ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 8, с. 1011–1019

## ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.51

# О СУЩЕСТВОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ЛЯПУНОВСКОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТЬЮ, ВСЕ РЕШЕНИЯ КОТОРОЙ СТРЕМЯТСЯ К НУЛЮ ПРИ НЕОГРАНИЧЕННОМ РОСТЕ ВРЕМЕНИ

 А. А. Бондарев

Конструктивно на конкретном примере доказывается, что из стремления к нулю (при неограниченном росте времени) абсолютно всех решений неавтономной двумерной дифференциальной системы, вообще говоря, не следует никакая вообще (даже хотя бы частичная) ляпуновская устойчивость её нулевого решения, поскольку при этом может случиться, что каждое её ненулевое решение хотя бы однажды удаляется от нуля на достаточное расстояние. Построенная в работе нелинейная система обладает к тому же и нулевым первым приближением вдоль нулевого решения.

DOI: 10.31857/S0374064122080015, EDN: CESKTK

Настоящая работа посвящена исследованию сочетаний ляпуновских, перроновских [1] и верхнепредельных [2] свойств дифференциальных систем. Она логически продолжает цикл работ [3–5], усиливая их результаты:

1) работа [3] исправляла недостаток, указанный в замечании 4 к теореме 1 (см. [6]) (о неограниченности линейного приближения построенной системы вдоль нулевого решения), однако построенная в ней система обладала хотя и *ограниченным* на всей полуоси времени, но всё же *ненулевым* линейным приближением вдоль нулевого решения;

2) в работе [4] построена система, обладающая теми же свойствами, но уже с *нулевым* линейным приближением;

3) в работе [5] построена система с ещё более сильными свойствами, а именно, как *перроновской*, так и *верхнепредельной*, с одной стороны, *полной неустойчивостью* (а значит, и *ляпуновской глобальной неустойчивостью*), а с другой – *массивной частной устойчивостью* (в отличие от всех рассмотренных выше примеров, в которых эта частная устойчивость была лишь *точечной*).

Следующее ниже усиление перечисленных результатов состоит в построении системы, обладающей одновременно следующими свойствами:

– *ляпуновской глобальной неустойчивостью* (которой обладали также примеры из работ [3–5]);

– *перроновской* и *верхнепредельной глобальной устойчивостью* (в отличие от всех примеров, предложенных ранее).

Для числа $n \in \mathbb{N}$ и области $G$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ (с нормой $|\cdot|$), содержащей начало координат, рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0,+\infty), \quad x \in G, \tag{1}$$

с правой частью $f : \mathbb{R}_+ \times G \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условиям

$$f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \quad f(t,0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

а значит, обеспечивающей существование и единственность решений задач Коши и допускающей нулевое решение. Обозначим через $\mathcal{S}_*(f)$ множество всех непродолжаемых ненулевых решений системы (1), а через $\mathcal{S}_\delta(f) \subset \mathcal{S}_*(f)$ – его подмножество, состоящее из тех решений $x$, которые удовлетворяют начальному условию $|x(0)| < \delta$.

**Определение 1.** Скажем, что для системы (1) (точнее, для её *нулевого* решения, о чём мы для краткости не будем далее упоминать) имеет место *перроновская* или, соответственно, *верхнепредельная*:

1) *устойчивость*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ удовлетворяет требованию

$$\varliminf_{t\to+\infty} |x(t)| < \varepsilon \quad \text{или, соответственно,} \quad \varlimsup_{t\to+\infty} |x(t)| < \varepsilon; \tag{2}$$

2) *неустойчивость*, если устойчивость не имеет места, а именно, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ некоторое решение $x \in \mathcal{S}_\delta(f)$ не удовлетворяет требованию (2);

3) *глобальная устойчивость*, если сразу все решения $x \in \mathcal{S}_*(f)$ удовлетворяют требованию

$$\varliminf_{t\to+\infty} |x(t)| = 0 \quad \text{или, соответственно,} \quad \lim_{t\to+\infty} |x(t)| = 0; \tag{3}$$

4) *глобальная неустойчивость*, если для некоторого $\varepsilon > 0$ ни одно решение $x \in \mathcal{S}_*(f)$ не удовлетворяет требованию (2).

**Определение 2.** С каждым из четырёх введённых в определении 1 перроновских или верхнепредельных свойств системы (1) сопоставим *ляпуновское* свойство:

1) *устойчивость* и *неустойчивость по Ляпунову* получаются соответственно повторением описаний из пп. 1) и 2) определения 1 с механической заменой в них требования (2) требованием

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |x(t)| < \varepsilon; \tag{4}$$

2) *глобальная устойчивость по Ляпунову*, означающая, что система (1) устойчива по Ляпунову и сразу все решения $x \in \mathcal{S}_*(f)$ удовлетворяют второму из требований (3);

3) *глобальная неустойчивость по Ляпунову*, означающая, что для некоторого $\varepsilon > 0$ сразу все решения $x \in \mathcal{S}_*(f)$ не удовлетворяют требованию (4).

Подчеркнём, что в этих определениях требования (2)–(4) считаются невыполненными, в частности, уже тогда, когда решение $x$ попросту определено не на всей полуоси $\mathbb{R}_+$, т.е. когда соответствующая ему фазовая кривая за конечное время выходит к границе фазовой области $G$ (согласно теореме о продолжаемости решений; см., например, [7, теорема 23]).

Здесь не приведены такие (не менее интересные [2, 8], но не изучаемые в данной работе) разновидности перроновских, верхнепредельных и ляпуновских свойств, как асимптотическая устойчивость или неустойчивость, частная устойчивость, массивная частная устойчивость, частичная устойчивость, полная неустойчивость.

Основной результат настоящей работы состоит в доказательстве существования дифференциальной системы, у которой все решения при неограниченном росте времени стремятся по норме к нулю (следовательно, эта система обладает глобальной перроновской и верхнепредельной устойчивостью), но при этом фазовая кривая каждого ненулевого решения хотя бы однажды покидает фиксированную окрестность начала координат (т.е. система является ещё и глобально неустойчивой по Ляпунову).

Система, существование которой утверждается в следующей ниже теореме, *неавтономна* и *двумерна*, и не случайно:

– автономной системы с такими свойствами не существует [9], поскольку ляпуновская глобальная неустойчивость в автономном случае влечёт за собой и перроновскую (а значит, и верхнепредельную) глобальную неустойчивость;

– одномерной такой системы не существует [2], поскольку в одномерном случае верхнепредельная глобальная устойчивость влечёт за собой и ляпуновскую глобальную устойчивость.

**Теорема.** *При $n = 2$ и $G = \mathbb{R}^2$ существует система (1), которая имеет правую часть, удовлетворяющую условию*

$$f'_x(t, 0) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

*и обладает следующими двумя свойствами:*

1) *для всех решений* $x$ *системы (1) справедливо равенство*

$$\lim_{t\to+\infty}|x(t)|=0;$$

2) *для всех ненулевых решений* $x$ *системы (1) справедливо неравенство*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+}|x(t)|>1.$$

Перед доказательством теоремы приведём две технические леммы.

**Лемма 1.** *Функция* $\theta_1:(0,+\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *заданная условиями*

$$\theta_1(\rho,\varphi)=\begin{cases}\varphi, & 0<\rho\leqslant 1;\\ \varphi+\dfrac{\pi}{2}\biggl(\displaystyle\int\limits_1^\rho\chi_1(\tau)d\tau\biggr)\biggl(\displaystyle\int\limits_1^2\chi_1(\tau)d\tau\biggr)^{-1}, & 1<\rho<2;\\ \varphi+\dfrac{\pi}{2}, & \rho\geqslant 2,\end{cases}\tag{5}$$

*где*

$$\chi_1(v)=\begin{cases}0, & v\leqslant 1\quad \textit{или}\quad v\geqslant 2;\\ \exp\biggl(\dfrac{1}{(v-1)(v-2)}\biggr), & 1<v<2,\end{cases}$$

*обладает следующими свойствами:*

*1) при каждом фиксированном значении переменной* $\rho\in(0,+\infty)$ *функция* $\theta_1(\rho,\cdot)$ *является биекцией из прямой* $\mathbb{R}$ *в себя и удовлетворяет неравенству*

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\varphi}(\rho,\varphi)>0,\quad \varphi\in\mathbb{R};$$

*2) является бесконечно дифференцируемой функцией по совокупности переменных.*

**Доказательство.** Прежде всего покажем, что функция $\theta_1(\,\cdot\,,\varphi)$ является $C^\infty$-гладкой функцией своего аргумента при каждом фиксированном значении переменной $\varphi\in\mathbb{R}$. Для этого сначала заметим, что она является константой (а значит, и гладкой функцией) на промежутках $(0,1]$ и $[2,+\infty)$. Внутри интервала $(1,2)$ гладкость по построению тоже имеется, поэтому остаётся её проверить в двух концевых точках: 1 и 2.

Выполнение равенств

$$\theta_1(1+0,\varphi)=\varphi+\frac{\pi}{2}\biggl(\int\limits_1^{1+0}\chi_1(\tau)d\tau\biggr)\biggl(\int\limits_1^2\chi_1(\tau)d\tau\biggr)^{-1}=\varphi=\theta_1(1-0,\varphi)$$

и

$$\theta_1(2-0,\varphi)=\varphi+\frac{\pi}{2}\biggl(\int\limits_1^{2}\chi_1(\tau)d\tau\biggr)\biggl(\int\limits_1^2\chi_1(\tau)d\tau\biggr)^{-1}=\varphi+\frac{\pi}{2}=\theta_1(2+0,\varphi)$$

доказывает непрерывность в точках 1 и 2 соответственно.

Далее, выполнение равенств

$$\theta_1{}'_\rho(1+0,\varphi)=\frac{\pi}{2}\chi_1(1+0)\biggl(\int\limits_1^2\chi_1(\tau)d\tau\biggr)^{-1}=0=\theta_1{}'_\rho(1-0,\varphi)$$

и

$$
{\theta_1}'_\rho(2+0,\varphi) = 0 = \frac{\pi}{2}\chi_1(2-0)\biggl(\int\limits_1^2 \chi_1(\tau)d\tau\biggr)^{-1} = {\theta_1}'_\rho(2-0,\varphi)
$$

доказывает непрерывную дифференцируемость в точках 1 и 2 соответственно.

Теперь заметим, что выполняются равенства

$$
\chi_1^{(m)}(1) = \chi_1^{(m)}(2) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,
$$

в силу которых и равенств (5), а также гладкости функции $\chi_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ функция $\theta_1(\,\cdot\,,\varphi)$ является бесконечно дифференцируемой функцией для каждого фиксированного значения переменной $\varphi \in \mathbb{R}$. Отсюда и из равенств (5) следует, что функция $\theta_1$ имеет непрерывные по совокупности переменных $(\rho,\varphi)$ производные всех порядков по $\rho$ и $\varphi$ всюду на декартовом произведении $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$, поэтому свойство 2) настоящей леммы выполнено.

Наконец, заметим, что при каждом фиксированном значении переменной $\rho \in (0,+\infty)$ функция $\theta_1(\rho,\cdot\,)$ является линейной всюду на прямой $\mathbb{R}$, а поэтому монотонной (возрастающей) и взаимно-однозначной функцией из прямой $\mathbb{R}$ в себя. Отсюда следует свойство 1).

Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Функция* $\theta_2 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *задаваемая условиями*

$$
\theta_2(t,u) = \begin{cases} u, & u \leqslant \dfrac{1}{3+t}; \\[2mm] u - \displaystyle\int\limits_{1/(3+t)}^{u} \chi_2(t,\tau)d\tau, & \dfrac{1}{3+t} < u < \dfrac{1}{2+t}; \\[2mm] \dfrac{1}{1+t}u + \dfrac{1}{2+t}\biggl(1 - \dfrac{1}{1+t}\biggr) - \Sigma(t), & u \geqslant \dfrac{1}{2+t}, \end{cases} \tag{6}
$$

*где*

$$
\chi_2(t,v) = \begin{cases} 0, & v \leqslant \dfrac{1}{3+t}; \\[2mm] \sigma(t)\displaystyle\int\limits_{1/(3+t)}^{v} \exp\biggl(\biggl(\tau - \frac{1}{3+t}\biggr)^{-1}\biggl(\tau - \frac{1}{2+t}\biggr)^{-1}\biggr)d\tau, & \dfrac{1}{3+t} < v < \dfrac{1}{2+t}; \\[2mm] \dfrac{t}{1+t}, & v \geqslant \dfrac{1}{2+t}, \end{cases} \tag{7}
$$

$$
\sigma(t) = \frac{t}{1+t}\biggl(\int\limits_{1/(3+t)}^{1/(2+t)} \exp\biggl(\biggl(\tau - \frac{1}{3+t}\biggr)^{-1}\biggl(\tau - \frac{1}{2+t}\biggr)^{-1}\biggr)d\tau\biggr)^{-1},
$$

$$
\Sigma(t) = \int\limits_{1/(3+t)}^{1/(2+t)} \chi_2(t,\tau)d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{8}
$$

*обладает следующими свойствами:*

*1) при каждом фиксированном значении момента* $t \in \mathbb{R}_+$ *функция* $\theta_2(t,\cdot\,)$ *является биекцией из прямой* $\mathbb{R}$ *в себя и удовлетворяет неравенству*

$$
\frac{\partial\theta_2}{\partial u}(t,u) > 0, \quad u \in \mathbb{R};
$$

*2) является бесконечно дифференцируемой функцией по совокупности переменных.*

**Доказательство.** Прежде всего покажем, что функция $\theta_2(t,\cdot)$ является $C^\infty$-гладкой функцией своего аргумента при каждом фиксированном значении момента $t\in\mathbb{R}_+$. Действительно, она является линейной (а значит, и гладкой) функцией всюду на лучах $(-\infty,1/(3+t)]$ и $[1/(2+t),+\infty)$. В интервале $(1/(3+t),1/(2+t))$ гладкость по построению тоже имеется, поэтому остаётся её проверить в двух концевых точках: $1/(3+t)$ и $1/(2+t)$.

Выполнение равенств

$$\theta_2\biggl(t,\frac{1}{3+t}+0\biggr)=\frac{1}{3+t}-\int\limits_{1/(3+t)}^{1/(3+t)+0}\chi_2(t,\tau)d\tau=\frac{1}{3+t}=\theta_2\biggl(t,\frac{1}{3+t}-0\biggr)$$

и

$$\theta_2\biggl(t,\frac{1}{2+t}-0\biggr)=\frac{1}{2+t}-\int\limits_{1/(3+t)}^{1/(2+t)}\chi_2(t,\tau)d\tau=\frac{1}{2+t}-\Sigma(t)=\theta_2\biggl(t,\frac{1}{2+t}+0\biggr)$$

доказывает непрерывность в точках $1/(3+t)$ и $1/(2+t)$ соответственно.

Аналогично, выполнение равенств

$$\theta_{2\,u}'\biggl(t,\frac{1}{3+t}+0\biggr)=1-\chi_2(t,\tau)\Big|_{\tau=1/(3+t)+0}=1=\theta_{2\,u}'\biggl(t,\frac{1}{3+t}-0\biggr)$$

и

$$\theta_{2\,u}'\biggl(t,\frac{1}{2+t}-0\biggr)=1-\chi_2(t,\tau)\Big|_{\tau=1/(2+t)-0}=$$

$$=1-\sigma(t)\biggl(\int\limits_{1/(3+t)}^{1/(2+t)}\exp\biggl(\biggl(\tau-\frac{1}{3+t}\biggr)^{-1}\biggl(\tau-\frac{1}{2+t}\biggr)^{-1}\biggr)d\tau\biggr)=1-\frac{t}{1+t}=\frac{1}{1+t}=\theta_{2\,u}'\biggl(t,\frac{1}{2+t}+0\biggr)$$

доказывает непрерывную дифференцируемость в точках $1/(3+t)$ и $1/(2+t)$ соответственно.

Теперь заметим, что в силу бесконечной дифференцируемости функции $\chi_2$ (которая следует из равенств (7) и (8)), а также выполнения равенств

$$\frac{\partial^m\chi_2}{\partial v^m}\biggl(t,\frac{1}{3+t}\biggr)=\frac{\partial^m\chi_2}{\partial v^m}\biggl(t,\frac{1}{2+t}\biggr)=0,\quad t\in\mathbb{R}_+,\quad m=1,2,3,\ldots,$$

функция $\theta_2(t,\cdot)$ является бесконечно дифференцируемой функцией своего аргумента для каждого фиксированного момента $t\in\mathbb{R}_+$. Покажем также, что она является строго монотонной (возрастающей) и взаимно-однозначной функцией из прямой $\mathbb{R}$ в себя.

Действительно, в силу справедливости для неотрицательной функции $\chi_2$ оценки

$$\chi_2(t,u)=\sigma(t)\biggl(\int\limits_{1/(3+t)}^{u}\exp\biggl(\biggl(\tau-\frac{1}{3+t}\biggr)^{-1}\biggl(\tau-\frac{1}{2+t}\biggr)^{-1}\biggr)d\tau\biggr)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{t}{1+t}=1-\frac{1}{1+t}<1,\quad t\in\mathbb{R}_+,\quad u\in\biggl(\frac{1}{3+t},\frac{1}{2+t}\biggr),$$

для производной

$$\theta_{2\,u}'(t,u)=\begin{cases}1, & u\leqslant\dfrac{1}{3+t};\\ 1-\chi_2(t,u), & \dfrac{1}{3+t}<u<\dfrac{1}{2+t};\\ \dfrac{1}{1+t}, & u\geqslant\dfrac{1}{2+t}\end{cases}$$

справедливо неравенство
$$\theta_2{}'_u(t,u) > 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad u \in \mathbb{R},$$
откуда следует монотонность и инъективность функции $\theta_2(t,\cdot\,)$.

Далее заметим, что при фиксированном значении момента $t \in \mathbb{R}_+$ выполняются соотношения
$$\lim_{u\to-\infty}\theta_2(t,u) = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{u\to+\infty}\theta_2(t,u) = +\infty,$$
в силу которых и непрерывности функции $\theta_2(t,\cdot\,) \in C^\infty(\mathbb{R})$ получаем, что $\theta_2(t,\cdot\,)$ принимает все промежуточные значения от $-\infty$ до $+\infty$, т.е. является сюръективным отображением из прямой $\mathbb{R}$ в себя. Отсюда следует свойство 1) настоящей леммы.

Остаётся заметить, что в силу доказанной ранее гладкости функции $\theta_2(t,\cdot\,) \in C^\infty(\mathbb{R})$, а также равенств (6)–(8) функция $\theta_2$ имеет непрерывные по совокупности переменных $(t,u)$ производные всех порядков по $t$ и $u$ всюду на декартовом произведении $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$, откуда следует свойство 2).

Лемма доказана.

**Доказательство теоремы.** Построение описанной в теореме системы проведём в три этапа.

I. Введём на плоскости с координатами $x_1$, $x_2$ полярные координаты $\rho$, $\varphi$ $(\rho \geqslant 0,\ \varphi \in \mathbb{R})$:
$$x_1 = \rho\cos\varphi, \quad x_2 = \rho\sin\varphi \tag{9}$$
и рассмотрим автономную двумерную систему
$$\begin{pmatrix}\dot\rho\\ \dot\varphi\end{pmatrix} = \rho^2\begin{pmatrix}2-\rho\\ \sin^2\varphi + \chi(\varphi)\end{pmatrix}, \quad \rho^2 \equiv x_1^2 + x_2^2, \quad x \equiv (x_1,x_2)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^2, \tag{10}$$
где
$$\chi(\varphi) = \begin{cases}\cos^2\varphi, & \cos\varphi < 0;\\ 0, & \cos\varphi \geqslant 0.\end{cases}$$

Равенство (10) задаёт векторное поле в области $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$ переменных $(\rho,\varphi)$, которое при помощи локального диффеоморфизма, заданного формулой (9), переносится на проколотую плоскость $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ переменных $(x_1,x_2)$. Полученное поле непрерывно продолжается в начало координат нулём, причём продолженное поле непрерывно дифференцируемо в начале координат и имеет нулевое линейное приближение за счёт наличия в правой части системы множителя $\rho^2$. Из сказанного выше следует, что система (10) допускает нулевое решение, значит, она является системой вида (1).

Первое уравнение системы (10) задаёт динамическую систему на прямой (точнее, на полупрямой $\mathbb{R}_+$, так как по смыслу $\rho \geqslant 0$), имеющую на $\mathbb{R}_+$ две неподвижные точки: 0 и 2. При этом очевидно, что если $\rho(0)$ отлично от 0 и 2, то $\rho(t)\to 2$ при $t\to+\infty$.

А. Рассмотрим сначала все ненулевые решения данной системы, удовлетворяющие условию $\rho(0) < 2$. Такие решения имеются двух типов.

*Тип 1.* Для решений $x$, удовлетворяющих начальному условию $\varphi(0) = 0$, справедливы соотношения
$$\varphi(t) = 0, \quad t\in\mathbb{R}_+, \quad \rho(t)\to 2 \quad \text{при} \quad t\to+\infty. \tag{11}$$

*Тип 2.* Рассмотрим решения, удовлетворяющие условию $\varphi(0)\neq 0$. Заметим, что угловая координата $\varphi(t)$ каждого такого решения $x$ системы (10) возрастает при $t\to+\infty$, поэтому в некоторый момент $t > 0$ оно обязательно войдёт в область (4-ю четверть внутри круга радиуса 2)
$$V^{\bullet}{}_{4;2} \equiv \{x\in\mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 4, \ \ x_1 > 0, \ \ x_2 < 0\},$$
в которой всюду функция $\chi$ нулевая. В этой области система (10) принимает вид
$$\begin{pmatrix}\dot\rho\\ \dot\varphi\end{pmatrix} = \rho^2\begin{pmatrix}2-\rho\\ \sin^2\varphi\end{pmatrix}, \tag{12}$$

следовательно, для рассматриваемых решений выполняются соотношения

$$\varphi(t) \to 2\pi, \quad \rho(t) \to 2 \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{13}$$

Б. Рассмотрим решения, удовлетворяющие условию $\rho(0) > 2$. Такие решения у рассматриваемой системы (10) имеются двух типов.

*Тип 3.* Для решений $x$, удовлетворяющих начальному условию $\varphi(0) = 0$, справедливо равенство (11).

*Тип 4.* Рассмотрим решения, удовлетворяющие условию $\varphi(0) \neq 0$. Заметим, что угловая координата $\varphi(t)$ каждого такого решения $x$ системы (10) возрастает при $t \to +\infty$, поэтому в некоторый момент $t > 0$ оно обязательно войдёт в область (4-ю четверть вне круга радиуса 2)

$$V^{\circ}{}_{4;2} \equiv \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 > 4, \quad x_1 > 0, \quad x_2 < 0\},$$

в которой всюду функция $\chi$ нулевая. В этой области система (10) принимает вид (12), следовательно, для рассматриваемых решений выполняются соотношения (13).

В. Рассмотрим теперь решения, удовлетворяющие начальному условию $\rho(0) = 2$. Такие решения бывают также двух типов.

*Тип 5.* Точка $e_1 = (2, 0)^{\mathrm{т}}$ является особой для рассматриваемой системы (10) и, как показано в пп. А и Б, представляет собой точку притяжения внутренности и внешности круга радиуса 2.

*Тип 6.* Рассмотрим решения $x$, удовлетворяющие условию $\varphi(0) \neq 0$. Угловая координата $\varphi(t)$ каждого решения этого типа удовлетворяет соотношению $\varphi(t) \to 2\pi$ при $t \to +\infty$, поэтому такие решения, как и все остальные ненулевые решения системы (10), асимптотически притягиваются к особой точке $e_1$ при $t \to +\infty$.

II. Сделаем в системе (10) автономную замену координат, заданную формулами

$$\varrho = \rho, \quad \phi = \theta_1(\rho, \varphi), \tag{14}$$

где функция $\theta_1$ задаётся равенствами (5).

Из леммы 1 следует, что при каждом фиксированном значении переменной $\rho \in (0, +\infty)$ к функции $\theta_1(\rho, \cdot)$ существует обратная функция, которая, если её рассматривать уже как функцию от двух аргументов $\rho$ и $\phi$, является бесконечно дифференцируемой всюду на прямом произведении $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$. Заметим также, что при $0 < \rho \leqslant 1$ имеем

$$\theta_1(\rho, \varphi) = \varphi, \tag{15}$$

поэтому полученное при помощи замены (14) векторное поле с помощью локального диффеоморфизма, заданного равенствами

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho \cos \phi \\ \varrho \sin \phi \end{pmatrix}, \quad \varrho \equiv y_1^2 + y_2^2, \tag{16}$$

переносится на проколотую плоскость $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ координат $(y_1, y_2)$, доопределяется непрерывно дифференцируемым образом в начало координат нулём, и полученная таким образом система, задающая это поле, ещё и обладает нулевым линейным приближением вдоль нулевого решения в силу того факта, что этим же свойством, согласно доказанному ранее, обладает система (10).

Итак, построена допускающая нулевое решение автономная дифференциальная система

$$\dot{y} = f_1(y), \quad y \equiv (y_1, y_2)^{\mathrm{т}} \in \mathbb{R}^2, \tag{17}$$

с правой частью $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, удовлетворяющей условиям

$$f_1, {f_1}'_y \in C(\mathbb{R}^2), \quad f_1(0) = 0, \quad {f_1}'_y(0) = 0,$$

качественное поведение решений которой в круговой 1-окрестности начала координат в точности такое же, как и у решений системы (10). Покажем теперь, что для всех ненулевых решений $y$ построенной системы (17) справедливы соотношения

$$\lim_{t\to+\infty} y_1(t)=0 \quad \text{и} \quad \lim_{t\to+\infty} y_2(t)=2. \tag{18}$$

Действительно, согласно доказанному выше, особая точка $e_1$ является точкой притяжения всей проколотой плоскости $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ переменных $(x_1,x_2)$ для системы (10). Поэтому в силу равенства $\theta_1(2,0)=\pi/2$ и формул (14), (16), задающих диффеоморфизм, точка $e_2 = (0,2)^{\mathrm{т}}$ является точкой притяжения проколотой плоскости $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ переменных $(y_1,y_2)$ для системы (17). Отсюда следует выполнение равенств (18).

III. Наконец, сделаем в системе (17) замену переменных:

$$z_1=y_1,\quad z_2=\theta_2(t,y_2), \tag{19}$$

где функция $\theta_2\in C^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ задаётся равенствами (6). Из леммы 2 следует, что при каждом фиксированном значении момента $t\in\mathbb{R}_+$ к функции $\theta_2(t,\cdot\,)$ существует обратная функция, которая, если её рассматривать уже как функцию от двух аргументов $t$ и $z_2$, является бесконечно дифференцируемой всюду на прямом произведении $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$. Покажем, что построенная таким образом неавтономная дифференциальная система

$$\dot z=f_2(t,z),\quad t\in\mathbb{R}_+,\quad z\equiv(z_1,z_2)^{\mathrm{т}}\in\mathbb{R}^2, \tag{20}$$

с правой частью $f_2:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, удовлетворяющей условию

$$f_2, {f_2}'_z\in C(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^2),$$

обладает всеми свойствами, указанными в формулировке настоящей теоремы.

Для этого сначала отметим, что в полосе

$$U(t)\equiv\{y\in\mathbb{R}^2: |y_2|<1/(3+t)\}$$

замена (19) принимает вид

$$z=y, \tag{21}$$

поэтому построенная на данном этапе система (20) допускает нулевое решение и обладает нулевым линейным приближением вдоль нулевого решения, поскольку этим же свойством обладает и система (17).

Далее, в единичном полукруге

$$V^{\bullet}_{3,4;1}\equiv\{z\in\mathbb{R}^2: z_1^2+z_2^2\leqslant 1,\quad z_2<0\},$$

в который хотя бы однажды войдут все ненулевые решения $z$ системы (20), удовлетворяющие начальному условию $|z(0)|\leqslant 1$, замена (19) тоже принимает вид (21), а значит, и вид $z=x$, что следует из равенств (14) и (15). Отсюда, а также из исследованного ранее качественного поведения решений системы (10), следует свойство 2) настоящей теоремы.

Остаётся заметить, что для неотрицательной функции $\Sigma(\cdot)$, определённой равенством (8), справедливы оценки

$$\Sigma(t)=\int\limits_{1/(3+t)}^{1/(2+t)}\chi_2(t,\tau)\,d\tau\leqslant\left(\frac{1}{2+t}-\frac{1}{3+t}\right)\max_{\tau\in[1/(3+t),1/(2+t)]}\chi_2(t,\tau)\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{2+t}-\frac{1}{3+t}\right)\frac{t}{1+t}\to 0,\quad t\to+\infty,$$

а поэтому равномерно по $y_2 \in [1,3]$ имеем

$$\theta_2(t,y_2) = \frac{1}{1+t}y_2 + \frac{1}{2+t}\left(1 - \frac{1}{1+t}\right) - \Sigma(t) \leqslant \frac{3}{1+t} + \frac{1}{2+t} - \Sigma(t) \to 0, \quad t \to +\infty,$$

откуда следует свойство 1) настоящей теоремы. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность профессору И.Н. Сергееву за ценные замечания, способствовавшие значительному улучшению текста работы.

Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС” (проект 21-8-2-4-1).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сергеев И.Н.* Определение устойчивости по Перрону и её связь с устойчивостью по Ляпунову // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 6. С. 855–856.
2. *Сергеев И.Н.* Определение верхнепредельной устойчивости и её связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 11. С. 1556–1557.
3. *Бондарев А.А.* Один пример неустойчивой системы // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 6. С. 899.
4. *Бондарев А.А.* Пример полной, но не глобальной неустойчивости по Перрону // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2021. № 2. С. 43–47.
5. *Бондарев А.А.* Существование вполне неустойчивой по Ляпунову дифференциальной системы, обладающей перроновской и верхнепредельной массивной частной устойчивостью // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 6. С. 858–859.
6. *Сергеев И.Н.* Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 5. С. 636–646.
7. *Сергеев И.Н.* Лекции по дифференциальным уравнениям. М., 2019.
8. *Сергеев И.Н.* Массивные и почти массивные свойства устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1576–1578.
9. *Сергеев И.Н.* Ляпуновские, перроновские и верхнепредельные свойства устойчивости автономных дифференциальных систем // Изв. Ин-та математики и информатики Удмуртского гос. ун-та. 2020. Т. 56. № 2. С. 63–78.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 10.01.2022 г.
После доработки 21.05.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.