ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 8, с. 1032–1038

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.926.4

КВАЗИБЕЗМОНОДРОМНЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ СТАНДАРТНОГО ВИДА НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

© 2022 г. А. А. Голубков

Для уравнения Штурма–Лиувилля стандартного вида на комплексной плоскости исследован вопрос существования потенциалов с квазибезмонодромными особыми точками, т.е. такими особыми точками, некоторая степень матрицы монодромии M которых не зависит от спектрального параметра и равна $\pm I$, где I – единичная матрица. Сформулированы условия на матрицу M и её след, необходимые и достаточные для того, чтобы особая точка потенциала была квазибезмонодромной. Приведены примеры потенциалов с такими особыми точками, включая точки ветвления.

DOI: 10.31857/S0374064122080039, EDN: CFCYXH

1. Введение. Безмонодромность и квазибезмонодромность. Пусть Ω_1 и Ω_2 – односвязные области в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\Omega_1 \subset \Omega_2$, и их границы не имеют общих точек, т.е. существует "кольцеобразная" область $K = \Omega_2 \setminus \Omega_1$. Заметим, что область Ω_1 может состоять и из единственной точки. Рассмотрим уравнение Штурма–Лиувилля стандартного вида

$$y''(z) + (q(z) - \lambda^2)y(z) = 0, \quad z \in K, \tag{1}$$

равносильное системе уравнений первого порядка

$$y'(z) = y_1, \quad y_1'(z) = (\lambda^2 - q(z))y(z), \quad z \in K, \tag{2}$$

с потенциалом $q(z)$, который в области K всюду голоморфен и имеет порядок ветвления $N-1$ $(N \geqslant 1)$ [1, гл. 8, § 6]. Обозначим через $Y_0(z,\lambda,z_0)$ фундаментальную матрицу пространства голоморфных решений системы (2) в окрестности точки $z_0 \in K$ при некотором значении спектрального параметра λ, а через $Y_1(z,\lambda,z_0)$ – аналитическое продолжение Y_0 вдоль некоторой замкнутой спрямляемой кривой $\gamma \subset K$ с началом и концом в точке z_0, которая N раз обходит область Ω_1 в положительном направлении, т.е. кривая γ ориентирована против часовой стрелки, и все точки области Ω_1 лежат внутри γ (процедура аналитического продолжения вдоль кривой описана, например, в [1, гл. 8, § 5]). В силу связи между уравнениями в (1) и (2) элементы первой строки матриц Y_0, Y_1 образуют фундаментальную систему голоморфных решений (ФСР) уравнения (1), а элементы второй строки – первые производные по переменной z элементов первой строки. Поскольку функция q имеет в области K порядок ветвления $N-1$, то матрицы Y_0 и Y_1 являются в окрестности точки z_0 фундаментальными для одной и той же системы уравнений (2). Поэтому для системы (2) и уравнения (1) существует постоянная невырожденная *матрица монодромии* M *области* Ω_1 такая, что

$$Y_1(z,\lambda,z_0) = Y_0(z,\lambda,z_0)M(\lambda,Y_0).$$

Пусть теперь $Y_n(z,\lambda,z_0)$ – аналитическое продолжение Y_0 вдоль некоторой замкнутой спрямляемой кривой $\gamma \subset K$ с началом и концом в точке z_0, которая обходит область Ω_1 nN раз. При этом $n > 0$, если обход происходит в положительном направлении, и $n < 0$ – в отрицательном. Тогда нетрудно убедиться в том, что справедливо равенство

$$Y_n(z,\lambda,z_0) = Y_0(z,\lambda,z_0)M^n(\lambda,Y_0).$$

Отметим, что матрица монодромии области Ω_1 в силу аналитичности потенциала q в области K не зависит от конкретной формы кривой $\gamma \subset K$, но зависит от выбора фундаментальной матрицы Y_0. Действительно, рассмотрим аналитическое продолжение фундаментальной матрицы $\widetilde{Y}_0 := Y_0 T$, где T – произвольная постоянная невырожденная матрица. Тогда получим

$$\widetilde{Y}_1(z,\lambda,z_0) = Y_1(z,\lambda,z_0)T = Y_0(z,\lambda,z_0)M(\lambda,Y_0)T =$$

$$= \widetilde{Y}_0(z,\lambda,z_0)T^{-1}M(\lambda,Y_0)T = \widetilde{Y}_0(z,\lambda,z_0)M(\lambda,\widetilde{Y}_0),$$

где $M(\lambda,\widetilde{Y}_0) = T^{-1}M(\lambda,Y_0)T$. К аналогичному результату приводит также сдвиг начальной и конечной точки z_0 замкнутой кривой γ, а для многозначного потенциала и изменение выбора его “начальной” ветви. Таким образом, все матрицы монодромии области Ω_1 подобны друг другу и, следовательно, имеют одинаковый след. Подобны, очевидно, и любые одинаковые степени всех матриц монодромии. Кроме того, в силу вида уравнения (1) вронскиан любой его ФСР будет сохраняться вдоль любой кривой, поэтому определители всех матриц монодромии уравнения (1) и системы (2) равны единице. Также существенно, что если хотя бы одна матрица монодромии (её n-я степень) при некотором значении параметра λ равна $\pm I$, где I – единичная матрица, то и все остальные матрицы монодромии (их n-е степени) равны $\pm I$ при этом же значении параметра λ.

Напомним, что если для системы (2) с *однозначным* потенциалом q, а значит и для уравнения (1), хотя бы одна матрица монодромии области Ω_1 равна единичной матрице при всех значениях параметра λ, то такое уравнение Штурма–Лиувилля (1) и соответствующий потенциал q называют безмонодромными в области K (см. [2–5]). При этом если в области K можно провести хотя бы одну кусочно-гладкую кривую, которая ограничивает выпуклую область, то в силу теоремы 1 работы [2] потенциал q может быть единственным образом аналитически продолжен в область Ω_1 и будет иметь в этой области только безмонодромные особые точки, т.е. будет безмонодромен во всей области Ω_2.

В статьях [2–5] исследовались безмонодромные однозначные потенциалы. При этом остался не изученным следующий вопрос. Допустим, что область K не является безмонодромной. Возможна ли в этом случае ситуация, когда при некотором числе обходов этой области мы получим исходную ФСР или исходную ФСР, умноженную на минус единицу? Иными словами, существуют ли такие потенциалы, для которых некоторая ненулевая степень матрицы монодромии области Ω_1 тождественно равна плюс или минус единичной матрице I, хотя сама матрица монодромии отлична от $\pm I$? Этот вопрос возникает, в частности, при исследовании асимптотик решений уравнений Штурма–Лиувилля вдоль кривых на комплексной плоскости, а также краевых и обратных спектральных задач для этих уравнений, которые к настоящему времени изучены только при достаточно жёстких ограничениях на форму кривой и (или) на потенциал (см., например, работы [6–9] и библиографические списки в них).

Определение 1. Пусть Ω_1 и Ω_2 – односвязные области в $\mathbb{C}$, $\Omega_1 \subset \Omega_2$, и их границы не имеют общих точек. Потенциал q и соответствующее уравнение Штурма–Лиувилля (1) будем называть *квазибезмонодромным* в “кольцеобразной” области $K = \Omega_2 \backslash \Omega_1$ аналитичности потенциала q, если существует такое натуральное число $n \geqslant 1$, что $M^n(\lambda) \equiv \pm I$, где M – некоторая матрица монодромии области Ω_1. Минимальное значение степени n, при котором это тождество выполнено, будем называть модулем *показателя безмонодромности* потенциала и уравнения. При этом сам показатель безмонодромности I_M будем считать положительным, если $M^n(\lambda) \equiv I$, и отрицательным, если $M^n(\lambda) \equiv -I$.

Заметим, что $M^n(\lambda) \equiv \pm I$ если и только если $M^{-n}(\lambda) \equiv \pm I$. Поэтому ограничение $n \geqslant 1$ в определении 1 не является существенным, а использовано исключительно для удобства. Существенно только ограничение $n \neq 0$, поскольку $M^0 \equiv I$ для любой матрицы M. Определение 1 также легко обобщается на случай, когда в области K существуют безмонодромные особые точки потенциала. При этом достаточно отметить, что замкнутая кривая $\gamma \subset K$, вдоль которой происходит аналитическое продолжение потенциала и которой соответствует некоторая матрица M монодромии области Ω_1, не проходит через эти особые точки. Кроме того, в соответствии с приведённым определением для безмонодромного потенциала $I_M = 1$.

В п. 2 настоящей работы сформулированы три альтернативных условия на матрицу монодромии M и её след такие, что уравнение (1) является квазибезмонодромным в области K тогда и только тогда, когда выполнено одно из них. Для каждого из этих трёх условий найдено значение I_M и доказано, что не существует квазибезмонодромных потенциалов с положительным чётным показателем безмонодромности. В п. 3 приведены примеры потенциалов с квазибезмонодромными особыми точками, включая точки ветвления, со всеми остальными значениями I_M.

2. Необходимые и достаточные условия квазибезмонодромности потенциала в кольцеобразной области его аналитичности.

Лемма 1. *Пусть* $m = \mathrm{Tr}\,(M)$ *– след матрицы второго порядка* M *с единичным определителем,* I *– единичная матрица второго порядка. Тогда для любого целого* n *справедливо равенство*

$$M^n = a_n M + b_n I, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

где $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, *а остальные коэффициенты* a_n *и* b_n *удовлетворяют рекуррентным соотношениям*

$$a_n = m a_{n-1} + b_{n-1}, \quad b_n = -a_{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z}). \tag{4}$$

Доказательство. Справедливость представления (3) и значения коэффициентов a_n и b_n при $n \in \{0, 1\}$ следуют непосредственно из определения нулевой и первой степени матрицы, причём $b_0 = a_1 = 1$, $a_0 = b_1 = 0$, т.е. формулы (4) справедливы при $n = 1$. Учитывая, что $\det M = 1$, нетрудно также показать, что

$$M^2 = mM - I, \quad M^{-1} = -M + mI, \tag{5}$$

т.е. представление (3) справедливо также при значениях $n \in \{-1, 2\}$, причём $a_2 = b_{-1} = m$, $a_{-1} = b_2 = -1$, и значит, формулы (4) выполнены при $n \in \{0, 2\}$. Далее воспользуемся индукцией по $N \in \mathbb{N}$. Предположим, что представление (3) справедливо при $n \in \{-N+1, \ldots, N\}$ $(N \geqslant 2)$, а формулы (4) – при $n \in \{-N+2, \ldots, N\}$ (выше мы доказали это для $N = 2$). Тогда из соотношений (3) при $n = -N+1$ и $n = N$ и формул (5) получим

$$M^{N+1} = a_N M^2 + b_N M = (m a_N + b_N) M - a_N I,$$

$$M^{-N} = a_{-N+1} I + b_{-N+1} M^{-1} = -b_{-N+1} M + (m b_{-N+1} + a_{-N+1}) I,$$

т.е. представление (3) справедливо также и при $n = N+1$, $n = -N$, причём $a_{N+1} = m a_N + b_N$, $b_{N+1} = -a_N$, $a_{-N} = -b_{-N+1}$, $b_{-N} = m b_{-N+1} + a_{-N+1} = -m a_{-N} + a_{-N+1}$, что доказывает формулы (4) при $n = -N+1$ и $n = N+1$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\mu = 0,5(m + \sqrt{m^2 - 4})$. *Тогда в условиях леммы 1*

$$a_n = (\pm 1)^{n+1} n \quad \textit{при} \quad m = \pm 2, \tag{6}$$

$$a_n = \frac{\mu^n - \mu^{-n}}{\mu - \mu^{-1}} \quad \textit{при} \quad m \neq \pm 2 \quad (\mu \neq \pm 1). \tag{7}$$

Доказательство. Поскольку в силу леммы 1 коэффициенты a_n и b_n зависят только от номера n и следа m, то достаточно провести доказательство леммы для диагональной матрицы M с элементами μ и $1/\mu = 0,5(m - \sqrt{m^2 - 4})$ (напомним, что $\det(M) = 1$, $m = \mathrm{Tr}\,(M)$). В этом случае M^n – диагональная матрица с элементами μ^n и μ^{-n}. Поэтому из соотношений (3) сразу имеем

$$\mu^n = a_n \mu + b_n, \quad \mu^{-n} = \frac{a_n}{\mu} + b_n. \tag{8}$$

Если $m = \pm 2$, т.е. $\mu = \pm 1$, то уравнения в (8) равносильны. Добавив к ним вторую формулу из (4), получим новое рекуррентное соотношение

$$\mu a_n = \mu^n + a_{n-1}. \tag{9}$$

Обозначим $c_n := \mu^{n+1}a_n$. Тогда, умножив (9) на μ^n с учётом $\mu^2 = 1$, получим $c_n = 1 + c_{n-1}$. Поскольку $c_0 = a_0 = 0$, то, воспользовавшись формулой для n-го члена арифметической прогрессии, получим (6). Пусть теперь $m \neq \pm 2$ (т.е. $\mu \neq \pm 1$). В этом случае формула (7) следует непосредственно из соотношений (8). Лемма доказана.

В силу леммы 2 при $m = \pm 2$ коэффициент a_n не равен нулю при любом целом $n \neq 0$. Из леммы 1 получим следующие два утверждения.

Следствие 1. *Если $m = 2$ и $M \neq I$, то $M^n \neq \pm I$ при любом целом $n \neq 0$.*

Следствие 2. *Если $m = -2$ и $M \neq -I$, то $M^n \neq \pm I$ при любом целом $n \neq 0$.*

Лемма 3. *При $m \neq \pm 2$ и $n \neq 0$ коэффициент a_n в формуле (3) равен нулю тогда и только тогда, когда $m = 2\cos(\pi k/n)$, где $|n| \geqslant 2$, а $k \in \{1, \ldots, |n|-1\}$. При этом $b_n = (-1)^k$.*

Доказательство. При $m \neq \pm 2$ (т.е. $\mu \neq \pm 1$) из формулы (7) следует, что $a_n = 0$ тогда и только тогда, когда $\mu = \exp(i\pi k/n)$, т.е. $\mu^n = (-1)^k$, где i – мнимая единица, а целое число $k \neq pn$, $p \in \mathbb{Z}$. С другой стороны, при таких значениях μ имеем $m \equiv \mu + (\mu)^{-1} = 2\cos(\pi k/n)$ и $b_n = -a_{n-1} = (-1)^k$ в силу соотношений (4) и (7). Ограничения $|n| \neq 1$, $k \neq pn$ возникают из условия $m \neq \pm 2$. Приведённые в лемме ограничения на значения k, отличные от условия $k \neq pn$, $p \in \mathbb{Z}$, несущественны, так как в силу свойств косинуса они не меняют множество всех подходящих значений m. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $m = 2\cos(\pi k/n)$, где числа $n \geqslant 2$ и $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ взаимно простые. Тогда $a_j \neq 0$ $(j = \overline{1, n-1})$, $a_n = 0$.*

Доказательство. Очевидно, что в условиях леммы $m \neq \pm 2$ и $a_n = 0$ в силу леммы 3. Если $n = 2$, то лемма полностью доказана, так как $a_1 = 1$. Предположим, что $n \geqslant 3$ и $a_j = 0$ при некотором $j \in \{2, \ldots, n-1\}$. Тогда из леммы 3 получаем, что $m = 2\cos(\pi s/j)$, где $s \in \{1, \ldots, j-1\}$. В силу условия леммы это означает, что $\cos(\pi k/n) = \cos(\pi s/j)$. Откуда, пользуясь формулой разности косинусов, имеем $k/n + s/j = 2p$ или $k/n - s/j = 2p$, где $p \in \mathbb{Z}$. По условию $0 < k/n$, $s/j < 1$, поэтому возможен только второй случай при $p = 0$. Допустим, что $k/n = s/j$, т.е. $kj = ns$. Но n и k – взаимно простые, поэтому последнее равенство возможно, только если $j = rn$, где целое число $r \geqslant 1$, а по условию $j < n$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема. *Пусть Ω_1 и Ω_2 – односвязные области в $\mathbb{C}$, $\Omega_1 \subset \Omega_2$, и их границы не имеют общих точек. Уравнение (1) и потенциал q являются квазибезмонодромными в “кольцеобразной” области $K = \Omega_2 \setminus \Omega_1$ аналитичности потенциала q тогда и только тогда, когда для уравнения (1) некоторая матрица монодромии M области Ω_1 или её след m удовлетворяют одному из следующих трёх альтернативных условий:*

1) $M = I$;

2) $M = -I$;

3) $m = 2\cos(\pi k/n)$, где числа $n \geqslant 2$ и $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ – взаимно простые.

В первых двух случаях показатель безмонодромности $I_M = \pm 1$ соответственно, а в последнем случае $I_M = (-1)^k n$.

Доказательство. При $n \geqslant 1$ в силу формулы (3) $M^n \in \{\pm I\}$ тогда и только тогда, когда либо $M \in \{\pm I\}$, либо $M \notin \{\pm I\}$, но $a_n = 0$. Поэтому необходимость и достаточность выполнения одного из трёх условий теоремы непосредственно вытекает из следствий 1, 2 и леммы 3. При этом условие взаимной простоты чисел k и n, очевидно, не является существенным, так как не меняет множество всех подходящих значений m. Значение I_M в первых двух случаях сразу следует из определения 1, а в третьем случае $(m \neq \pm 2)$ – из определения 1, формулы (3) и леммы 4.

Следствие 3. *Не существует потенциалов с положительным чётным показателем безмонодромности I_M.*

Доказательство. В силу сформулированной выше теоремы показатель безмонодромности равен либо ± 1, либо $(-1)^k n$, где k и n – взаимно простые числа, и, следовательно, не могут быть одновременно чётными. Следствие доказано.

Поскольку $\det(M) = 1$, то $\operatorname{Tr}(M) = \operatorname{Tr}(M^{-1})$, и значит, в условиях теоремы можно использовать как матрицу монодромии M, так и обратную к ней, полученную при обходе области Ω_1 по часовой стрелке.

3. Примеры квазибезмонодромных потенциалов. Случай $M = I$ для однозначных потенциалов хорошо изучен в работах [2–5], а для многозначных потенциалов ранее не рассматривался. Случай 2 в теореме, скорее всего, не реализуем ни для каких *однозначных* потенциалов. По крайней мере, пользуясь известными асимптотическими представлениями решений уравнения (1) (см. [6; 10, формула (1.3)]), можно доказать, что это справедливо, если в области K существует хотя бы одна спрямляемая кривая, ограничивающая выпуклую область. Последнее утверждение, в частности, всегда имеет место в некоторой достаточно малой выколотой окрестности изолированной особой точки. Вместе с тем, как будет показано в данном пункте, существуют особые точки многозначного характера, для которых $M = -I$. Приведены примеры потенциалов с особыми точками, имеющими любое заданное значение показателя безмонодромности, не запрещенное следствием 3.

Рассмотрим потенциалы $q(z)$ вида

$$q(z) = -\frac{p(p-1)}{z^2}, \quad \text{где} \quad p \geqslant \frac{1}{2}. \tag{10}$$

Ограничение на значения параметра p учитывает тот факт, что замена p на $1-p$ не меняет вид потенциала (10). Как известно (см., например, [11, ч. 3, гл. 2, пример 2.162(7)]), если $\lambda \neq 0$, то одну из ФСР уравнения (1) с потенциалом (10) образуют функции $y^{(1)} = \sqrt{z}\,\mathrm{J}_{p-1/2}(i\lambda z)$ и $y^{(2)} = \sqrt{z}\,\mathrm{N}_{p-1/2}(i\lambda z)$, где J_k и N_k – функции Бесселя первого и второго рода соответственно. Также хорошо известно [12, формула (21.8-6)], что

$$\mathrm{J}_k(\exp\{2\pi i\}z) = \exp\{2\pi k i\}\mathrm{J}_k(z), \quad \mathrm{N}_k(\exp\{2\pi i\}z) = \exp\{-2\pi k i\}\mathrm{N}_k(z) + 4i\cos^2(\pi k)\mathrm{J}_k(z).$$

Следовательно, при $\lambda \neq 0$ и указанном выборе ФСР матрица монодромии особой точки $z = 0$ уравнения (1) с потенциалом (10) будет равна

$$M = \begin{pmatrix} \exp(2\pi p i) & -4i\sin^2(\pi p) \\ 0 & \exp(-2\pi p i) \end{pmatrix}.$$

Поэтому для этой особой точки $m \equiv \mathrm{Tr}\,(M) = 2\cos(2\pi p)$. Заметим также, что при $\lambda = 0$ в качестве ФСР уравнения (1) с потенциалом (10) можно взять, например, функции z^p, z^{1-p} при $p \neq 1/2$ и $z^{1/2}$, $z^{1/2}\ln z$ при $p = 1/2$. При этом вид матрицы монодромии будет другим, но формула для следа сохранится. Из этой формулы и теоремы следует, что возможны два случая квазибезмонодромных потенциалов вида (10):

1) $p \in \mathbb{N}$ – классический случай безмонодромного потенциала $(M = I)$;

2) $p = (r + k/n)/2$, где $r \in \mathbb{N}$, а числа $n \geqslant 2$ и $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ – взаимно простые, – квазибезмонодромный потенциал с $I_M = (-1)^k n$, если r чётное, и $I_M = (-1)^{n-k} n$, если r нечётное.

При остальных значениях p потенциал (10) не является квазибезмонодромным. Иными словами, потенциалы (10) являются квазибезмонодромными при любом рациональном p, отличном от полуцелого числа. При этом они охватывают все возможные значения показателя безмонодромности, не запрещенные следствием 3, кроме случая $I_M = -1$.

Поскольку, как уже было отмечено, однозначные изолированные особые точки заведомо не могут иметь показатель $I_M = -1$, то рассмотрим потенциалы, имеющие в нуле точку ветвления порядка $N - 1 > 0$, и сделаем в уравнении (1) следующие замены переменной и неизвестной функции:

$$w = z^{1/N}, \quad u(w) = y(z)w^{(1-N)/2}. \tag{11}$$

Тогда прямой подстановкой нетрудно убедиться, что $u(w)$ удовлетворяет уравнению Штурма–Лиувилля с комплексным весом, имеющим в точке $w = 0$ нуль кратности $2(N-1)$:

$$u''(w) + \left\{\frac{1-N^2}{4w^2} + N^2 w^{2N-2}(q(w^N) - \lambda^2)\right\}u(w) = 0. \tag{12}$$

При этом важно, что при N-кратном обходе по замкнутой траектории особой точки $z=0$ на комплексной плоскости переменной z особая точка $w=0$ на комплексной плоскости w будет обходиться один раз также по замкнутой траектории, и значит, потенциал в уравнении (12) будет однозначной функцией от w. При этом для любых ФСР уравнений (1) и (12), связанных между собой соотношением (11), соответствующие матрицы монодромии M_z и M_w этих особых точек будут также связаны равенством

$$M_w = (-1)^{N-1} M_z. \tag{13}$$

Действительно, пусть функции $u^{(j)}(w)$ $(j=1,2)$ образуют ФСР уравнения (12). Тогда соответствующая ФСР уравнения (1) в силу (11) будет иметь вид $y^{(j)}(z) = u^{(j)}(w) w^{(N-1)/2}$, где $w = z^{1/N}$. Поэтому, если $u^{(j)}(w\exp\{2\pi i\}) = M_{w,jk} u^{(k)}(w)$ $(j,k=1,2)$ (здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование), то

$$y^{(j)}(z\exp\{2\pi N i\}) = (-1)^{N-1} u^{(j)}(w\exp\{2\pi i\}) w^{(N-1)/2} =$$

$$= (-1)^{N-1} M_{w,jk} u^{(k)}(w) w^{(N-1)/2} = (-1)^{N-1} M_{w,jk} y^{(k)}(z).$$

Из соотношения (13) следует

Утверждение 1. *Пусть $z=0$ является точкой ветвления потенциала $q(z)$ порядка $N-1$ $(N \geqslant 2)$, а $w=0$ – безмонодромная особая точка уравнения (12). Тогда $z=0$ является квазибезмонодромной особой точкой уравнения (1), причём $I_M = (-1)^{N-1}$.*

Неограниченное количество уравнений вида (12) с безмонодромной особой точкой $w=0$ можно построить с помощью следующей леммы, являющейся частным случаем (при $\lambda=0$) леммы 1 работы [13].

Лемма 5. *Пусть функция $h(w)$ имеет вид*

$$h(w) = -\frac{\nu(\nu-1)}{w^2} + h_{-1} w^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} h_k w^k,$$

где $\nu \in \mathbb{N}$, $h_{-1} = h_1 = \ldots = h_{2\nu-3} = 0$, и ряд сходится в круге $U_R = \{|z| < R\}$. Тогда все голоморфные решения уравнения $u''(w) + h(w)u(w) = 0$ являются однозначными функциями в кольце $K_R = \{0 < |w| < R\}$.

Заметим, что различие в знаке перед первым слагаемым формулы для потенциала в лемме 1 статьи [13] и в лемме 5 настоящей работы связано с соответствующими различиями в знаках перед потенциалами в уравнениях Штурма–Лиувилля.

Пусть потенциал $q(z)$ в уравнении (1) имеет вид

$$q(z) = \frac{1}{N^2 z^2}\biggl(-\frac{1-N^2}{4} - \nu(\nu-1) + \sum_{k=-1}^{\infty} h_k z^{(k+2)/N}\biggr),$$

где $\nu \in \mathbb{N}$, $h_{-1} = h_1 = \ldots = h_{2\nu-3} = 0$, и ряд сходится в круге U_R. Тогда если существует хотя бы одно значение $h_k \neq 0$ с номером $k = Np + r - 2$, где $p \in \{0, \mathbb{N}\}$, r и N – взаимно простые, то в силу леммы 5 и утверждения 1 показатель безмонодромности уравнения (1) в кольце K_R будет равен $(-1)^{N-1}$. Таким образом, существует целое семейство многозначных потенциалов, особая точка которых имеет показатель безмонодромности $I_M = -1$.

Утверждение 1 может быть использовано для поиска безмонодромных в некоторой области уравнений Штурма–Лиувилля с переменным весом. Пусть уравнение (1) является квазибезмонодромым в некоторой "кольцеобразной" области $K_z = \Omega_2 \setminus \Omega_1$ комплексной плоскости z, причём модуль показателя безмонодромности равен $n \geqslant 1$, а голоморфный всюду в K потенциал $q(z)$ имеет конечный порядок ветвления $N-1 \geqslant 0$ $(nN > 1)$. Без ограничения общности можно считать, что точка $z=0$ лежит в области Ω_1. Тогда с помощью замены переменной и неизвестной функции по формулам, аналогичным (11):

$$w = z^{1/(nN)}, \quad u(w) = y(z) w^{(1-nN)/2}, \tag{14}$$

получим, что функция $u(w)$ удовлетворяет следующему уравнению Штурма–Лиувилля, аналогичному уравнению (12):

$$u''(w) + \left\{ \frac{1-(nN)^2}{4w^2} + (nN)^2 w^{2nN-2}(q(w^{nN}) - \lambda^2) \right\} u(w) = 0, \quad w \in K_w. \tag{15}$$

Формулы (14) отображают любую замкнутую кривую, лежащую в области K_z и обходящую nN раз область Ω_1, в замкнутую кривую, лежащую в некоторой кольцевой области $K_w = \Omega_{2w} \setminus \Omega_{1w}$ комплексной плоскости w и обходящую область Ω_{1w} один раз. Поэтому потенциал уравнения (15) будет однозначной функцией переменной w в области K_w. При этом для любых ФСР уравнений (1) и (15), связанных между собой соотношениями (14), соответствующие матрицы монодромии M_z и M_w областей Ω_1 и Ω_{1w} будут связаны соотношением, аналогичным формуле (13):

$$M_w = (-1)^{nN-1} M_z.$$

Поэтому справедливо, в частности, следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть* $z = 0$ *является точкой ветвления потенциала* $q(z)$ *порядка* $N-1$ $(N \geqslant 1)$ *и имеет порядок безмонодромности* $I_{Mz} = (-1)^L n$, *где* $n \geqslant 1$. *Тогда порядок безмонодромности точки* $w = 0$ *уравнения (15) равен* $I_M = (-1)^{L+nN-1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маркушевич А.М.* Теория аналитических функций. Т. 2. М., 1968.
2. *Ишкин Х.К.* О критерии безмонодромности уравнения Штурма–Лиувилля // Мат. заметки. 2013. Т. 94. № 4. С. 552–568.
3. *Duistermaat J.J., Grünbaum F.A.* Differential equations in the spectral parameter // Comm. in Math. Phys. 1986. V. 103. № 2. P. 177–240.
4. *Обломков А.А.* Безмонодромные операторы Шрёдингера с квадратично растущим потенциалом // Теор. и мат. физика. 1999. Т. 121. № 3. С. 374–386.
5. *Gibbons J., Veselov A.P.* On the rational monodromy-free potentials with sextic growth // J. of Math. Phys. 2009. V. 50. № 1. P. 013513.
6. *Langer R.E.* The boundary problem of an ordinary linear differential system in the complex domain // Trans. Amer. Math. Soc. 1939. V. 46. P. 151–190.
7. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1968.
8. *Ишкин Х.К., Давлетова Л.Г.* Регуляризованный след оператора Штурма–Лиувилля на кривой с регулярной особенностью на хорде // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 10. С. 1291–1303.
9. *Golubkov A.A.* Inverse problem for the Sturm–Liouville equation with piecewise entire potential and piecewise constant weight on a curve // Сиб. электрон. мат. изв. 2021. Т. 18. № 2. С. 951–974.
10. *Хединг Дж.* Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М., 1965.
11. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971.
12. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., 1981.
13. *Ишкин Х.К.* О критерии однозначности решений уравнения Штурма–Лиувилля // Мат. заметки. 2008. Т. 84. № 4. С. 552–566.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 18.05.2022 г.
После доработки 18.05.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.