ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 8, с. 1039–1052

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.35

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЧНОЙ ДИССИПАЦИЕЙ И НЕЛИНЕЙНЫМ ИСТОЧНИКОМ ПЕРЕМЕННОГО ПОРЯДКА РОСТА

© 2022 г. А. Б. Алиев, Г. Х. Шафиева

Исследована смешанная задача для систем одномерных полулинейных гиперболических уравнений с переменным показателем роста нелинейности и нелинейными граничными условиями. Доказаны теоремы о локальной разрешимости и разрушении решений за конечный промежуток времени.

DOI: 10.31857/S0374064122080040, EDN: CFGWLJ

1. Постановка задачи и основные результаты. Настоящая работа является продолжением работы авторов [1], в которой исследована начально-краевая задача для систем полулинейных гиперболических уравнений с нелинейными граничными условиями и нелинейным источником, имеющим рост переменного порядка, приведены краткая история вопроса и обоснование актуальности темы исследования (см. также [2–7]).

В области $[0,l]\times[0,+\infty)$ рассмотрим начально-краевую задачу

$$u_{i_{tt}}-(a_i(x)u_{i_x})_x=f_i(x,u_1,u_2),\quad 0<x<l,\quad t>0, \tag{1}$$

$$u_i(0,t)=0,\quad t>0, \tag{2}$$

$$a_i(l)u_{i_x}(l,t)+|u_{i_t}(l,t)|^{r_i-1}u_{i_t}(l,t)=0,\quad t>0, \tag{3}$$

$$u_i(x,0)=u_{i0}(x),\quad u_{i_t}(x,0)=u_{i1}(x),\quad 0<x<l, \tag{4}$$

где $i=1,2,$ $r_1\geqslant 1,$ $r_2\geqslant 1,$ $u_1=u_1(x,t),$ $u_2=u_2(x,t),$ $u_{10}(x),$ $u_{20}(x),$ $u_{11}(x),$ $u_{21}(x),$ $a_1(x),$ $a_2(x)$ – вещественнозначные функции,

$$a_i(x)\in C^1[0,l],\quad a_i(x)\geqslant a_{i0}>0,\quad 0\leqslant x\leqslant l,\quad i=1,2, \tag{5}$$

$$f_i(x,u_1,u_2)=|u_1+u_2|^{2p(x)}(u_1+u_2)+|u_1|^{p(x)+(-1)^i}|u_2|^{p(x)-(-1)^i}u_i,\quad i=1,2. \tag{6}$$

Предположим, что измеримая функция $p(\cdot)$ удовлетворяет условию логарифмической непрерывности Гёльдера, т.е. для любых $x,y\in[0,l]$ таких, что $|x-y|<\delta,$ $0<\delta<1,$ выполнено неравенство

$$|p(x)-p(y)|\leqslant-\frac{C}{\log|x-y|}, \tag{7}$$

где $C>0.$ Допустим также, что

$$2\leqslant p_1\leqslant p(x)\leqslant p_2<+\infty,\quad 0\leqslant x\leqslant l, \tag{8}$$

где $p_1:=\operatorname*{ess\,inf}_{x\in[0,l]}p(x),\quad p_2:=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in[0,l]}p(x).$

Заметим, что необходимые известные факты пространства Лебега переменного порядка приведены в работах [1, 8–13].

Введём следующие обозначения:

$$H^m=H^m(0,l)=\{v:v,v^{(m)}\in L_2(0,l)\},\quad {}_0H^1=\{v:v\in H^1(0,l),\ \ v(0)=0\}.$$

Определим *функционал энергии*

$$E(t) = E_0(t) - R(u_1(\,\cdot\,,t), u_2(\,\cdot\,,t)), \tag{9}$$

где

$$E_0(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\Big[\int\limits_0^l |u_{i_t}(x,t)|^2\,dx + \int\limits_0^l a_i(x)|u_{i_x}(x,t)|^2\,dx\Big],$$

$$R(u_1(\,\cdot\,,t), u_2(\,\cdot\,,t)) = \int\limits_0^l \frac{1}{2(p(x)+1)}|u_1(x,t)+u_2(x,t)|^{2(p(x)+1)}\,dx +$$

$$+\int\limits_0^l \frac{1}{p(x)+1}|u_1(x,t)\cdot u_2(x,t)|^{p(x)+1}\,dx.$$

Определение 1. Под *строгим решением* задачи (1)–(4) в области $(0,l)\times(0,T)$ будем понимать пару функций $(u_1(x,t), u_2(x,t))$ таких, что $u_i(\cdot)\in L_\infty(0,T;H^2\bigcap{}_0H^1)$, $u_{i_t}(\cdot)\in$ $\in L_\infty(0,T;{}_0H^1)$, $u_{i_{tt}}(\cdot)\in L_\infty(0,T;L_2(0,l))$, $i=1,2$, удовлетворяющих системе (1) почти при всех $(x,t)\in(0,l)\times(0,T)$, а также граничным условиям (2), (3) и начальному условию (4).

Определение 2. Под *слабым решением* задачи (1)–(4) будем понимать пару функций $(u_1(x,t), u_2(x,t))$ таких, что

a) $u_i(\cdot)\in C_w([0,T];{}_0H^1)$, $u_{i_t}(\cdot)\in C_w([0,T];L_2(0,l))$, $i=1,2$;

b) след u_{i_t} в $\{l\}\times(0,T)$ принадлежит $L_{r_{i+1}}(0,T)$, т.е. $u_{i_t}(l,t)\in L_{r_{i+1}}(0,T)$, $i=1,2$;

c) для всех $\eta_1(\cdot),\eta_2(\cdot)\in C_w([0,T];{}_0H^1)\bigcap C_w^1([0,T];L_2(0,l))$, $\eta_{i_t}(l,t)\in L_{r_{i+1}}(0,T)$, $\eta_i(x,T)=$ $=0$, $i=1,2$, выполнены следующие равенства:

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^l[-u_{i_t}(x,t)\eta_{i_t}(x,t)+u_{i_x}(x,t)\eta_{i_x}(x,t)]\,dx\,dt + \int\limits_0^T |u_{i_t}(l,t)|^{r_i-1}u_{i_t}(l,t)\eta_i(l,t)\,dt -$$

$$-\int\limits_0^l u_{i1}(x)\eta_i(x,0)\,dt = \int\limits_0^T\int\limits_0^l f_i(x,u_1,u_2)\eta_i(x,t)\,dx\,dt;$$

$$\lim_{t\to 0}\langle u_i(\,\cdot\,,t)-u_{i0}(\cdot),\eta_i(\cdot)\rangle_{{}_0H^1}=0.$$

Здесь через $C_w([0,T];Y)$ обозначено пространство слабо непрерывных функций со значениями из банахова пространства Y.

Определим следующий класс функций:

$$C_{T'}=\{v: v\in C([0,T'];{}_0H^1),\ \ v_t'(\cdot)\in C^1([0,T'];L_2(0,l)),\ \ v_t(l,\cdot\,)\in L_{r_i}(0,T'),\ \ i=1,2\}.$$

Справедливы следующие теоремы о локальной разрешимости задачи (1)–(4).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (5)–(8). Тогда для начальных данных* $u_{i0}\in{}_0H^1$, $u_{i1}\in L_2(0,l)$, $i=1,2$, *существует такое* $T'\in(0,T]$, *что задача (1)–(4) имеет локальное по времени слабое решение* $(u_1(x,t),u_2(x,t))$ *в области* $(0,l)\times(0,T')$, *причём* $u_i(\cdot)\in C_{T'}$, $i=1,2$, *и выполняется энергетическое равенство*

$$E(t)+\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^t |u_{i_\tau}(l,\tau)|^{r_i+1}\,d\tau = E(0),\quad 0\leqslant t\leqslant T'. \tag{10}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (5)–(8). Предположим также, что* $u_{i0}\in H^2\bigcap{}_0H^1$, $u_{i1}\in{}_0H^1$ и $a_i(l)u_{i0_x}(l)+|u_{i1}(l)|^{r_i-1}u_{i_t}(l,t)=0$, $i=1,2$.

Тогда существует такое $T' \in (0,T]$, *что задача (1)–(4) имеет локальное по времени строгое решение* $(u_1(x,t), u_2(x,t))$ *в области* $(0,l)\times(0,T')$ *и выполняется энергетическое равенство (10).*

Схему доказательств этих теорем приведём в п. 3.

Далее исследуем вопрос отсутствия глобальных решений задачи (1)–(4), т.е. разрушения локальных решений за конечное время в зависимости от отношений между r_i, $i=1,2$, и $p(x)$. Под термином *решения* будем подразумевать слабые решения рассматриваемой задачи.

В случае когда $\max\{r_1,r_2\} < p_1+1$, получен следующий результат о разрушении локальных решений за конечный промежуток времени.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Предположим, что*

$$\max\{r_1,r_2\} < p_1+1, \quad E(0)<0.$$

Тогда решение задачи (1)–(4) разрушается за конечное время.

Случай, когда коэффициенты $a_i(x)$ не зависят от x, исследован в статье [1]. Заметим, что доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2 из [1] с небольшим техническим уточнением.

Введём следующие обозначения:

$$\varphi_0 = \min_{-1\leqslant x\leqslant 0}\varphi(x), \quad \text{где} \quad \varphi(x) = |1+x|^{2(p_1+1)} + 2|x|^{p_1+1},$$

$$\psi_0 = \max\{a_1(l), a_2(l)\}.$$

Очевидно, что $\varphi_0>0$.

Основным результатом данной работы является следующая теорема об отсутствии глобальных решений в случае $\min\{r_1,r_2\}\geqslant p_1+1$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия (5)–(8). Предположим, что справедливы неравенства*

$$a_i'(x)\geqslant 0, \quad p'(x)\leqslant 0, \quad 0\leqslant x\leqslant l, \quad i=1,2, \tag{11}$$

$$\min\{r_1,r_2\}\geqslant p_1+1, \tag{12}$$

$$E(0) < -\frac{3}{2e}\int\limits_0^l \frac{|xp'(x)|}{p^2(x)}\,dx, \tag{13}$$

$$l > \max_{0\leqslant x\leqslant l}\frac{2(p(x)+1)-xp'(x)}{p(x)(p(x)+1)}\bigg/\min\left\{\varphi_0, \frac{2p_1+1}{2(p_1+1)\psi_0}, \frac{2p_1+1}{2(p_1+1)}\right\}. \tag{14}$$

Тогда решение задачи (1)–(4) разрушается за конечное время.

2. Разрушение решений за конечное время (доказательство теоремы 4). Через c_k, $k=1,2,\ldots,$ будем обозначать различные положительные константы.

Будем использовать следующие леммы, доказанные в [1].

Лемма 1. *Пусть выполнены условия (8) и (9). Тогда существуют такие постоянные* $0<c_1<c_2$, *что при любых* $u_1,u_2\in {}_0H^1$ *выполнено неравенство*

$$c_1\sum_{i=1}^2 \rho_{2(p(\cdot)+1)}(u_i) \leqslant F(u_1,u_2) \leqslant c_2\sum_{i=1}^2 \rho_{2(p(\cdot)+1)}(u_i).$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (8), (9) и* $1/(p_1+1)<\varkappa<1,$ *тогда существует такая постоянная* $c_3>0$, *что при всех* $u_1,u_2\in {}_0H^1$ *выполнено неравенство*

$$\left[\sum_{i=1}^2 \rho_{2(p(\cdot)+1)}(u_i)\right]^{\varkappa} \leqslant c_3\left\{\sum_{i=1}^2\int\limits_0^l |u_{ix}|^2\,dx + \sum_{i=1}^2 \rho_{2(p(\cdot)+1)}(u_i)\right\}.$$

В частности, справедливо также неравенство

$$\Big\{\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^l |u_i|^{2(p_1+1)}\,dx\Big\}^{\varkappa} \leqslant c_3\Big\{\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^l |u_{ix}|^2\,dx+\sum_{i=1}^{2}\rho_{2(p(\cdot)+1)}(u_i)\Big\}.$$

Доказательство теоремы 4. Отметим, что в процессе доказательства теоремы 4 все операции проводятся для гладких начальных данных. Для слабых решений аналогичные утверждения получаются путём предельного перехода.

Согласно (11) $p'(x)\leqslant 0$, поэтому $p_1=\min\limits_{0\leqslant x\leqslant l}p(x)=p(l)$ и $p_2=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant l}p(x)=p(0)$.

Введём функционал $y(t)=-E(t)+\varepsilon k y_1(t)+\varepsilon y_2(t)$, где $\varepsilon>0$, $k>0$,

$$y_1(t)=\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^l u_i(x,t)u_{i_t}(x,t)\,dx,\quad y_2(t)=\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^l x u_{i_t}(x,t)u_{i_x}(x,t)\,dx.$$

В силу неравенства (14) существует такое число k, что

$$\max_{0\leqslant x\leqslant l}\frac{2(p(x)+1)-xp'(x)}{p(x)(p(x)+1)}<k<l\min\Big\{\varphi_0,\frac{2p_1+1}{2(p_1+1)\psi_0},\frac{2p_1+1}{2(p_1+1)}\Big\}. \tag{15}$$

Из (1)–(4) находим

$$y_1'(t)=\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^l |u_{i_t}(x,t)|^2\,dx-\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^l a_i(x)|u_{i_x}(x,t)|^2\,dx+\sum_{i=1}^{2}a_i(l)u_{i_x}(l,t)u_i(l,t)+$$
$$+\int\limits_0^l |u_1(x,t)+u_2(x,t)|^{2(p(x)+1)}\,dx+2\int\limits_0^l |u_1(x,t)u_2(x,t)|^{p(x)+1}\,dx$$

и

$$y_2'(t)=\frac{l}{2}\sum_{i=1}^{2}|u_{i_t}(l,t)|^2-\frac12\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^l |u_{i_t}(x,t)|^2\,dx+$$
$$+\frac{l}{2}\sum_{i=1}^{2}a_i(l)|u_{i_x}(l,t)|^2-\frac12\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^l a_i(x)|u_{i_x}(x,t)|^2\,dx+\frac12\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^l x a_i'(x)|u_{i_x}(x,t)|^2\,dx-$$
$$-\int\limits_0^l \frac{p(x)+1-xp'(x)}{2(p(x)+1)^2}|u_1(x,t)+u_2(x,t)|^{2(p(x)+1)}\,dx+\frac{l}{2(p_1+1)}|u_1(l,t)+u_2(l,t)|^{2(p_1+1)}-$$
$$-\int\limits_0^l \frac{xp'(x)}{p(x)+1}|u_1(x,t)+u_2(x,t)|^{2(p(x)+1)}\ln|u_1(x,t)+u_2(x,t)|\,dx-$$
$$-\int\limits_0^l \frac{p(x)+1-xp'(x)}{(p(x)+1)^2}|u_1(x,t)u_2(x,t)|^{p(x)+1}\,dx+\frac{l}{p_1+1}|u_1(l,t)u_2(l,t)|^{p_1+1}-$$
$$-\int\limits_0^l \frac{xp'(x)}{p(x)+1}|u_1(x,t)u_2(x,t)|^{p(x)+1}\ln|u_1(x,t)u_2(x,t)|\,dx.$$

С учётом этих соотношений, прибавив и отняв $\varepsilon(1+2k)E(t)$, получим

$$y'(t)=\sum_{i=1}^{2}|u_{i_t}(l,t)|^{r_i+1}-\varepsilon(1+2k)E(t)+2\varepsilon k\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^l|u_{i_t}(x,t)|^2\,dx+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^l xa_i'(x)|u_{i_x}(x,t)|^2\,dx+$$

$$+\,\varepsilon\int\limits_0^l\left\{k\frac{p(x)}{p(x)+1}-\frac{2(p(x)+1)-xp'(x)}{2(p(x)+1)^2}\right\}|u_1(x,t)+u_2(x,t)|^{2(p(x)+1)}\,dx-$$

$$-\,\varepsilon\int\limits_0^l\left\{2k\frac{p(x)}{p(x)+1}-\frac{2(p(x)+1)-xp'(x)}{(p(x)+1)^2}\right\}|u_1(x,t)u_2(x,t)|^{p(x)+1}\,dx-$$

$$-\,\varepsilon\int\limits_0^l\frac{xp'(x)}{p(x)+1}|u_1(x,t)+u_2(x,t)|^{2(p(x)+1)}\ln|u_1(x,t)+u_2(x,t)|\,dx-$$

$$-\,\varepsilon\int\limits_0^l\frac{xp'(x)}{p(x)+1}|u_1(x,t)u_2(x,t)|^{p(x)+1}\ln|u_1(x,t)u_2(x,t)|\,dx+$$

$$+\,\frac{l\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{2}|u_{i_t}(l,t)|^2+\frac{l\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{a_i(l)}|u_{i_t}(l,t)|^{2r_i}+\frac{l\varepsilon}{2(p_1+1)}|u_1(l,t)+u_2(l,t)|^{2(p_1+1)}+$$

$$+\,\frac{l\varepsilon}{p_1+1}|u_1(l,t)u_2(l,t)|^{p_1+1}+\varepsilon k\sum_{i=1}^{2}|u_{i_t}(l,t)|^{r_i-1}u_{i_t}(l,t)u_i(l,t).$$

Использовав неравенство Юнга с показателями $\theta=2(p_1+1)$, $\theta'=2(p_1+1)/(2p_1+1)$, имеем

$$|u_{i_t}(l,t)|^{r_i}|u_i(l,t)|\leqslant\frac{2p_1+1}{2(p_1+1)}|u_{i_t}(l,t)|^{2(p_1+1)r_i/(2p_1+1)}+\frac{1}{2(p_1+1)}|u_i(l,t)|^{2(p_1+1)},\quad i=1,2.\tag{16}$$

В силу неравенств (8), (12) запишем

$$r_i\frac{2(p_1+1)}{2p_1+1}\leqslant 2r_i$$

и

$$r_i\frac{2(p_1+1)}{2p_1+1}-2\geqslant(p_1+1)\frac{2(p_1+1)}{2p_1+1}-2=2p_1^2>0,\quad i=1,2,$$

откуда следует

$$|u_{i_t}(l,t)|^{2(p_1+1)r_i/(2p_1+1)}\leqslant|u_{i_t}(l,t)|^2+|u_{i_t}(l,t)|^{2r_i},\quad i=1,2.\tag{17}$$

Использовав определение φ_0, можно доказать, что

$$|u_1(l,t)+u_2(l,t)|^{2(p_1+1)}+2|u_1(l,t)\cdot u_2(l,t)|^{p_1+1}\geqslant\varphi_0\sum\nolimits_{i=1}^{2}|u_i(l,t)|^{2(p_1+1)}.$$

С учётом данного неравенства из (15)–(17) получим

$$y'(t)\geqslant\sum_{i=1}^{2}|u_{i_t}(l,t)|^{r_i+1}-\varepsilon(1+2k)E(t)+2\varepsilon k\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^l|u_{i_t}(x,t)|^2\,dx+$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^l\left\{k\frac{p(x)}{p(x)+1}-\frac{2(p(x)+1)-xp'(x)}{2(p(x)+1)^2}\right\}|u_1(x,t)+u_2(x,t)|^{2(p(x)+1)}\,dx-$$

$$-\varepsilon\int\limits_0^l\left\{2\frac{p(x)}{p(x)+1}-\frac{2(p(x)+1)-xp'(x)}{(p(x)+1)^2}\right\}|u_1(x,t)u_2(x,t)|^{p(x)+1}\,dx-$$

$$-\varepsilon\int\limits_0^l\frac{xp'(x)}{p(x)+1}|u_1(x,t)+u_2(x,t)|^{2(p(x)+1)}\ln|u_1(x,t)+u_2(x,t)|\,dx-$$

$$-\varepsilon\int\limits_0^l\frac{xp'(x)}{p(x)+1}|u_1(x,t)u_2(x,t)|^{p(x)+1}\ln|u_1(x,t)u_2(x,t)|\,dx+$$

$$+\varepsilon\biggl(\frac{l}{2}-k\frac{2p_1+1}{2(p_1+1)}\biggr)\sum_{i=1}^2|u_{i_t}(l,t)|^2+\varepsilon\biggl(\frac{l}{2\psi_0}-k\frac{2p_1+1}{2(p_1+1)}\biggr)\sum_{i=1}^2|u_{i_t}(l,t)|^{2r_i}+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2(p_1+1)}(l\varphi_0-k)\sum_{i=1}^2|u_i(l,t)|^{2(p_1+1)}. \tag{18}$$

Для $t>0$, обозначив $\mathfrak{R}_{1t}=\{x:|u_1(x,t)+u_2(x,t)|\geqslant 1,\ \ 0\leqslant x\leqslant l\}$ и $\mathfrak{R}_{2t}=\{x:|u_1(x,t)+{}$ ${}+u_2(x,t)|<1,\ \ 0\leqslant x\leqslant l\}$, запишем

$$I_t=-\varepsilon\int\limits_0^l\frac{xp^{'}(x)}{p(x)+1}|u_1(x,t)+u_2(x,t)|^{2(p(x)+1)}\ln|u_1(x,t)+u_2(x,t)|\,dx=I(\mathfrak{R}_{1t})+I(\mathfrak{R}_{2t}),$$

где

$$I(\mathfrak{R}_{1t})=-\varepsilon\int\limits_{x\in\mathfrak{R}_{1t}}\frac{xp'(x)}{p(x)+1}|u_1(x,t)+u_2(x,t)|^{2(p(x)+1)}\ln|u_1(x,t)+u_2(x,t)|\,dx$$

и

$$I(\mathfrak{R}_{2t})=-\varepsilon\int\limits_{x\in\mathfrak{R}_{2t}}\frac{xp'(x)}{p(x)+1}|u_1(x,t)+u_2(x,t)|^{2(p(x)+1)}\ln|u_1(x,t)+u_2(x,t)|\,dx.$$

С учётом (11) имеем

$$I(\mathfrak{R}_{1t})\geqslant 0, \tag{19}$$

а с другой стороны $|\alpha|^{2(p(x)+1)}\ln|\alpha|\geqslant -0.5(p(x)+1)^{-1}e^{-1}$, если $|\alpha|<1$, поэтому

$$I(\mathfrak{R}_{2t})\geqslant -\varepsilon M_1, \tag{20}$$

где

$$M_1=\frac{1}{2e}\int\limits_0^l\frac{|xp'(x)|}{(p(x)+1)^2}\,dx.$$

Из неравенств (19) и (20) следует, что

$$I_t\geqslant -\varepsilon M_1. \tag{21}$$

Аналогичным образом можно получить

$$J_t = -\varepsilon \int_0^l \frac{xp'(x)}{p(x)+1} |u_1(x,t)u_2(x,t)|^{p(x)+1} \ln |u_1(x,t)u_2(x,t)|\, dx \geqslant -\varepsilon M_2,$$

где

$$M_2 = \frac{1}{e} \int_0^l \frac{|xp'(x)|}{(p(x)+1)^2}\, dx.$$

Кроме того, из (13), (15) и (21) следует, что выполняются неравенства

$$2k\frac{p(x)}{p(x)+1} - \frac{2(p(x)+1) - xp'(x)}{(p(x)+1)^2} \geqslant 0, \tag{22}$$

$$-\varepsilon(1+2k)E(t) + I_t + J_t \geqslant -\varepsilon\{(1+2k)E(0) - M_1 - M_2\} \geqslant 0. \tag{23}$$

С другой стороны, из (15) имеем

$$\beta = \varepsilon \min\left\{ l\varphi_0 - k, \frac{l}{2} - k\frac{2p_1+1}{2(p_1+1)}, \frac{l}{2\psi_0} - k\frac{2p_1+1}{2(p_1+1)} \right\} > 0.$$

В силу (19)–(23) из (18) находим

$$y'(t) \geqslant \beta\left\{ \sum_{i=1}^2 |u_{i_t}(l,t)|^2 + \sum_{i=1}^2 |u_{i_t}(l,t)|^{2r_i} + \sum_{i=1}^2 |u_i(l,t)|^{2(p_1+1)} \right\}. \tag{24}$$

Зафиксируем k и выберем ε достаточно малым, чтобы

$$y(0) = -E(0) + \varepsilon k \sum_{i=1}^2 \int_0^l u_{i0}(x)u_{i1}(x)\, dx + \varepsilon \sum_{i=1}^2 \int_0^l xu_{0x}(x)u_{1x}(x)\, dx > 0. \tag{25}$$

Из (24) и (25) получим

$$y(t) \geqslant y(0) > 0.$$

Применив неравенство Гёльдера, имеем

$$y(t) \leqslant -E(t) + \frac{\varepsilon}{2}(k+1)l\left[\sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_{i_x}(x,t)|^2\, dx + \sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_{i_t}(x,t)|^2\, dx \right].$$

Отсюда в силу (10) и (13) для достаточно малых $\varepsilon > 0$ получим

$$y(t) \leqslant c_4 R(u_1, u_2). \tag{26}$$

Из лемм 1 и 2 следует

$$[R(u_1,u_2)]^{1-\alpha} \leqslant c_5\left[\sum_{i=1}^2 \int_0^l |u_{i_x}(x,t)|^2\, dx + R(u_1,u_2) \right], \tag{27}$$

где $0 < \alpha < p_1/(p_1+1)$. Тогда с учётом (10) и (26) из (27) получим следующее неравенство:

$$y^{1-\alpha}(t) \leqslant c_6 \int_0^l \frac{1}{p(x)+1} |u_1(x,t)+u_2(x,t)|^{2(p(x)+1)}\, dx + c_6 \int_0^l \frac{1}{p(x)+1} |u_1(x,t)u_2(x,t)|^{p(x)+1}\, dx.$$

Выбрав $\alpha = 0.5p_1/(p_1+1)$ и значение θ достаточно малым, определим функцию

$$z(t) = y^{1-\alpha}(t) + \theta\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^l u_i(x,t)u_{i_t}(x,t)\,dx,$$

где $z(0) > 0$. Продифференцировав $z(t)$ и использовав (1)–(4), находим

$$z'(t) = (1-\alpha)y^{-\alpha}(t)y'(t) - 2\theta E(t) + 2\theta\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^l |u_{i_t}(x,t)|^2\,dx +$$

$$+\,\theta\int\limits_0^l \frac{p(x)}{p(x)+1}|u_1(x,t)+u_2(x,t)|^{2(p(x)+1)}\,dx +$$

$$+\,2\theta\int\limits_0^l \frac{p(x)}{p(x)+1}|u_1(x,t)u_2(x,t)|^{p(x)+1}\,dx - \theta\sum_{i=1}^{2}|u_{i_t}(l,t)|^{r_i-1}u_{i_t}(l,t)u_i(l,t).$$

Применив неравенство Юнга с показателями $\rho = 1/\alpha$, $\rho' = 1/(1-\alpha)$, имеем

$$\sum_{i=1}^{2}|u_{i_t}(l,t)|^{r_i}|u_i(l,t)| = \left[\frac{1}{\delta}\sum_{i=1}^{2}|u_{i_t}(l,t)|^{r_i}|u_i(l,t)|\right]\delta \leqslant$$

$$\leqslant (1-\alpha)\delta^{-1/(1-\alpha)}\left[\sum_{i=1}^{2}|u_{i_t}(l,t)|^{r_i}|u_i(l,t)|\right]^{1/(1-\alpha)} + \alpha\delta^{1/\alpha}.$$

Выбрав $\delta = K^{-1}y^{\alpha(1-\alpha)}(t)$, получим

$$z'(t) \geqslant (1-\alpha)y^{-\alpha}(t)y'(t) - 2\theta E(t) + 2\theta\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^l |u_{i_t}(x,t)|^2\,dx +$$

$$+\,\theta\int\limits_0^l \frac{p(x)}{p(x)+1}|u_1(x,t)+u_2(x,t)|^{2(p(x)+1)}\,dx + 2\theta\int\limits_0^l \frac{p(x)}{p(x)+1}|u_1(x,t)u_2(x,t)|^{p(x)+1}\,dx -$$

$$-\,\theta(1-\alpha)K^{1/(1-\alpha)}y^{-\alpha}(t)\left[\sum_{i=1}^{2}|u_{i_t}(l,t)|^{r_i}|u_i(l,t)|\right]^{1/(1-\alpha)} - \theta K^{-1/\alpha}y^{1-\alpha}(t).$$

В силу (24) отсюда будем иметь

$$z'(t) \geqslant \beta(1-\alpha)y^{-\alpha}(t)\left\{\sum_{i=1}^{2}|u_{i_t}(l,t)|^2 + \sum_{i=1}^{2}|u_{i_t}(l,t)|^{2r_i} + \sum_{i=1}^{2}|u_i(l,t)|^{2(p_1+1)}\right\} - 2\theta E(t) +$$

$$+\,2\theta\sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^l |u_{i_t}(x,t)|^2\,dx + \theta\int\limits_0^l \frac{p(x)}{p(x)+1}|u_1(x,t)+u_2(x,t)|^{2(p(x)+1)}\,dx +$$

$$+\,2\theta\int\limits_0^l \frac{p(x)}{p(x)+1}|u_1(x,t)u_2(x,t)|^{p(x)+1}\,dx -$$

$$-\,\theta(1-\alpha)K^{1/(1-\alpha)}y^{-\alpha}(t)\left[\sum_{i=1}^{2}|u_{i_t}(l,t)|^{r_i}|u_i(l,t)|\right]^{1/(1-\alpha)} - \theta K^{-1/\alpha}y^{1-\alpha}(t). \qquad (28)$$

Далее используем неравенство Юнга с показателями $\lambda = 2(1-\alpha)$, $\lambda' = 2(1-\alpha)/(1-2\alpha)$, в результате имеем

$$\left[\sum_{i=1}^{2}|u_{i_t}(l,t)|^{r_i}|u_i(l,t)|\right]^{1/(1-\alpha)} \leqslant 2^{2/(1-\alpha)}\left[\sum_{i=1}^{2}|u_{i_t}(l,t)|^{r_i/(1-\alpha)}|u_i(l,t)|^{1/(1-\alpha)}\right] \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2/(1-\alpha)}\left[\frac{1}{2(1-\alpha)}\sum_{i=1}^{2}|u_{i_t}(l,t)|^{2r_i} + \frac{1-2\alpha}{2(1-\alpha)}\sum_{i=1}^{2}|u_i(l,t)|^{2(p_1+1)}\right].$$

С учётом этих неравенств из (28) получим

$$z'(t) \geqslant (1-\alpha)y^{-\alpha}(t)\left\{\beta\sum_{i=1}^{2}|u_{i_t}(l,t)|^2 + \left(\beta - \theta\frac{2^{2/(1-\alpha)}}{2(1-\alpha)}K^{1/(1-\alpha)}\right)\sum_{i=1}^{2}|u_{i_t}(l,t)|^{2r_i} + \right.$$

$$\left. + \left(\beta - \theta 2^{2/(1-\alpha)}\frac{1-2\alpha}{2(1-\alpha)}K^{1/(1-\alpha)}\right)\sum_{i=1}^{2}|u_i(l,t)|^{2(p_1+1)}\right\} + 2\theta\sum_{i=1}^{2}\int_0^l |u_{i_t}(x,t)|^2\,dx +$$

$$+ \theta\int_0^l \left\{\frac{p(x)}{p(x)+1} - c_6K^{-1/\alpha}\right\}|u_1(x,t)+u_2(x,t)|^{2(p(x)+1)}\,dx +$$

$$+ 2\theta\int_0^l \left\{\frac{p(x)}{p(x)+1} - c_6K^{-1/\alpha}\right\}|u_1(x,t)u_2(x,t)|^{p(x)+1}\,dx.$$

Далее выбираем достаточно большое $K > 0$ и достаточно малое $\theta > 0$ таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{p(x)}{p(x)+1} - c_6K^{-1/\alpha} \geqslant \theta_0 > 0, \quad \beta - \theta\frac{2^{2/(1-\alpha)}}{2(1-\alpha)}K^{1/(1-\alpha)} \geqslant \theta_0 > 0.$$

С учётом этих неравенств и леммы 1 из (28) находим

$$z'(t) \geqslant \theta_0\left\{\sum_{i=1}^{2}\int_0^l |u_{i_t}(x,t)|^2\,dx + \int_0^l |u_1(x,t)+u_2(x,t)|^{2(p(x)+1)}\,dx + \int_0^l |u_1(x,t)u_2(x,t)|^{p(x)+1}\,dx\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \theta_1\left\{\sum_{i=1}^{2}\int_0^l |u_{i_t}(x,t)|^2\,dx + \sum_{i=1}^{2}\int_0^l |u_i(x,t)|^{2(p(x)+1)}\,dx\right\}, \tag{29}$$

где $\theta_1 = \theta_0\min\{c_1, 1\}$. С другой стороны,

$$z^{1/(1-\alpha)}(t) \leqslant c_7\left\{y(t) + \theta^{1/(1-\alpha)}\left[\sum_{i=1}^{2}\int_0^l u_{i_t}(x,t)u_i(x,t)\,dx\right]^{1/(1-\alpha)}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant c_8\left\{y(t) + \left[\sum_{i=1}^{2}\int_0^l |u_i(x,t)|^{2(p_1+1)}\,dx\right]^{1/(2(1-\alpha)(p_1+1))}\left[\sum_{i=1}^{2}\int_0^l |u_{i_t}(x,t)|^2\,dx\right]^{1/(2(1-\alpha))}\right\}.$$

Применив неравенство Гёльдера с показателями $\mu_1 = 2(1-\alpha)/(1-2\alpha)$, $\mu_2 = 2(1-\alpha)$, имеем

$$z^{1/(1-\alpha)}(t) \leqslant c_9 \bigg\{ y(t) + \sum_{i=1}^{2} \int_0^l |u_{i_t}(x,t)|^2\,dx + \sum_{i=1}^{2} \int_0^l |u_i(x,t)|^{2(p_1+1)}\,dx \bigg\}.$$

Далее, с учётом неравенства (26), лемм 1 и 2 получим

$$z^{1/(1-\alpha)}(t) \leqslant c_{10} \bigg\{ \sum_{i=1}^{2} \int_0^l |u_{i_t}(x,t)|^2\,dx + \sum_{i=1}^{2} \int_0^l |u_i(x,t)|^{2(p(x)+1)}\,dx \bigg\}. \tag{30}$$

Из (29) и (30) имеем $z'(t) \geqslant c_{11} z^{1/(1-\alpha)}(t)$, следовательно,

$$z(t) \geqslant z_0 \bigg[z_0^{\alpha/(1-\alpha)} - \frac{c_{11}\alpha}{1-\alpha} t \bigg]^{(\alpha-1)/\alpha},$$

откуда $\lim\limits_{t\to T'-0} z(t) = +\infty$, где $T' = \dfrac{1-\alpha}{c_{11}\alpha} z_0^{\alpha/(1-\alpha)}$.

3. Доказательство существования и единственности локальных решений. Пусть $K > 0$. Определим срезанную функцию

$$f_{iK}(x,u_1,u_2) = \begin{cases} f_i(x,u_1,u_2), & \|u_1\|_{{}_0H^1} \leqslant K, \quad \|u_2\|_{{}_0H^1} \leqslant K, \\ f_i\bigg(x, K\dfrac{u_1}{\|u_1\|_{{}_0H^1}}, u_2\bigg), & \|u_1\|_{{}_0H^1} > K, \quad \|u_2\|_{{}_0H^1} \leqslant K, \\ f_i\bigg(x, u_1, K\dfrac{u_2}{\|u_2\|_{{}_0H^1}}\bigg), & \|u_1\|_{{}_0H^1} \leqslant K, \quad \|u_2\|_{{}_0H^1} > K, \\ f_i\bigg(x, K\dfrac{u_1}{\|u_1\|_{{}_0H^1}}, K\dfrac{u_2}{\|u_2\|_{{}_0H^1}}\bigg), & \|u_1\|_{{}_0H^1} > K, \quad \|u_2\|_{{}_0H^1} > K, \end{cases}$$

и рассмотрим начально-краевую задачу

$$u_{i_{tt}} - (a_i(x)u_{i_x})_x = f_{iK}(x,u_1,u_2), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u_i(0,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$a_i(l)u_{i_x}(l,t) + \chi_i(u_{i_t}(l,t)) = 0, \quad t > 0,$$

$$u_i(x,0) = u_{i0}(x), \quad u_{i_t}(x,0) = u_{i1}(x), \quad 0 < x < l,$$

где $\chi_i(\eta) = |\eta|^{r_i-1}\eta$, $i = 1,2$ (см. работы [14–18]).

В пространстве $\mathcal{H} = [{}_0H^1 \times L_2(0,l)]^2$ введём скалярное произведение следующим образом:

$$\langle w^1, w^2 \rangle = \sum_{i=1}^{2} \bigg[\int_0^l a_i(x) u_{i_x}^1(x) u_{i_x}^2(x)\,dx + \int_0^l v_i^1(x) v_i^2(x)\,dx \bigg].$$

В пространстве $L_2(0,l)$ определим линейный оператор ${}_0^i\Delta$:

$$D({}_0^i\Delta) = \{f : f \in H^2(0,l),\ f(0) = 0,\ f'(l) = 0\},$$

$${}_0^i\Delta f(x) = -(a_i(x)f_x)_x(x), \quad x \in (0,l), \quad i = 1,2.$$

Определим также линейный оператор

$$N_i : R \to H^2 : \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \to h_i = N_i\alpha,$$

где $(a_i(x)h_{i_x}(x))_x = 0$, $0 < x < l$, $h_i(0) = 0$, $h_{i_x}(l) = \alpha/a_i(l)$, т.е.

$$h_i(x) = \alpha \int\limits_0^x \frac{ds}{a_i(s)}, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда получим, что

$$(N_i\alpha)_x = \alpha \frac{1}{a_i(x)}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad i = 1, 2.$$

Использовав определение сопряжённого оператора, имеем

$$\langle N_i\alpha, u\rangle_{L_2(0,l)} = (\alpha, N_i^* u)_R = \alpha N_i^* u, \quad \text{где} \quad N_i^* u = \int\limits_0^l u(x) \int\limits_0^x \frac{ds}{a_i(s)}\, dx, \quad i = 1, 2.$$

Пусть $z \in D({}^i_0\Delta)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, тогда справедливы равенства

$$N_i^* {}^i_0\Delta z \cdot \alpha = ({}^i_0\Delta z, N_i\alpha)_{L_2(0,l)} = \left({}^i_0\Delta z, \alpha \int\limits_0^x \frac{ds}{a_i(s)}\right)_{L_2(0,l)} = z(l) \cdot \alpha.$$

В пространстве $\mathcal{H}$ определим оператор $A_K(\cdot)$ следующим образом:

$$D(A_K) = \{w : w = (u_1, v_1, u_2, v_2) \in \mathcal{H}, \ \ u_i, v_i \in {}_0H^1, \ \ u_i + N_i\chi_i(\gamma v_i) \in D({}^i_0\Delta), \ \ i = 1, 2\},$$

$$A_K(w) = \{-v_1, {}^1_0\Delta(u_1 + N_1\chi_1(\gamma v_1)), -v_2, {}^2_0\Delta(u_2 + N_2\chi_2(\gamma v_2))\},$$

где γ – оператор следа из ${}_0H^1$ в точке $x = l$ (см. [19, гл. I, с. 32–34]).

Определим также нелинейный оператор $F_K(\cdot)$:

$$D(F_K) = \mathcal{H}, \quad F_K(w) = (0, -f_{1K}(x, u_1, u_2), 0, -f_{2K}(x, u_1, u_2)).$$

Лемма 3. *Нелинейный оператор $w \to F_K(w)$: $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ удовлетворяет условию Липшица, т.е. для любых $w_1, w_2 \in \mathcal{H}$ выполнено неравенство*

$$\|F_K(w_2) - F_K(w_1)\|_{\mathcal{H}} \leqslant c_F(K)\|w_2 - w_1\|_{\mathcal{H}},$$

где $c_F(K) \geqslant 0$.

Доказательство леммы 3 проводится аналогично доказательствам работы [14].

Лемма 4. $A_K(\cdot)$ – *максимально аккретивный оператор.*

Доказательство. Пусть $w^i = (u_1^i, v_1^i, u_2^i, v_2^i) \in D(A_K)$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\langle A_K(w^2) - A_K(w^1), w^2 - w^1\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^2 \int\limits_0^l [\chi_i(v_i^2(l)) - \chi_i(v_i^1(l))](v_i^2(l) - v_i^1(l))_x\, dx =$$

$$= \sum_{i=1}^2 [\chi_i(v_i^2(l)) - \chi_i(v_i^1(l))](v_i^2(l) - v_i^1(l)) \geqslant 0.$$

Таким образом, $A_K(\cdot)$ является аккретивным оператором.

Теперь докажем, что $A_K(\cdot)$ – максимально аккретивный оператор. Рассмотрим уравнение

$$A_K(w) + \lambda w = h, \tag{31}$$

где $\lambda > 0$, $h = (h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22}) \in \mathcal{H}$ – заданный элемент, $w = (u_1, v_1, u_2, v_2) \in D(A_K)$. Очевидно, что (31) эквивалентно краевой задаче

$$-v_i + \lambda u_i = h_{i1},$$

$${}_0^i\Delta(u_i + N_i\chi_i(\gamma v_i)) + \lambda v_i = h_{i2},$$

$$u_i(0) = 0, \quad v_i(0) = 0,$$

$$u_i'(l) + \chi_i(v_i(l)) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда имеем

$$u_i = \frac{1}{\lambda}v_i + \frac{1}{\lambda}h_{i1}, \quad {}_0^i\Delta(u_i + N_i\chi_i(\gamma v_i)) + \lambda^2 u_i = \lambda h_{i1} + h_{i2}, \quad i = 1, 2.$$

Легко заметить, что функции

$$z_i = u_i + N_i\chi_i(\gamma v_i), \quad i = 1, 2, \tag{32}$$

являются решением краевой задачи

$$z_i'' - \lambda^2 z_i = \eta_i(x), \tag{33}$$

$$z_i(0) = 0, \quad z_i'(l) = 0, \tag{34}$$

где

$$\eta_i(x) = -\lambda h_{i1}(x) - h_{i2}(x) - \lambda^2 N_i\alpha_i, \quad \alpha_i = \chi_i(\gamma v_i), \quad i = 1, 2. \tag{35}$$

Отметим, что

$$z_i(x) = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^x \operatorname{sh}(\lambda(x-\tau))\eta_i(\tau)\,d\tau - \frac{1}{\lambda}\frac{\operatorname{sh}(\lambda x)}{\operatorname{ch}(\lambda l)}\int\limits_0^l \operatorname{ch}(\lambda(x-\tau))\eta_i(\tau)\,d\tau, \quad i = 1, 2,$$

являются решением задачи (33), (34). Отсюда получим

$$z_i(l) = \alpha_i\left\{\int\limits_0^l \frac{dx}{a_i(x)} - \frac{1}{\operatorname{ch}(\lambda l)}\int\limits_0^l \frac{\operatorname{ch}(\lambda\tau)}{a_i(\tau)}\,d\tau\right\} + B_i(\lambda, l), \tag{36}$$

где

$$B_i(\lambda, l) = -\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^l \operatorname{sh}(\lambda(l-\tau))\eta_{1i}(\tau)\,d\tau + \frac{1}{\lambda}\operatorname{th}(\lambda l)\int\limits_0^l \operatorname{ch}(\lambda(l-\tau))\eta_{1i}(\tau)\,d\tau, \quad i = 1, 2.$$

С другой стороны, из (32) следует, что

$$z_i(l) = u_i(l) + \alpha_i\int\limits_0^l \frac{dx}{a_i(x)} = \frac{1}{\lambda}v_i(l) + \frac{1}{\lambda}h_{i1}(l) + \alpha_i\int\limits_0^l \frac{dx}{a_i(x)}, \quad i = 1, 2. \tag{37}$$

Сравнив (36) и (37), найдём

$$\chi_i(v_i(l)) + \mathfrak{X}_i(\lambda)v_i(l) = C_i(\lambda, l),$$

где

$$\mathfrak{X}_i(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\mathrm{ch}\,(\lambda l)\biggl(\int\limits_0^l \frac{\mathrm{ch}\,(\lambda\tau)}{a_i(\tau)}\,d\tau\biggr)^{-1} > 0, \quad C_i(\lambda, l) = \mathfrak{X}_i(\lambda)\biggl\{B_i(\lambda, l) + \frac{1}{\lambda}h_{i1}(l)\biggr\}, \quad i = 1, 2.$$

Для отображения $\Phi(\xi) = (\chi_1(\xi_1) + \mathfrak{X}_1(\lambda)\xi_1, \chi_2(\xi_2) + \mathfrak{X}_2(\lambda)\xi_2)$, где $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, имеем оценку

$$\langle\Phi(\xi^2) - \Phi(\xi^1), \xi^2 - \xi^1\rangle_{R^2} = \sum_{i=1}^2[\chi_i(\xi_i^2) - \chi_i(\xi_i^1)](\xi_i^2 - \xi_i^1) + \sum_{i=1}^2[\mathfrak{X}_i(\lambda)\xi_i^2 - \mathfrak{X}_i(\lambda)\xi_i^1](\xi_i^2 - \xi_i^1) \geqslant$$

$$\geqslant v_0\sum_{i=1}^2|\xi_i^2 - \xi_i^1|^2 = v_0\|\xi^2 - \xi^1\|_{R^2}^2,$$

где $\xi^1 = (\xi_1^1, \xi_2^1)$, $\xi^2 = (\xi_1^2, \xi_2^2)$, $v_0 = \min\{\mathfrak{X}_1(\lambda), \mathfrak{X}_2(\lambda)\}$.

Таким образом, $\Phi(\cdot)$ – максимально аккретивный оператор (см. [20, гл. IV, с. 155–158; 21, гл. II, с. 33–48]. Отсюда следует, что при $\lambda > 0$ уравнение

$$F(\xi) = M(\lambda, l) \tag{38}$$

имеет решение, где $M(\lambda, l) = (C_1(\lambda, l), C_2(\lambda, l))$. Пусть $\xi^0 = (\xi_1^0, \xi_2^0) \in \mathbb{R}^2$ – решение уравнения (38). Тогда, положив $v_i(l) = \xi_i^0$, $u_i(l) = \xi_i^0 + h_{i1}(l)$, $i = 1, 2$, получим, что $\alpha_i = \chi_i(\xi_i^0)$, $i = 1, 2$. С учётом этого в равенствах (35) находим $z_i(x)$, а из (32) имеем $u_i(x) = z_i(x) - N_i\alpha_i$, $i = 1, 2$.

Таким образом, $A_K(\cdot)$ – максимально аккретивный оператор. Лемма доказана.

Задачу (1)–(4) можем записать как задачу Коши в пространстве $\mathcal{H}$:

$$w' + A_K(w) + F_K(w) = 0, \quad w(0) = w_0, \tag{39}$$

где $w_0 = (u_{10}(x), u_{11}(x), u_{20}(x), u_{21}(x))$, $0 \leqslant x \leqslant l$.

В силу теоремы 4.1 из [20] при любом $w_0 \in D(A_K)$ и $K > 0$ задача (39) имеет единственное решение $w(\cdot) \in C^1([0, T]; \mathcal{H}) \bigcap C([0, T]; D(A_K))$, а в силу теоремы 4.1A из [20] задача (39) имеет слабое решение $w(\cdot) \in C([0, T]; \mathcal{H})$, если $w_0 \in \mathcal{H}$.

Так как $A_K(\cdot)$ – максимально аккретивный оператор, то из (39) получим, что $\|w(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leqslant \leqslant \|w_0\|_{\mathcal{H}}^2 e^{2c_F(K)t}$. Отсюда следует, что $\|w(t)\|_{\mathcal{H}}^2 < K^2$, $0 \leqslant t \leqslant T'$, если $\|w_0\|_{\mathcal{H}} < K$, где

$$T' = T(\|w_0\|_{\mathcal{H}}) = \frac{1}{c_F(K)}\,\mathrm{Ln}\,\frac{K}{\|w_0\|_{\mathcal{H}}}.$$

Следовательно, $f_{iK}(x, u_1(x, t), u_2(x, t)) = f_i(x, u_1(x, t), u_2(x, t))$ при $0 \leqslant t \leqslant T'$.

Поэтому функция $u(x, t)$ является решением задачи (1)–(4) в области $(0, l) \times (0, T')$.

Для строгих решений тождество (10) доказывается прямым дифференцированием, а для слабых решений – путём аппроксимации и предельного перехода. Теоремы 1 и 2 доказаны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алиев А.Б., Шафиева Г.Х.* Разрушение решений смешанной задачи для систем волновых уравнений с граничной диссипацией и внутренним нелинейным фокусирующим источником переменного порядка роста // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 3. С. 313–325.
2. *Rauch J.* Hyperbolic Partial Differential Equations and Geometric Optics. Graduate Studies in Mathematics. V. 133. Providence, 2012.
3. *Жиков В.В.* Об эффекте Лаврентьева // Докл. РАН. 1995. Т. 345. № 1. С. 10–14.
4. *Жиков В.В.* О весовых соболевских пространствах // Мат. сб. 1998. Т. 189. № 8. С. 27–58.
5. *Корпусов М.О.* О разрушении решения одной нелинейной системы уравнений с положительной энергией // Журн. теор. и мат. физики. 2012. Т. 171. № 3. С. 355–369.

6. *Hongyinping Fenga, Shengjia Li, Xia Zhi.* Blow-up solutions for a nonlinear wave equation with boundary damping and interior source // Nonlin. Anal. 2012. V. 75. P. 2273–2280.
7. *Wenjun Liu, Yun Sun, Gang Li.* Blow-up of solutions for a nonlinear wave equation with nonnegative initial energy // Electronic J. of Differ. Equat. 2013. V. 15. P. 1–8.
8. *Diening L., Harjulehto P., Hasto P., Ruzicka M.* Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Lect. Notes Math. Heidelberg; Dordrecht; London; New York, 2017.
9. *Almeida A., Samko S.* Embeddings of variable Hajłasz–Sobolev spaces into Hölder spaces of variable order // J. Math. Anal. Appl. 2009. V. 353. № 2. P. 489–496.
10. *Kovacik O., Rakosnik J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$ // Czechoslovak Math. J. 1991. V. 41. P. 592–618.
11. *Antontsev S.* Wave equation with $p(x,t)$-laplacian and damping term: blow-up of solutions // C.R. Mecanique. 2011. V. 339. P. 751–755.
12. *Messaoudi S.A., Talahmeh A.A.* Blow-up in solutions of a quasilinear wave equation with variable-exponent nonlinearities // Math. Meth. Appl. Sci. 2017. V. 40. № 18. P. 6976–6986.
13. *Sun L., Ren Y., Gao W.* Lower and upper bounds for the blow-up time for nonlinear wave equation with variable sources // Comput. Math. Appl. 2016. V. 71. № 1. P. 267–277.
14. *Chueshov I., Eller M., Lasiecka I.* On the attractor for a semilinear wave equation with critical exponent and nonlinear boundary dissipation // Comm. in Part. Differ. Equat. 2002. V. 27. № 2. P. 1901–1951.
15. *Cavalcanti M., Domingos Cavalcanti V.N., Lasiecka I.* Well-posedness and optimal decay rates for the wave equation with nonlinear boundary damping-source interaction // J. Differ. Equat. 2007. V. 236. P. 407–459.
16. *Lasiecka I., Triggiani R., Zhang X.* Nonhomogeneous boundary value problems for second order hyperbolic operators // J. Math. Pures Appl. 1986. V. 65. № 2. P. 149–192.
17. *Lasiecka I., Triggiani R., Zhang X.* Nonconservative wave equations with unobserved Neumann B.C.: global uniqueness and observability in one shot // Contemp. Math. 2000. V. 268. P. 227–327.
18. *Lasiecka I., Tataru D.* Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping // Differ. and Integral Equat. 1993. V. 6. № 3. P. 507–533.
19. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.
20. *Showalter R.E.* Monotone Operators in Banach Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations. Mathematical Surveys and Monographs. V. 49. Providence, 1997.
21. *Barbu V.* Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces. Noordhoff, 1976.

Институт математики и механики
НАН Азербайджана, г. Баку,
Азербайджанский государственный университет
нефти и промышленности, г. Баку,
Бакинский государственный университет,
Азербайджан

Поступила в редакцию 22.12.2021 г.
После доработки 25.06.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.