoothness stabilizer // *Comput. Math. and Model.* 2019. V. 30. № 2. P. 164–176.
11. *Лионс Ж.-Л., Маджисенес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.
12. *Adams R., Fournier J.* Sobolev Spaces. Pure and Applied Mathematics. V. 140. Amsterdam, 2003.
13. *Kuznetsov N., Nazarov A.* Sharp constants in the Poincare, Steklov and related inequalities (a survey) // *Mathematika*. 2015. V. 61. № 2. P. 328–344.
14. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., 1980.
15. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. М., 1977.
16. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. М., 1981.
17. *Варга Р.* Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. М., 1974.
18. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М., 1980.
19. *Tartar L.* An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces. Berlin; Heidelberg, 2007.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
ООО “ВК Цифровые технологии”,
г. Москва

Поступила в редакцию 18.02.2022 г.
После доработки 18.02.2022 г.
Принята к публикации 25.05.2022 г.