*ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 8, с. 1020–1031*

## ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

*УДК 517.925.42*

# АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЦЕНТРА В МОНОДРОМНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЛЬЕНАРА

**© 2022 г. В. Т. Борухов**

Рассматривается проблема различения центра и фокуса для полиномиальной системы Льенара (полиномиального векторного поля $(y-F(x))\partial/\partial x-\tilde{g}(x)\partial/\partial y)$ в монодромной особой точке $(0,0)$. Получено описание полуалгебраического множества центров в пространстве коэффициентов полиномов $(F(x)=\int_0^x\tilde{f}(\tau)\,d\tau,\ \ G(x)=\int_0^x\tilde{g}(\tau)\,d\tau)$, основанное на исключении параметров $A$, $B$, $C$ из условия композиции $F=B(A)$, $G=C(A)$.

DOI: 10.31857/S0374064122080027, EDN: CETWWV

**Введение.** Проблема различения центра и фокуса для монодромной особой точки вещественного векторного поля на плоскости занимает важное место в качественной теории дифференциальных уравнений (см. монографии [1–5]). Для полиномиального векторного поля в случае невырожденной особой точки условия существования центра сводятся к вычислению фокусных величин Пуанкаре–Ляпунова [1, гл. 2; 2, гл. 1; 4, гл. 3]. Привлечение методов компьютерной алгебры дало новый импульс для реализации таких вычислений. Однако задача оценки достаточного числа фокусных величин остаётся в общем случае открытой.

Альтернативой вычислению фокусных величин является предложенный И.С. Куклесом подход обобщённой симметрии [6] (см. также [2, гл. 1; 4, гл. 3]). Для рациональных и полиномиальных векторных полей Льенара этот подход связывает проблему центра и фокуса с разрешимостью специальных функциональных уравнений [6–17]. В частности, известно следующее параметрическое представление центров (см. [4, гл. 3; 8; 11]):

$$F=B(A),\quad G=C(A) \tag{1}$$

в пространстве пар полиномов $(F,G)$. Здесь параметры $A$, $B$, $C$ – вещественные полиномы, при этом нижняя степень $k'$ полинома $A$ – чётное число. Данный результат доказан Л.А. Черкасом в работе [8] в случае невырожденной особой точки $(0,0)$ при $k'=2$ и К. Кристофером [11] в общем случае монодромной особой точки.

В дальнейшем соотношения вида (1), называемые в зависимости от контекста *условием композиции* или *гипотезой композиции*, оказались востребованными в теории центра для дифференциальных уравнений Абеля. Обзор и новые направления исследований проблемы центра и фокуса для различных классов уравнений Абеля представлены в работах [18, 19]. В статье [20] установлена связь гипотезы композиции с инфинитезимальной проблемой центра на нулевых циклах.

В настоящей работе представление (1) рассматривается в пространстве коэффициентов полиномов $F$, $G$ и ставится задача исключения неизвестных полиномов $A$, $B$, $C$ из системы уравнений (1). Предложен алгоритм исключения, основанный на рекурсии, обнаруженной в структуре вхождения коэффициентов полиномов $A$, $B$, $C$ в систему (1). В результате получена система полиномиальных уравнений и неравенств, характеризующая вместе с условиями монодромности особой точки $(0,0)$ полуалгебраическое множество центров в пространстве коэффициентов полиномов $F$ и $G$.

В п. 1 собраны известные [6–11] утверждения о необходимых и достаточных условиях существования центра для полиномиальной системы Льенара. Одним из таких утверждений является уже упомянутый результат о параметрическом представлении пары $(F,G)$.

В п. 2 уточняется постановка задачи описания множества центров в пространстве пар $(F,G)$. Для фиксированных верхних $n$, $m$ и нижних $n'$, $m'$ степеней полиномов $F$, $G$ определяется конечное множество $P(n,n',m,m') = \{(k,k')\}$ допустимых в силу (1) пар степеней полиномов $A$. Если для монодромной особой точки множество $P(n,n',m,m')$ – пустое, то особая точка является фокусом. Пара $(k,k')$ из непустого множества $P(n,n',m,m')$ называется числовой характеристикой центров в пространстве пар $(F,G)$, имеющих представление (1). Таким образом, проблема различения центра и фокуса сводится к задаче описания центров с числовыми характеристиками $(k,k')$ из множества $P(n,n',m,m')$.

Редукция системы (1) с заданной числовой характеристикой $(k,k')$ к системе полиномиальных уравнений и неравенств для коэффициентов полиномов $F$, $G$ представлена в п. 3.

Основной результат статьи, критерий существования центра в монодромной особой точке (0, 0) и описание полуалгебраического множества центров в пространстве коэффициентов полиномов $F$, $G$ приводятся в п. 4.

Вывод условий монодромности особой точки $(0,0)$ системы Льенара с использованием результатов А.М. Ляпунова представлен в приложении 1. В приложении 2 даётся доказательство результатов п. 1 об условиях центра полиномиальной системы Льенара.

**1. Предварительные сведения.** Рассмотрим проблему различения центра и фокуса для системы Льенара

$$\dot{x}(t) = y - F(x), \quad \dot{y}(t) = -\tilde{g}(x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где $F(x)$, $\tilde{g}(x)$ – вещественные полиномы,

$$F(x) = f_n x^n + \ldots + f_{n'} x^{n'} \quad (1 \leqslant n' \leqslant n), \tag{3}$$

$$G(x) = \int\limits_0^x \tilde{g}(\tau)\, d\tau = g_m x^m + \ldots + g_{m'} x^{m'} \quad (2 \leqslant m' \leqslant m). \tag{4}$$

Отметим, что если $n = n'$, то $F(x) = f_n x^n = f_{n'} x^{n'}$. Степени полинома $F$ определим, положив, что если $F \neq 0$, то $f_n \neq 0$, $f_{n'} \neq 0$, где $n$ – верхняя степень, $n'$ – нижняя степень $F$. Если же $F = 0$, то считаем, что $n' = \infty$.

Поскольку наличие центра или фокуса в особой точке $(0,0)$ является локальным свойством, то система (2)–(4) рассматривается в некоторой окрестности точки $(0,0)$. Согласно [11, 21] начало координат $(0,0)$ будет особой точкой типа центр либо фокус тогда и только тогда, когда выполняются условия монодромности

$$m' \in 2\mathbb{Z}^+, \quad n' \geqslant \frac{m'}{2}, \quad 8g_{m'} > f^2_{m'/2}. \tag{5}$$

Здесь $2\mathbb{Z}^+ = \{2, 4, \ldots\}$ – множество чётных положительных чисел.

Отметим, что определение нижней степени нулевого полинома $F = 0$ согласуется как с асимптотическим при $n' \to \infty$ поведением полинома в окрестности нуля, так и с неравенством $n' \geqslant m'/2$ в (5).

Если выполняется строгое неравенство $n' > m'/2$, то $f_{m'/2} = 0$, и тогда последнее неравенство в (5) приобретает вид $g_{m'} > 0$. В приложении 1 приводится вывод условий (5) из результатов А.М. Ляпунова [22, с. 440] о принадлежности особой точки ко второй группе особых точек.

В случае $m' = 2$ центр в особой точке $(0,0)$ называется невырожденным, в случае $m' > 2$ – вырожденным. Следующая теорема 1 является основной в теории центра и фокуса для полиномиальной системы Льенара. Для невырожденного центра она вытекает из результатов Л.А. Черкаса [7, 8] и К. Кристофера [11]. В общем случае монодромной особой точки теорема доказана (за исключением утверждения (iii)) в работе [11]. Утверждение (iii) вытекает из результатов статей [9, 10].

**Теорема 1.** *Пусть выполнены условия (5) монодромности особой точки* $(0,0)$ *системы Льенара (2)–(4). Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

*(i) особая точка* $(0,0)$ *является центром;*

*(ii) в окрестности точки* $u=0$ *справедливо равенство*

$$F(x(u)) = F(x(-u)), \tag{6}$$

*где* $x(u)$ *– функция, обратная к функции*

$$u(x) = \operatorname{sign}(x)(m'G(x))^{1/m'};$$

*(iii) полиномы* $F$, $G$ *связаны равенством*

$$F(x) = \Phi(G^{2/m'}(x)), \quad \Phi(0) = 0,$$

*где* $\Phi(z)$ *– аналитическая в окрестности точки* $z=0$ *функция;*

*(iv) в окрестности точки* $x=0$ *система уравнений*

$$F(x) = F(z), \quad G(x) = G(z) \tag{7}$$

*имеет единственное вещественное аналитическое решение* $z=z(x)$, *удовлетворяющее условиям* $z(0)=0$, $\dot z(0)=-1$;

*(v) полиномы* $F$, $G$ *допускают представление (1), где* $A$, $B$, $C$ *– вещественные полиномы, и нижняя степень полинома* $A$ *является чётным числом.*

Общий случай монодромной точки кратко изложен в работе [11]. Полное доказательство теоремы 1 приводится в приложении 2. Отметим также, что в работах [4, гл. 3; 9; 11] система уравнений (7) используется для доказательства алгебраических условий центра в терминах теории результантов.

**2. Постановка задачи.** Будем рассматривать параметрическое представление (1) полиномов $F$, $G$ как систему уравнений относительно неизвестных полиномов

$$A(x) = a_k x^k + \ldots + a_{k'}x^{k'}, \quad B(x) = b_l x^l + \ldots + b_{l'}x^{l'}, \quad C(x) = c_s x^s + \ldots + c_{s'}x^{s'}, \tag{8}$$

где $k \geqslant k'$, $l \geqslant l'$, $s \geqslant s'$.

Нетрудно заметить, что равенства (1) эквивалентны равенствам

$$F = B_d(dA), \quad G = G_d(dA),$$

где $d \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$, $B_d(x) = B(d^{-1}x)$, $C_d(x) = C(d^{-1}x)$. Отсюда следует, что полином $A$ допускает нормировки вида $a_{k'} = 1$ и $a_k = 1$. Традиционно в литературе используется нормировка $a_{k'} = 1$. Однако, как следует далее из теоремы 2, принципиальное значение имеет нормировка $a_k = 1$, поскольку именно её применение позволяет получить явный критерий центра.

Из утверждения (v) теоремы 1 следует важное теоретико-числовое свойство композиции (1).

**Следствие 1.** *Если особая точка* $(0,0)$ *– центр системы (2)–(4), то степени полиномов* $F$, $G$ *допускают мультипликативное представление*

$$n = kl, \quad n' = k'l', \quad m = ks, \quad m' = k's',$$

*где степени* $k$, $k'$ *полинома* $A$ *удовлетворяют условиям*

$$k' \in 2\mathbb{Z}^+, \quad k \geqslant k', \quad k \mid (n,m), \quad k' \mid (n',m'), \quad \frac{n}{k} \geqslant \frac{n'}{k'}, \quad \frac{m}{k} \geqslant \frac{m'}{k'}. \tag{9}$$

Здесь условие $k \mid (n,m)$ означает, что $k>1$ и $k$ является делителем $n$ и $m$. В частности, $k'\infty = \infty$, поэтому если $n' = \infty$, то $k'$ – делитель $n'$.

Отметим, что неравенства $n/k \geqslant n'/k'$, $m/k \geqslant m'/k'$ равносильны неравенствам $l \geqslant l'$, $s \geqslant s'$.

**Определение.** Пару $(k,k')$ натуральных чисел, удовлетворяющих условиям (9), назовём *числовой характеристикой* центров, определяемых условием композиции (1).

Рассмотрим множество $P(n,n',m,m')=\{(k,k')\}$ допустимых согласно (3)–(5), (9) числовых характеристик центров. Для заданных степеней $n$, $n'$, $m$, $m'$ множество $P(n,n',m,m')$ является конечным и непустым, если существует система (2)–(4), для которой особая точка является центром. Отсюда следует

**Утверждение 1.** *Если степени полиномов $F$, $G$ таковы, что $P(n,n',m,m')$ – пустое множество, то монодромная особая точка $(0,0)$ системы Льенара (2)–(4) является фокусом.*

Так, например, если $m$ и $n$ – взаимно простые числа либо число $n'$ – нечётное, то множество $P(n,n',m,m')$ – пустое. Особая монодромная точка $(0,0)$ в этом случае является фокусом. Ещё один пример фокуса в монодромной особой точке (0,0) – нарушение, по крайней мере, одного из неравенств $n/k\geqslant n'/k'$, $m/k\geqslant m'/k'$ для любой пары $(k,k')$ из множества $P_0(n,n',m,m')=\{(k,k'):k\in 2\mathbb{Z},\ k\geqslant k',\ k\mid(n,m),\ k'\mid(n',m')\}$. Пусть, например, $m$ – простое число, $n=ml$, $n'=2l'$, $m'=2$. Тогда если $l<l'$ и выполняется вытекающее из требования $n\geqslant n'$ неравенство $ml\geqslant 2l'$, то $P_0(n,n',m,m')=\{k=m,\ k'=2\}$ и $P(n,n',m,m')$ – пустое множество. Следовательно, особая точка $(0,0)$ системы Льенара (1)–(3) с параметрами $g_2>0$, $n=ml$, $n'=2l'$, $m\in\{3,5,7,\ldots\}$, $l<l'$, $m'=2$, $ml\geqslant 2l'$ является фокусом. Приведём для случая $m'=2$, $g_2>0$ конкретные примеры фокусов:

1) $m=3$, $n=6$, $n'\in\{3,5,6\}$;
2) $m=3$, $n=9$, $n'\in\{3,5,7\}$;
3) $m=5$, $n=10$, $n'\in\{3,5,6,7,8,9\}$;
4) $m=7$, $n=14$, $n'\in\{3,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$.

Таким образом, проблема различения центра и фокуса для полиномиальной системы Льенара сводится к задаче описания центров с числовыми характеристиками из конечного непустого множества $P(n,n',m,m')$.

**3. Исключение параметров *A*, *B*, *C*.** Введём векторные обозначения для коэффициентов полиномов $A$, $B$, $C$, $F$, $G$ (см. (8), (4), (3)):

$$a=(a_k,a_{k-1},\ldots,a_{k'}),\quad b=(b_l,b_{l-1},\ldots,b_{l'}),\quad c=(c_s,c_{s-1},\ldots,c_{s'}),$$

$$f=(f_n,f_{n-1},\ldots,f_{n'}),\quad g=(g_m,g_{m-1},\ldots,g_{m'}).$$

Пары $(n,n')$, $(m,m')$, $(k,k')$, $(l,l')$, $(s,s')$ удовлетворяют условиям (9), следовательно, полиномы $B(A)$, $C(A)$ можно записать в виде

$$B(A)=\varphi^B_{kl}(a,b)x^{kl}+\ldots+\varphi^B_{k'l'}(a,b)x^{k'l'},$$

$$C(A)=\varphi^C_{ks}(a,c)x^{ks}+\ldots+\varphi^C_{k's'}(a,c)x^{k's'},$$

где $\varphi^B_i(a,b)$ $(i\in\{kl,\ldots k'l'\})$, $\varphi^C_i(a,c)$ $(i\in\{ks,\ldots k's'\})$ – полиномы от коэффициентов полиномов $A$, $B$ и $A$, $C$ соответственно.

Полином $A^j$ также запишем в виде

$$A^j=a_{j,kj}(a)x^{kj}+\ldots+a_{j,k'j}(a)x^{k'j},\quad j\in\{1,2,\ldots,l\}.$$

Его коэффициенты определяются по формуле

$$a_{j,q}(a)=\sum_{(\alpha_k,\alpha_{k-1},\ldots,\alpha_{k'})\in L(j,q)}\frac{j!}{\alpha_k!\alpha_{k-1}!\ldots\alpha_{k'}!}a_k^{\alpha_k}a_{k-1}^{\alpha_{k-1}}\cdots a_{k'}^{\alpha_{k'}},\tag{10}$$

где $q\in\{kj,kj-1,\ldots,k'j\}$,

$$L(j,q)=\left\{(\alpha_k,\ldots,\alpha_{k'}):\alpha_i\in\{0,1,\ldots\},\ \sum_{i=0}^{k-k'}\alpha_{k-i}=j,\ \sum_{i=0}^{k-k'}(k-i)\alpha_{k-i}=q\right\},\quad 0!=1!=1.$$

Формула (10) следует из правила умножения полиномов. При этом для приведения подобных одночленов следует воспользоваться известной формулой

$$\binom{j}{\alpha_k}\binom{j-\alpha_k}{\alpha_{k-1}}\times\ldots\times\binom{j-\alpha_k-\ldots-\alpha_{k'+1}}{\alpha_{k'}}=\frac{j!}{\alpha_k!\cdots\alpha_{k'}!},$$

выражающей полиномиальные коэффициенты через биномиальные. Нам понадобятся коэффициенты

$$a_{j,kj}(a),\ a_{j,kj-1}(a),\ \ldots,\ a_{j,kj-(k-k')}(a). \tag{11}$$

Вычислим первые четыре коэффициента из множества (11):

$$a_{j,kj}(a)=a_k^j,\quad a_{j,kj-1}(a)=\frac{j!}{(j-1)!1!}a_k^{j-1}a_{k-1}=ja_k^{j-1}a_{k-1},$$

$$a_{j,kj-2}(a)=\frac{j!}{(j-1)!1!}a_k^{j-1}a_{k-2}+\frac{j!}{(j-2)!2!}a_k^{j-2}a_{k-1}^2=ja_k^{j-1}a_{k-2}+\frac{j(j-1)}{2}a_k^{j-2}a_{k-1}=$$

$$=ja_k^{j-1}a_{k-2}+\tilde{a}_{j,kj-2}(a_k,a_{k-1}),$$

$$a_{j,kj-3}(a)=j_k^{j-1}a_{k-3}+j(j-1)a_k^{j-2}a_{k-1}a_{k-2}+\frac{j(j-1)(j-2)}{3!}a_k^{j-3}a_{k-1}^3=$$

$$=ja_k^{j-1}a_{k-3}+\tilde{a}_{j,kj-3}(a_k,a_{k-1},a_{k-2}).$$

Далее по индукции имеем

$$a_{j,kj-(k-k')}(a)=ja_k^{j-1}a_{k'}+\tilde{a}_{j,kj-(k-k')}(a_k,\ldots,a_{k'+1}).$$

Положив $a_k=1$, получим

**Утверждение 2.** *Пусть* $a_k=1$, *тогда справедливы равенства*

$$a_{j,kj}(a)=1,\quad a_{j,kj-1}(a)=ja_{k-1},\quad a_{j,kj-2}(a)=ja_{k-2}+\tilde{a}_{j,kj-2}(1,a_{k-1}),$$

$$a_{j,kj-3}(a)=ja_{k-3}+\tilde{a}_{j,kj-3}(1,a_{k-1},a_{k-2}),\quad \ldots$$

$$\ldots,\quad a_{j,kj-(k-k')}(a)=ja_{k'}+\tilde{a}_{j,kj-(k-k')}(1,a_{k-1},\ldots,a_{k'+1}).$$

В следующих двух леммах указаны коэффициенты полиномов $B(A)$, $C(A)$, определяющие рекурсивную структуру системы уравнений (1).

**Лемма 1.** *Пусть* $a_k=1$, *тогда справедливы равенства:*

*1)* $\varphi^B_{kl}(a,b)=b_l$, $\varphi^B_{kl-1}(a,b)=lb_la_{k-1}$, $\varphi^B_{kl-i}(a,b)=lb_la_{k-i}+\tilde{\varphi}^B_{kl-i}(b_l,a_{k-1},\ldots,a_{k-i+1})$ *для любого* $i\in\{2,\ldots,k-k'\}$;

*2)* $\varphi^B_{k(l-j)}(a,b)=b_{l-j}+\tilde{\varphi}^B_{k(l-j)}(b_l,\ldots,b_{l-j+1},a)$ *для любого* $j\in\{1,\ldots,l-l'\}$.

**Доказательство.** Поскольку $k'\geqslant 2$, то $kl-(k-k')=k(l-1)+k'>k(l-1)$. Отсюда и из равенства $B(A)=b_lA^l+b_{l-1}A^{l-1}+\ldots+b_{l'}A^{l'}$ вытекает, что $\varphi^B_{kl-i}(a,b)=b_la_{l,kl-i}(a)$ для любого $i\in\{0,1,\ldots,k-k'\}$. Таким образом, первая серия равенств в лемме 1 следует из утверждения 2 при $j=l$. Далее,

$$\varphi^B_{k(l-j)}(a,b)=b_{l-j}a_{l-j,k(l-j)}(a)+b_{l-j+1}a_{l-j+1,k(l-j)}(a)+\ldots+b_la_{l,k(l-j)}(a), \tag{12}$$

где $b_{l-j+i}=0$ при $i>j$. Последовательно полагая в (12) $j=\overline{1,l-l'}$ с учётом утверждения 2, получаем вторую серию равенств леммы 1. Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Пусть* $a_k=1$, *тогда справедливы равенства:*

*1)* $\varphi^C_{ks}(a,c)=c_s$, $\varphi^C_{ks-1}(a,c)=sc_sa_{k-1}$, $\varphi^C_{ks-i}(a,c)=sc_sa_{k-i}+\tilde{\varphi}^C_{ks-i}(c_s,a_{k-1},\ldots,a_{k-i+1})$ *для любого* $i\in\{2,\ldots,k-k'\}$;

*2)* $\varphi^C_{k(s-j)}(a,c)=c_{s-j}+\tilde{\varphi}^C_{k(s-j)}(c_s,\ldots,c_{s-j+1},a)$ *для любого* $j\in\{1,\ldots,s-s'\}$.

**Доказательство.** Лемма 2 – следствие леммы 1 в силу формальной замены $b$ на $c$.

Приступим к решению системы уравнений (1). Для заданной числовой характеристики центра $(k,k')\in P(n,n',m,m')$ система (1) эквивалентна полиномиальной системе уравнений

$$\varphi^B_{kl-i}(a,b)=f_{n-i} \quad \text{для любых} \quad i\in\{0,1,\ldots,n-n'\}, \tag{13}$$

$$\varphi^C_{ks-i}(a,c)=g_{m-i} \quad \text{для любых} \quad i\in\{0,1,\ldots,m-m'\} \tag{14}$$

относительно искомых векторов $a$, $b$, $c$. Напомним, что $l=n/k$. Применив первую серию равенств леммы 1 к системе (13), получим равенство $b_l=f_n$ и в предположении, что $f_n\neq 0$, равенства

$$a_k=1, \quad a_{k-1}=\frac{k}{nf_n}f_{n-1},$$

$$a_{k-i}=\frac{kf_{n-i}}{nf_n}-\frac{1}{f_n}\tilde{\varphi}^B_{kl-i}(f_n,a_k,a_{k-1},\ldots,a_{k-i+1}) \quad \text{для всех} \quad i\in\{2,\ldots,k-k'\}. \tag{15}$$

В векторных обозначениях имеем

$$a=\alpha_F(f), \tag{16}$$

где компоненты вектора $\alpha_F(f)$ последовательно определяются рекурсией (15).

Применив вторую серию равенств леммы 1 к (13), получим

$$b_l=f_n, \quad b_{l-j}=f_{n-kj}-\tilde{\varphi}^B_{k(l-j)}(b_l,\ldots,b_{l-j+1},a) \quad \text{для каждого} \quad j\in\{1,\ldots,l-l'\}, \tag{17}$$

или в векторной форме

$$b=\beta_F(f), \tag{18}$$

где компоненты вектора $\beta_F(f)$ последовательно определяются рекурсией (17).

Подставив векторы (16), (17) в ещё неиспользованные уравнения системы (13), получим условия её разрешимости:

$$\varphi^B_{kl-i}(\alpha_F(f),\beta_F(f))=f_{n-i}, \tag{19}$$

где $i\in\{k-k'+1,\ldots,n-n'\}\backslash\{k,2k,\ldots,kl'\}$.

Точно также с помощью леммы 2 получим условия разрешимости системы (14):

$$\varphi^C_{ks-i}(\alpha_G(g),\beta_G(g))=g_{m-i} \quad \text{для любого} \quad i\in\{k-k'+1,\ldots,m-m'\}\backslash\{k,2k,\ldots,ks'\}, \tag{20}$$

где вектор

$$a=\alpha_G(g) \tag{21}$$

задаётся рекурсией

$$a_k=1, \quad a_{k-1}=\frac{k}{mg_m}g_{m-1},$$

$$a_{k-i}=\frac{k}{mg_m}g_{m-i}-\frac{1}{g_m}\tilde{\varphi}^C_{kl-i}(g_m,a_k,a_{k-1},\ldots,a_{k-i+1}) \quad \text{для любых} \quad i\in\{2,\ldots,k-k'\},$$

а вектор

$$c=\beta_G(g) \tag{22}$$

– рекурсией

$$c_s=g_m, \quad c_{s-j}=g_{m-kj}-\tilde{\varphi}^C_{k(s-j)}(c_s,\ldots,c_{s-j+1},a) \quad \text{для всех} \quad j\in\{1,\ldots,s-s'\}.$$

Осталось заметить, что для разрешимости совместной системы уравнений (13), (14) условия (19), (20) следует дополнить условием

$$\alpha_F(f)=\alpha_G(g) \tag{23}$$

совместимости уравнений (13), (14).

Отдельно рассмотрим случай $f_n = 0$. Согласно определению степеней полинома $F$, из равенства $f_n = 0$ следует равенство $F = 0$. Поскольку множество решений уравнения $0 = B(A)$ имеет вид $B = 0$, $A(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots$, где $a_{k-1}$, $a_{k-2}$, $\ldots$ – произвольные числа, то условия (22), (23) выполняются при $f_n = 0$ автоматически.

Таким образом, доказана

**Теорема 2.** *1. Для заданной пары $(k, k') \in P(n, n', m, m')$ система (13), (14) разрешима тогда и только тогда, когда выполняются условия (19), (20), (23).*

*2. Пусть $a_k = 1$. Если решение системы (13), (14) существует, то оно единственное и задаётся формулами (18), (21), (22).*

**4. Полуалгебраическое множество центров.** Из теоремы 2 вытекает алгебраический критерий центра.

**Теорема 3.** *Для наличия центра в монодромной особой точке $(0, 0)$ системы Льенара (2)–(4) необходимо и достаточно существование пары $(k, k') \in P(n, n', m, m')$, для которой выполняются условия (19), (20), (23).*

Отметим, что в случае равенства $F = 0$ система уравнений (1) имеет решение

$$A = \frac{1}{g_m}G, \quad B = 0, \quad C(x) = g_m x.$$

Следовательно, необходимые и достаточные условия центра сводятся к требованиям $m' \in 2\mathbb{Z}^+$, $g_{m'} > 0$.

Рассмотрим векторное пространство $\mathbb{R}^N = \{(f, g)\}$ $(N = n-n'+m-m'+2)$ коэффициентов полиномов $F$, $G$. Напомним, что полуалгебраическое множество в векторном пространстве определяется как конечное объединение подмножеств, каждое из которых задаётся конечной системой полиномиальных уравнений и неравенств.

Обозначим через $Q_{(k,k')}$ множество векторов $\{(f, g)\}$, удовлетворяющих для пары $(k, k') \in P(n, n', m, m')$ условиям (19), (20), (23) и условиям (5) монодромности особой точки $(0, 0)$. Поскольку $f_n \neq 0$, $g_m \neq 0$, то система уравнений (19), (20), (23) приводится к полиномиальной системе уравнений. Следовательно, $Q_{(k,k')}$ – полуалгебраическое множество в пространстве $\mathbb{R}^N$. Из теорем 2, 3 вытекает

**Следствие 2.** *Полуалгебраическое множество $Q(n, n', m, m') \subset \mathbb{R}^N$ коэффициентов полиномов $F$, $G$, для которых системы Льенара (2)–(4) имеют центр в монодромной особой точке $(0, 0)$, задаётся формулой*

$$Q(n, n', m, m') = \bigcup_{(k,k') \in P(n,n',m,m')} Q_{(k,k')}.$$

Для иллюстрации теоремы 3 и следствия 2 приведём описание множества $Q(8, 2, 8, 2)$. Отметим вначале, что задача явного описания множества центров в пространстве коэффициентов для малых степеней полиномов $\tilde{f}(x) = dF(x)/dx$ и $\tilde{g}(x) = dG(x)/dx$ рассматривалась в работах [13, 14]. В работе [13] предлагается алгоритм вычисления множества центров, использующий программу вычисления базиса Грёбнера для полиномиальных идеалов. Явные условия центра получены для случая $n, m \leqslant 6$, $m' = 2$. В [14] применялся комплексный подход, основанный на вычислении фокусных величин Пуанкаре–Ляпунова, явном описании общих интегралов для некоторых классов уравнений Льенара и вычислении результантов, согласно следствию утверждения (iv) теоремы 1. Явные условия центра получены в статье [14] для случая $n, m \leqslant 7$, $m' = 2$.

**Пример.** Пусть $n = m = 8$, $n' = m' = 2$, тогда $N = 14$, $P(8, 2, 8, 2) = \{(8, 2), (4, 2), (2, 2)\}$. Рассмотрим случай, когда $(k, k') = (8, 2)$. Имеем

$$A(x) = x^8 + a_7x^7 + \ldots + a_2x^2, \quad B(x) = b_1x, \quad C(x) = c_1x,$$

$$B(A) = b_1(x^8 + a_7x^7 + \ldots + a_2x^2) = f_8x^8 + \ldots + f_2x^2.$$

Следовательно,

$$b_1 = f_8, \quad a_7 = \frac{f_7}{f_8}, \quad \ldots, \quad a_2 = \frac{f_2}{f_8}.$$

Точно также из равенства $C(A) = G$ получим

$$c_1 = g_8, \quad a_7 = \frac{g_7}{g_8}, \quad \ldots, \quad a_2 = \frac{g_2}{g_8}.$$

Таким образом, на основании равенства (23) заключаем, что множество $Q_{(8,2)}$ имеет вид

$$Q_{(8,2)} = \{(f_8, \ldots, f_2, g_8, \ldots, g_2) : g_8 f_7 - f_8 g_7 = 0, \quad g_8 f_6 = f_8 g_6 = 0, \quad \ldots$$
$$\ldots, \quad g_8 f_2 - f_8 g_2 = 0, \quad g_2 > 0, \quad g_8 \neq 0, \quad f_2 \neq 0, \quad f_8 \neq 0\}.$$

Далее, если $(k, k') = (4, 2)$, то

$$A(x) = x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2, \quad B(x) = b_2 x^2 + b_1 x, \quad C(x) = c_2 x^2 + c_1 x,$$

а значит,

$$B(A) = b_2 x^8 + 2b_2 a_3 x^7 + (2b_2 a_2 + b_2 a_3^2) x^6 + 2b_2 a_3 a_2 x^5 + (b_2 a_2^2 + b_1) x^4 + b_1 a_3 x^3 + b_1 a_2 x^2.$$

Полином $C(A)$ имеет тот же вид, что и полином $B(A)$ с заменой компонент вектора $b$ на компоненты вектора $c$. Таким образом, применив условия (19), (20), (23), получим описание множества

$$Q_{(4,2)} = \{(f_8, \ldots, f_2, g_8, \ldots, g_2) : 2f_8 a_{f3} a_{f2} = f_5, \quad f_8 a_{f2}^2 + b_1 = f_4, \quad b_1 a_{f3} = f_3, \quad b_1 a_{f2} = f_2,$$
$$2g_8 a_{g3} a_{g2} = g_5, \quad g_8 a_{g2}^2 + c_1 = g_4, \quad c_1 a_{g3} = g_3, \quad g_1 a_{g2} = g_2, \quad a_{f3} = a_{g3}, \quad a_{f2} = a_{g2}, \quad g_2 > 0, \quad g_8 \neq 0,$$
$$f_2 \neq 0, \quad f_8 \neq 0\},$$

где

$$a_{f3} = \frac{1}{2f_8} f_7, \quad a_{f2} = \frac{1}{2f_8}\left(f_6 - \frac{1}{4f_8} f_7^2\right), \quad b_1 = f_4 - f_8 a_{f2}^2, \quad a_{g3} = \frac{1}{2g_8} g_7,$$
$$a_{g2} = \frac{1}{2g_8}\left(g_6 - \frac{1}{4g_8} g_7^2\right), \quad c_1 = g_4 - g_8 a_{g2}^2.$$

Наконец, для случая $(k, k') = (2, 2)$ имеем $A(x) = x^2$. Отсюда следует, что $F$, $G$ – чётные функции. Следовательно,

$$Q_{(2,2)} = \{(f_8, \ldots, f_2, g_8, \ldots, g_2) : f_7 = f_5 = f_3 = g_7 = g_5 = g_3 = 0, \quad g_2 > 0, \quad g_8 \neq 0, \quad f_2 \neq 0, \quad f_8 \neq 0\}.$$

Таким образом, особая точка $(0, 0)$ системы Льенара (2)–(4) с параметрами $n = m = 8$, $n' = m' = 2$ является центром тогда и только тогда, когда вектор $(f_8, \ldots, f_2, g_8, \ldots, g_2)$ принадлежит множеству $Q(8, 2, 8, 2) = Q_{(8,2)} \bigcup Q_{(4,2)} \bigcup Q_{(2,2)}$.

**Приложение 1.** Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = y + X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y), \tag{24}$$

где $X$, $Y$ – аналитические в окрестности точки $(0, 0)$ функции, разложения которых в ряды не содержат свободных и линейных членов. Согласно [22, с. 440; 2, с. 111] особая точка $(0, 0)$ системы (24) является монодромной тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$Y(x, \tilde{F}(x)) = a_{2r-1} x^{2r-1} + a_{2r} x^{2r} + \ldots, \tag{25}$$

$$\left(\frac{\partial X(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial Y(x,y)}{\partial y}\right)\Big|_{(x,\tilde{F}(x))} = A_{r-1}x^{r-1} + A_r x^r + \ldots, \tag{26}$$

$$A_{r-1}^2 + 4ra_{2r-1} < 0, \tag{27}$$

где $\tilde{F}(x)$ $(\tilde{F}(0) = 0)$ – аналитическая в окрестности точки $x = 0$ функция, определяемая уравнением

$$y = X(x,y). \tag{28}$$

Отметим, что в случае $A_{r-1} = 0$ из (27) следует неравенство $a_{2r-1} < 0$.

Применим условия (25)–(28) к системе Льенара (2)–(4). Поскольку $X(x,y) = -F(x)$, то из (28) следует, что $\tilde{F}(x) = -F(x)$. Далее, на основании (26) получим

$$\left(\frac{\partial(-F+y)}{\partial x} + \frac{\partial(-g(x))}{\partial y}\right) = -\frac{\partial F}{\partial x} = -rf_r x^{r-1} + O(x^r),$$

т.е. $F = f_r x^r + O(x^{r+1})$. Здесь символ Ландау $O(x)$ означает, что в некоторой окрестности точки $x = 0$ выполняется неравенство $|O(x)| \leqslant K|x|$ с константой $K$, не зависящей от $x$.

Из (25) следует, что $Y(x, F(x)) = -2rg_r x^{2r-1} + O(x^{2r})$, т.е.

$$G(x) = g_{m'}x^{m'} + \ldots + g_m x^m,$$

где $m' = 2r$. Согласно (27) имеем $r^2 f_r^2 - 8r^2 g_{2r} < 0$ или, в эквивалентной форме,

$$8g_{m'} > f_{m'/2}^2.$$

Таким образом, доказаны условия монодромности (5) в случае вырожденной особой точки $(0,0)$. Справедливость условий (5) для невырожденной особой точки следует из линейного приближения $\dot{x}(t) = y - F'(0)x$, $\dot{x} = -2g_2 x$ системы Льенара (2).

**Приложение 2.** Докажем эквивалентность утверждений (i), (ii). Поскольку

$$G(x) = x^{m'}(g_{m'} + O(x)),$$

то

$$u(x) := (m'G(x))^{1/m'} = x((m'g_{m'})^{1/m'} + O(x)) \tag{29}$$

– аналитическая в окрестности точки $x = 0$ функция, для которой существует обратная функция $x(u)$.

Обобщённая замена Конти (см. [10])

$$x = x(u), \quad y = y, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{u^{m'-1}}{g(u)}$$

приводит систему (2)–(4) к системе

$$\dot{u}(s) = y - F(x(u)), \quad \dot{y} = -u^{m'-1}, \tag{30}$$

имеющей тот же тип особой точки $u = 0$, $y = 0$, что и тип особой точки $x = 0$, $y = 0$ системы (2). В частности, условия монодромности для точки $u = 0$, $y = 0$ совпадают с условиями (5). Поэтому достаточно доказать, что равенство (6) является необходимым и достаточным условием центра для системы (30).

Координаты векторного поля системы (30) представимы в виде суммы

$$(y - F(x(u)), -u^{m'-1}) = (y - F_+(x(u)), -u^{m'-1}) + (-F_-(x(u)), 0) \tag{31}$$

координат векторных полей системы

$$\dot{u} = y - F_+(x(u)), \quad \dot{y} = -u^{m'-1} \tag{32}$$

и системы

$$\dot{u} = -F_-(x(u)), \quad \dot{y} = 0,$$

где $F_+(x(u))$ и $F_-(x(u))$ – соответственно чётная и нечётная части функции $F(x(u))$.

Пусть $F_-(x(u)) \equiv 0$. Поле направлений касательных к интегральным кривым системы (32) симметрично относительно оси $u = 0$. Отсюда и в силу монодромности особой точки $(0,0)$ системы (32) следует, что эта особая точка является центром. Тем самым доказана достаточность условия (6) для существования центра в точке $(0,0)$ системы (2).

Пусть $F_-(x(u)) \not\equiv 0$. Тогда из равенства (31) следует, что в некоторой окрестности точки $(0,0)$ замкнутые интегральные кривые системы (32) пересекаются интегральными кривыми системы (30) в одном направлении – наружу или внутрь, в зависимости от знака первого отличного от нуля коэффициента в разложении функции $F_-(x(u))$ в ряд Тейлора (за исключением точек оси $u = 0$, в которых интегральные кривые систем (30), (32) касаются). Таким образом, если $F_-(x(u)) \not\equiv 0$, то особая точка $(0,0)$ системы (30) является фокусом, что доказывает необходимость условия (6) существования центра в точке $(0,0)$ для системы (30). Эквивалентность утверждений (i), (ii) доказана.

Согласно работе [10] эквивалентность утверждений (i), (iii) следует из равенств

$$F(x(u)) = \tilde{\Phi}(u^2(x)) = \tilde{\Phi}((m'G(x))^{2/m'}) = \Phi((G(x))^{2/m'}),$$

где аналитическая функция $\Phi$ определена в силу чётности функции $F(x(u))$ из равенства $\tilde{\Phi}(u) = F(u)$.

Докажем эквивалентность утверждений (ii), (iv). Пусть выполняется условие (6). Из (29) следует равенство

$$x(u) = (m'g_{m'})^{-1/m'}u + O(u^2),$$

откуда имеем $x(-u(x)) = -x + O(x^2)$. Кроме того, поскольку $u^{m'} = \operatorname{sign}(x)m'G(x)$ и $m'$ – чётное число, то

$$m'G(x(u)) = u^{m'} = m'G(x(-u)).$$

Таким образом, из (ii) следует (7), где $z(x) = x(-u(x))$, $z(0) = 0$, $z'(0) = -1$.

Докажем, что функция $z(x) = x(-u(x))$ является единственной вещественной аналитической функцией, удовлетворяющей системе (7) и условиям $z(0) = 0$, $z'(0) = -1$. Функцию $z(x)$ будем искать в виде $z(x) = x\beta(x)$. После подстановки $z(x)$ в (7) и сокращения на множитель $x^{m'}$ получим

$$g_{m'}(\beta(x))^{m'} + \ldots + g_m x^{m-m'}(\beta(x))^m = g_{m'} + g_{m'+1}x + \ldots + g_m x^{m-m'}.$$

Следовательно, $g_{m'}(\beta(0))^{m'} = g_{m'}$. Поскольку $g_{m'} \neq 0$, то $(\beta(0))^{m'} = 1$. Уравнение $(\beta(0))^{m'} = 1$ имеет два действительных корня $\beta_1 = 1$ и $\beta_2 = -1$ и $m' - 2$ комплексных. Следовательно, в силу теоремы о неявной функции уравнение $G(x\beta(x)) = G(x)$ имеет в окрестности нулевой точки ровно $m'$ различных аналитических решений, из которых выбираем функцию, удовлетворяющую условию $\beta(0) = -1$. Тем самым доказано, что из (ii) следует (iv).

Обратно, пусть выполняется (iv). Тогда, поскольку $z(x) = x(-u(x))$ – единственное решение системы (7), удовлетворяющее условиям $z(0) = 0$, $z'(0) = -1$, полагая $z = x(-u(x))$ в $F(x) = F(z)$, получаем (6). Следовательно, (ii) вытекает из (iv). Эквивалентность утверждений (ii) и (iv) доказана.

Докажем эквивалентность утверждений (iv) и (v). Напомним, что согласно теореме Люрота [23, с. 31] если $\mathcal{F}$ – подполе поля рациональных функций $\mathbb{R}(x)$, содержащее поле $\mathbb{R}$, то $\mathcal{F}$ имеет вид $\mathbb{R}(h(x))$, где $h(x)$ – некоторая рациональная функция, называемая *элементом Люрота*. Если при этом подполе $\mathcal{F}$ содержит полиномы, отличные от констант, то в качестве элемента Люрота можно выбрать полином (теорема Э. Нётер [23, с. 42]).

Для доказательства импликации (iv) $\Rightarrow$ (v) рассмотрим, согласно [12], множество $\mathcal{F}$ всех рациональных функций $r(x)$, удовлетворяющих условию $r(x) = r(z(x))$, где $z(x)$ – функция, определённая в теореме 1 (утверждение (iv)). Нетрудно заметить, что $(r(x))^{-1} \in \mathcal{F}$, $\mathbb{R} \in \mathcal{F}$, $G \in \mathcal{F}$, и, кроме того, сумма, произведение и частное двух элементов из $\mathcal{F}$ принадлежат $\mathcal{F}$.

Таким образом, $\mathcal{F}$ является подполем поля $\mathbb{R}(x)$ и содержит полином $G \neq \mathrm{const}$. Отсюда на основании теорем Люрота, Э. Нётер и уравнений (7) заключаем, что существуют полином $A$ и рациональные функции $B$, $C$, для которых справедливы равенства вида (1). Нетрудно заметить, что $B$, $C$ также являются полиномами. Действительно, пусть, например, $C = q_1/q_2$, где $q_1$, $q_2$ – полиномы. Обозначим через $s_1$, $s_2$ верхние степени полиномов $q_1$, $q_2$ соответственно. Если $s_1 \leqslant s_2$, то

$$\lim_{x\to+\infty} C(A(x)) = \mathrm{const} \neq \infty,$$

но $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = \infty$, т.е. $G \neq C(A)$. Пусть теперь $s_1 > s_2$. Тогда

$$G(x) = \frac{q_1(A(x))}{q_2(A(x))} = p(A(x)) + \frac{p_1(A(x))}{q_2(A(x))},$$

где $p$ – полином, а верхняя степень полинома $p_1$ строго меньше $s_2$. Отсюда следует, что $p_1 = 0$ и можно положить $C = p$.

Далее, поскольку полином $A$ генерирует поле $\mathcal{F}$, то $A \in \mathcal{F}$, а значит,

$$A(x) = A(z(x)). \tag{33}$$

Из равенства (33) вытекает, что нижняя степень $k'$ полинома $A$ – чётное число. Действительно, положив $z(x) = x\beta(x)$ $(\beta(0) = -1)$, приходим к уравнению $(\beta(0))^{k'} = 1$, которое имеет корень $\beta(0) = -1$ только тогда, когда $k'$ – чётное. Импликация (iv) $\Rightarrow$ (v) доказана.

Обратно, пусть выполняется утверждение (v). Поскольку нижняя степень полинома $A$ – чётное число, то уравнение (33) имеет решение $z(x)$, удовлетворяющее условиям $z(0) = 0$, $z'(0) = -1$. Подставив в (1) вместо $A(x)$ функцию $A(z(x))$, получим утверждение (iv). Теорема 1 доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л., 1947.
2. *Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П.* Нелинейные колебания в системах второго порядка. Минск, 1982.
3. *Медведева Н.Б.* Об аналитической разрешимости проблемы различения центра и фокуса // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. 2006. Т. 254. С. 11–100.
4. *Romanovski V.G., Shafer D.S.* The Center and Cyclicity Problems: a Computational Agebra Approach. Basel, 2010.
5. *Yirong Lin, Jibin Li, Wentao Huang.* Planar Dynamical System. Selected Classical Problems. Berlin; Boston, 2014.
6. *Куклес И.С.* Некоторые признаки отличия фокуса от центра // Тр. Узбекского ун-та им. А. Навои. 1951. Вып. 47. С. 29–98.
7. *Черкас Л.А.* Об условиях центра для некоторых уравнений вида $yy' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$. // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. № 5. С. 1435–1439.
8. *Черкас Л.А.* Степень негрубости фокуса в уравнении Льенара // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23. № 8. С. 681–683.
9. *Садовский А.П.* Решение проблем центра и фокуса для системы Льенара с полиномиальными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 11. С. 2102–2104.
10. *Gasull A., Torregrosa J.* Center problem for several differential equations via Cherkas' method // J. of Math. Anal. and Appl. 1998. V. 228 P. 322–343.
11. *Chritopher C.* An algebraic approach to the classification of centers in polynomial Lienard systems // J. of Math. Anal. and Appl. 1999. V. 229 P. 319–329.

12. *Садовский А.П.* Теорема Люрота и метод Черкаса // Тр. Пятой междунар. конф. “Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений”. Минск, 2010. Т. 2. С. 120–122.
13. *Yu Z.H., Zhang W.N.* Condition for polynomial Lienard centers // Sci China Math. 2016. V. 59. № 3. P. 411–424.
14. *Giné J.* Center conditions for polynomial Lienard systems // Qualit. Theory of Dynam. Syst. 2017. V. 16. № 1. P. 119–126.
15. *Амелькин В.В., Руденок А.Е.* Центры и изохронные центры систем Льенара // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 294–303.
16. *Руденок А.Е.* Обобщённая симметрия системы Льенара // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 2. С. 181–198.
17. *Руденок А.Е.* Рациональные системы Льенара с центром и изохронным центром // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 1. С. 70–83.
18. *Briskin M., Pakovich F., Yomdin Y.* Algebraic geometry of the center focus problem for Abel differential equation // Ergodic Theory and Dynam. Syst. 2016. V. 36. № 3. P. 714–744.
19. *Gavrilov L.* On the center-focus problem for the equation $dy/dx + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)y^i = 0,\ \ 0 \leqslant x \leqslant 1,$ where $a_i$ are polynomials // Ann. Henri Lebesque. 2020. V. 3. P. 615–648.
20. *A'lvarez A., Bravo J.L., Christopher C., Mardešić P.* Infinitesimal center problem on zero cycles and the composition conjecture // Func. Anal. and Its Appl. 2021. V. 55. P. 257–271.
21. *Moussu R.* Symétrie et forme normale des centers et foyers dégénérés // Ergodic Theory Dynam. Syst. 1982. V. 2. P. 241–251.
22. *Ляпунов А.М.* Собр. соч. Т. 2. М.; Л., 1956. С. 7–263.
23. *Чеботарёв Н.Г.* Теория алгебраических функций. М.; Л., 1948.

Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск

Поступила в редакцию 17.01.2022 г.
После доработки 23.06.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.