ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 8, с. 1053–1061

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.952.5

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ЛИУВИЛЛЯ

© 2022 г. А. В. Псху

Рассматривается уравнение в частных производных первого порядка с дробной производной по одной из двух независимых переменных. Дробное дифференцирование задано оператором Лиувилля, определённым на бесконечном интервале и имеющим начало в минус бесконечности. Для рассматриваемого уравнения исследуется краевая задача в бесконечной полуполосе. Построено представление решения, найдены достаточные условия существования регулярных решений и доказана теорема единственности. Также показано, что решение однородного уравнения как функции одной из переменных является аналитическим.

DOI: 10.31857/S0374064122080052, EDN: CFTIVW

Введение. Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\right)u(x,y)=f(x,y), \tag{1}$$

где $\partial^\alpha/\partial y^\alpha$ – дробная производная по y порядка $\alpha\in(0,1)$.

Исследование уравнений в частных производных дробного порядка, не выше первого, началось относительно недавно, но тем не менее имеет достаточно широкую библиографию. По всей видимости, первыми работами, посвящёнными таким уравнениям, были статьи [1] и [2] (см. также [3]). В последствии для таких уравнений, а также их обобщений, рассматривались различные начальные и краевые задачи, включая задачи в многомерных областях [4, 5] и областях с криволинейной границей [6], нелокальные краевые задачи [7, 8], изучались уравнения с переменными [9, 10] и матричными [11, 12] коэффициентами, а также задачи для уравнений с операторами дробного дискретно распределённого дифференцирования [13] и операторами Джрбашяна–Нерсесяна [14, 15] и т.д.

Отметим также, что необходимость изучения уравнений вида (1) возникает при решении методом факторизации диффузионных и диффузионно-волновых уравнений дробного порядка [16]. Кроме того, такие уравнения появляются при математическом моделировании динамики численности популяций [17].

Заметим, что уравнение (1) представляет собой пример одного из самых простых уравнений в частных производных дробного порядка. В предельном случае (при $\alpha=1$) это уравнение превращается в гиперболическое уравнение первого порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)u(x,y)=f(x,y). \tag{2}$$

Эти простота и наглядность также могут служить хорошей мотивацией к изучению уравнений вида (1), проведению сравнительного анализа свойств уравнений с частными производными целого порядка с их дробными аналогами, и способствовать тем самым лучшему пониманию того, что может привнести присутствие в уравнении оператора дробного дифференцирования.

Во всех работах, указанных выше, рассматривались операторы дробного дифференцирования, определённые на конечном интервале (имеющие начало в конечных точках). В уравнении (1) рассматривается дробная производная, определённая на бесконечном интервале и имеющая начало в минус бесконечности (см. ниже).

Дифференциальные уравнения с производными дробного порядка, имеющими начало в бесконечно удалённой точке, изучались сравнительно мало. В связи с этим следует упомянуть работы [18, 19].

Как известно, начальные данные для уравнений с производными дробного порядка задаются именно в начальных точках (на линии начал). Для уравнений, содержащих операторы дробного дифференцирования, определённые на бесконечных промежутках (т.е. с началом в плюс или минус бесконечности), это приводит к необходимости вместо начального условия задавать асимптотическое поведение искомого решения, т.е. такие операторы индуцируют асимптотические задачи (задачи без начальных условий).

В данной работе рассматривается именно такая задача для уравнения (1) в бесконечной (вертикальной) полуполосе, для которой построено представление регулярного решения, найдены достаточные условия его существования и единственности. Показано, что, в отличие от соответствующих уравнений целого порядка (2) с началом в конечной точке, решение однородного уравнения (1) является аналитической функцией переменной x.

1. Дробное дифференцирование. Интеграл и производная Римана–Лиувилля порядка ζ по переменной t с началом в точке $t=s$ определяются равенствами [20, с. 11]

$$D_{st}^{\zeta}g(t)=\operatorname{sign}(t-s)\int\limits_{s}^{t}g(\eta)\frac{|t-\eta|^{-\zeta-1}}{\Gamma(-\zeta)}\,d\eta\quad(\zeta<0),\quad D_{st}^{0}g(t)=g(t),\tag{3}$$

и

$$D_{st}^{\zeta}g(t)=\operatorname{sign}^{p}(t-s)\frac{\partial^{p}}{\partial t^{p}}D_{st}^{\zeta-p}g(t)\quad(p-1<\zeta\leqslant p,\quad p\in\mathbb{N}).\tag{4}$$

При $s=\pm\infty$ операторы (3) и (4) принято называть, соответственно, *(дробными) интегралом и производной Лиувилля* [21, с. 85].

В уравнении (1) дробное дифференцирование понимается как дробная производная Лиувилля с началом в минус бесконечности, т.е.

$$\frac{\partial^{\alpha}}{\partial y^{\alpha}}u(x,y)=D_{-\infty y}^{\alpha}u(x,y)=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{y}\frac{(y-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}u(x,t)\,dt.$$

В работе также понадобятся производные Капуто (которые в последнее время все чаще называют производными Герасимова–Капуто), определяемые равенством [20, с. 11]

$$\partial_{st}^{\zeta}g(t)=\operatorname{sign}^{p}(t-s)D_{st}^{\zeta-p}\frac{\partial^{p}}{\partial t^{p}}g(t)\quad(p-1<\zeta\leqslant p,\quad p\in\mathbb{N}).$$

2. Постановка задачи. Будем рассматривать уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+D_{-\infty y}^{\alpha}\right)u(x,y)=f(x,y)\tag{5}$$

в области

$$\Omega=(r,a)\times(-\infty,b)=\{(x,y):x\in(r,a),\quad y\in(-\infty,b)\}\quad(r<a).$$

Также будем использовать обозначения

$$\Omega_r=\Omega\bigcup\{(x,y):x=r,\quad y<b\},\quad\Omega^{\varepsilon}=(r,a-\varepsilon)\times(-\infty,b-\varepsilon).$$

Определение. Будем называть функцию $u(x,y)$ *регулярным решением* уравнения (5) в области Ω, если: $u(x,y)\in C(\Omega_r)$; функция $u(x,y)$ непрерывно дифференцируема по переменной x, а функция $D_{-\infty y}^{\alpha-1}u(x,y)$ – по переменной y для всех $(x,y)\in\Omega$; $(R-y)^{-\alpha}u(x,y)$, как функция переменной y, интегрируема на множестве $(-\infty,R)$ для любых $x\in(r,a)$ и $R<b$; $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (5) в Ω.

Задача. Найти регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (5) в области Ω, удовлетворяющее условию
$$u(r,y)=\varphi(y)\quad (y<b). \tag{6}$$

3. Специальное решение. Рассмотрим функцию
$$w_\mu(x,y)=y^{\mu-1}\phi(-\alpha,\mu;-x/y^\alpha)\quad (x,y>0), \tag{7}$$
где
$$\phi(\xi,\eta;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!\Gamma(\xi k+\eta)}\quad (\xi>-1)$$
– функция Райта (см. работы [22, 23]).

Для функции Райта известны формулы дифференцирования (и интегрирования, во втором случае) [22]
$$\frac{d}{dz}\phi(\xi,\eta;z)=\phi(\xi,\eta+\xi;z) \tag{8}$$
и [3]
$$D_{0y}^{\beta}[y^{\mu-1}\phi(-\alpha,\mu;-\lambda y^{-\alpha})]=y^{\mu-\beta-1}\phi(-\alpha,\mu-\beta;-\lambda y^{-\alpha})\quad (\beta,\mu\in\mathbb{R},\quad \lambda>0).$$
Из этих формул с учётом (7) для функции $w_\mu(x,y)$ справедливы соотношения
$$\frac{\partial}{\partial x}w_\mu(x,y)=-w_{\mu-\alpha}(x,y), \tag{9}$$
$$D_{0y}^{\beta}w_\mu(x,y)=\partial_{0y}^{\beta}w_\mu(x,y)=w_{\mu-\beta}(x,y)\quad (\beta\in\mathbb{R}). \tag{10}$$
В силу обобщённой формулы Ньютона–Лейбница для операторов дробного интегрирования и дифференцирования (см., например, [20, § 1.19]) имеем
$$\frac{\partial}{\partial x}D_{0x}^{-\nu}w_\mu(x,y)=D_{0x}^{-\nu}\frac{\partial}{\partial x}w_\mu(x,y)+\frac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\frac{y^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}.$$
Отсюда с учётом (9) и (10) получим
$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+D_{0y}^{\alpha}\right)D_{0x}^{-\nu}w_\mu(x,y)=\frac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}\frac{y^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}. \tag{11}$$

Кроме того, из свойств функции Райта следуют неравенства (см. [23])
$$|w_\mu(x,y)|<Cy^{\mu-1}\exp(-\rho x^{1/(1-\alpha)}y^{-\alpha/(1-\alpha)})\quad (C=C(\alpha,\mu),\quad \rho<(1-\alpha)\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}) \tag{12}$$
и [24]
$$w_\mu(x,y)>0\quad (\mu\geqslant 0). \tag{13}$$
Из (12), в частности, следует, что
$$|w_\mu(x,y)|<Cx^{-\theta}y^{\mu+\alpha\theta-1},\quad \theta\geqslant\begin{cases}-1, & (-\mu)\in\mathbb{N}\bigcup\{0\},\\ 0, & (-\mu)\notin\mathbb{N}\bigcup\{0\},\end{cases}\quad C=C(\alpha,\mu,\theta). \tag{14}$$

Здесь и далее буквой C обозначаются положительные постоянные (вообще говоря, различные). При этом в скобках, в случае необходимости, указываются параметры, от которых зависит их выбор, например, $C=C(\alpha,\beta,\ldots)$.

4. Представление решения. Сначала докажем теорему о представлении регулярных решений уравнения (5).

Теорема 1. *Пусть* $f(x,y)\in L(\Omega^\varepsilon)$, $\varphi(y)\in L(-\infty,b-\varepsilon)$ *и*

$$\lim_{R\to-\infty}\sup_{\substack{x\in(r,a-\varepsilon)\\ y<R}}|u(x,y)|=0 \tag{15}$$

для любого достаточно малого числа $\varepsilon>0$.

Если $u(x,y)$ *– регулярное решение задачи (5) и (6), то оно представимо в виде*

$$u(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{y}\varphi(t)w_0(x-r,y-t)\,dt+\int\limits_{r}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}f(s,t)w_0(x-s,y-t)\,dt\,ds. \tag{16}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$v(x,y;s,t)=D_{xs}^{-1}w_1(x-s,y-t)\quad(s\leqslant x,\quad t\leqslant y).$$

Из (10) и (11) следует, что

$$\left(-\frac{\partial}{\partial s}+\partial_{yt}^{\alpha}\right)v(x,y;s,t)=1 \tag{17}$$

и

$$v(x,y;x,t)=0\quad(t\leqslant y),\quad v(x,y;s,y)=0\quad(s\leqslant x). \tag{18}$$

Пусть $u(x,y)$ – регулярное решение уравнения (5), $R<y$. Рассмотрим выражение

$$\int\limits_{r}^{x}\int\limits_{R}^{y}v(x,y;s,t)f(s,t)\,dt\,ds=\int\limits_{r}^{x}\int\limits_{R}^{y}v(x,y;s,t)\left[\frac{\partial}{\partial s}+D_{-\infty t}^{\alpha}\right]u(s,t)\,dt\,ds.$$

В силу (18) имеем

$$\int\limits_{r}^{x}\int\limits_{R}^{y}v(x,y;s,t)\frac{\partial}{\partial s}u(s,t)\,dt\,ds=-\int\limits_{R}^{y}v(x,y;r,t)u(r,t)\,dt-\int\limits_{r}^{x}\int\limits_{R}^{y}u(s,t)\frac{\partial}{\partial s}v(x,y;s,t)\,dt\,ds$$

и

$$\int\limits_{r}^{x}\int\limits_{R}^{y}v(x,y;s,t)D_{-\infty t}^{\alpha}u(s,t)\,dt\,ds=\int\limits_{r}^{x}\int\limits_{R}^{y}v(x,y;s,t)[D_{Rt}^{\alpha}+J^R]u(s,t)\,dt\,ds=$$

$$=\int\limits_{r}^{x}\int\limits_{R}^{y}v(x,y;s,t)J^Ru(s,t)\,dt\,ds-\int\limits_{r}^{x}\int\limits_{R}^{y}D_{Rt}^{\alpha-1}u(s,t)\frac{\partial}{\partial t}v(x,y;s,t)\,dt\,ds,$$

где

$$J^Ru(s,t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{R}\frac{u(s,\eta)\,d\eta}{(t-\eta)^{\alpha}}=\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{R}\frac{u(s,\eta)\,d\eta}{(t-\eta)^{\alpha+1}}\quad(t>R). \tag{19}$$

Здесь было использовано равенство

$$\lim_{t\to R}D_{Rt}^{\alpha-1}u(s,t)=0,$$

которое является следствием непрерывности функции $u(s,t)$ на линии $t=R$, $r\leqslant s\leqslant x$.

Теперь, использовав формулу дробного интегрирования по частям (см., например, [20, § 1.2]), получим

$$\int\limits_r^x\int\limits_R^y v(x,y;s,t)f(s,t)\,dt\,ds=\int\limits_r^x\int\limits_R^y u(s,t)\Big[-\frac{\partial}{\partial s}+\partial_{yt}^{\alpha}\Big]v(x,y;s,t)\,dt\,ds+$$

$$+\int\limits_r^x\int\limits_R^y v(x,y;s,t)J^R u(s,t)\,dt\,ds-\int\limits_R^y v(x,y;r,t)u(r,t)\,dt.$$

Продифференцировав это выражение по x и по y, с учётом (6), (10), (17) и (18) запишем равенство

$$u(x,y)=\int\limits_r^x\int\limits_R^y w_0(x-s,y-t)f(s,t)\,dt\,ds+\int\limits_R^y w_0(x-r,y-t)\varphi(t)\,dt+I,$$

где

$$I=-\int\limits_r^x\int\limits_R^y w_0(x-s,y-t)J^R u(s,t)\,dt\,ds.$$

Оценим интеграл I. Введём обозначение

$$C_R=\sup_{\substack{s\in(r,x)\\ t<R}}|u(s,t)|.$$

С учётом (10), (13) и (19) получим

$$|I|\leqslant\frac{C_R}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_r^x\int\limits_R^y w_0(x-s,y-t)(t-R)^{-\alpha}\,dt\,ds=C_R\int\limits_r^x w_{1-\alpha}(x-s,y-R)\,ds,$$

откуда в силу условия (15) следует, что $\lim\limits_{R\to-\infty}I=0$. Тем самым представление (16) доказано.

5. Единственность решения. Утверждение теоремы 1 позволяет доказать единственность решения рассматриваемой задачи.

Теорема 2. *Существует не более одного регулярного решения задачи (5) и (6) в классе функций, удовлетворяющих условию (15).*

Доказательство. Пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ – два решения задачи (5), (6) (соответствующие одной и той же правой части $f(x,y)$ и граничной функции $\varphi(y)$). Тогда функция $v(x,y)=$ $=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ является регулярным решением однородной задачи

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x}+D_{-\infty y}^{\alpha}\Big)v(x,y)=0,\quad v(r,y)=0,$$

удовлетворяющим предельному соотношению (15). В силу теоремы 1 это означает, что $v(x,y)\equiv0$, т.е. $u_1(x,y)\equiv u_2(x,y)$.

6. Теорема существования решения. Из теоремы 1, вообще говоря, не следует, что любая функция вида (16) априори является решением задачи (5) и (6). Для того чтобы это имело место, необходимы дополнительные условия на правую часть $f(x,y)$ и граничную функцию $\varphi(y)$.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi(y)\in C(-\infty,b)\bigcap L(-\infty,b-\varepsilon)$, $f(x,y)\in C(\Omega_r)\bigcap L(\Omega^{\varepsilon})$,

$$\lim_{y\to-\infty}(-y)^{\delta}\varphi(y)=0\quad(\delta>1-\alpha)\tag{20}$$

и функция $f(x,y)$ *представима в виде*

$$f(x,y) = D_{rx}^{-\xi} D_{-\infty y}^{-\eta} g(x,y) \quad (\xi > 0, \quad \eta > 0), \tag{21}$$

где $g(x,y) \in L(\Omega^\varepsilon)$, $(x-r)^\mu g(x,y) \in C(\Omega_r)$ *и*

$$\sup\{(x-r)^\mu (b-y)^\nu |g(x,y)| : (x,y) \in \Omega^\varepsilon\} \leqslant C \quad (C = C(\varepsilon)) \tag{22}$$

для некоторых $\mu < \xi$, $\nu > \eta + 1$ *и любого достаточно малого* $\varepsilon > 0$.

Тогда функция $u(x,y)$, *определённая равенством (16), является регулярным решением задачи (5) и (6).*

Доказательство. Введём следующие обозначения:

$$\Phi(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{y} \varphi(t) w_0(x-r, y-t)\, dt, \quad F(x,y) = \int\limits_{r}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(s,t) w_0(x-s, y-t)\, dt\, ds.$$

Прежде всего отметим, что из неравенства (14) следует оценка

$$|D_{xs}^{-\xi} w_\eta(x-s, y-t)| \leqslant C(x-s)^{\xi-\theta}(y-t)^{\eta+\alpha\theta-1}$$

для любого $\theta \in [0,1)$. Отсюда в силу (21) и (22) получим

$$|F(x,y)| \leqslant \int\limits_{r}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} |g(s,t) D_{xs}^{-\xi} w_\eta(x-s, y-t)|\, dt\, ds \leqslant C \int\limits_{r}^{x} (s-r)^{-\mu}(x-s)^{\xi-\theta}\, ds \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{y} (b-t)^{-\nu}(y-t)^{\eta+\alpha\theta-1}\, dt \leqslant C(x-r)^{\xi-\mu-\theta+1}(b-y)^{\eta+\alpha\theta-\nu}. \tag{23}$$

Кроме того, с учётом условия (20) нетрудно заметить, что

$$|\Phi(x,y)| \leqslant C \int\limits_{-\infty}^{y} (b-t)^{-\delta} w_0(x-r, y-t)\, dt = C \int\limits_{0}^{\infty} (b-y+t)^{-\delta} w_0(x-r, t)\, dt \leqslant C(b-y)^{-\delta}.$$

Из (23) и последнего неравенства следует, что $(R-y)^{-\alpha} u(x,y) \in L(-\infty, R)$ (как функция y) для любых $x \in (r,a)$ и $R < b$.

Далее, приняв во внимание (10), (11), (12) и (14), можно непосредственно проверить, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + D_{-\infty y}^{\alpha}\right) \Phi(x,y) = 0. \tag{24}$$

Аналогично с учётом равенств (10), (11), (22) и формулы дробного интегрирования по частям имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + D_{-\infty y}^{\alpha}\right) F(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + D_{-\infty y}^{\alpha}\right) \int\limits_{r}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} g(s,t) D_{xs}^{-\xi} w_\eta(x-s, y-t)\, dt\, ds =$$

$$= \int\limits_{r}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} g(s,t) \left(-\frac{\partial}{\partial s} + D_{yt}^{\alpha}\right) D_{xs}^{-\xi} w_\eta(x-s, y-t)\, dt\, ds = \int\limits_{r}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} g(s,t) \frac{(x-s)^{\xi-1}(y-t)^{\eta-1}}{\Gamma(\xi)\Gamma(\eta)}\, dt\, ds.$$

Отсюда в силу (21) получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+D^{\alpha}_{-\infty y}\right)F(x,y)=f(x,y)$$

Это равенство вместе с (24) доказывает, что функция $u(x,y)$, определённая формулой (16), является решением уравнения (5).

Проверим выполнение условия (6). Из неравенства (23) следует предельное соотношение

$$\lim_{x\to r}F(x,y)=0\quad (y<b).$$

Поэтому для завершения доказательства теоремы необходимо показать, что

$$\lim_{x\to r}\Phi(x,y)=\varphi(y). \tag{25}$$

Для доказательства предельного равенства (25) рассмотрим выражение

$$\Phi(x,y)=\left(\int\limits_{-\infty}^{y-\varepsilon}+\int\limits_{y-\varepsilon}^{y}\right)[\varphi(t)-\varphi(y)]w_0(x-r,y-t)\,dt+\varphi(y)\int\limits_{-\infty}^{y}w_0(x-r,y-t)\,dt=I_1+I_2+\varphi(y)I_3.$$

Из оценки (12) следует, что $\lim\limits_{x\to r}I_1=0$. Для интеграла I_2 имеем $|I_2|\leqslant C\sup\limits_{t\in(y-\varepsilon,y)}|\varphi(t)-\varphi(y)|$. Из произвольности выбора ε и непрерывности функции $\varphi(y)$ следует, что $\lim\limits_{x\to r}I_2=0$. И, наконец, из соотношения (10) получим

$$\int\limits_{-\infty}^{y}w_0(x-r,y-t)\,dt=\int\limits_{0}^{\infty}w_0(x-r,t)\,dt=\lim_{z\to\infty}\int\limits_{0}^{z}w_0(x-r,t)\,dt=\lim_{z\to\infty}w_1(x-r,z)=1.$$

Это подтверждает справедливость (25) и завершает доказательство теоремы.

7. Аналитичность решений. Докажем аналитичность по x решения однородного уравнения (5).

Лемма. *Пусть $\varphi(y)\in L(-\infty,b-\varepsilon)$. Всякое регулярное в области Ω решение уравнения*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+D^{\alpha}_{-\infty y}\right)u(x,y)=0, \tag{26}$$

удовлетворяющее условиям (6) и (15), может быть представлено в виде

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}d_k(y)(x-x_0)^k\quad (r<x_0<a), \tag{27}$$

где

$$d_k(y)=\frac{(-1)^k}{k!}\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(y-t)w_{-\alpha k}(x_0-r,t)\,dt,$$

причём

$$|d_k(y)|\leqslant C\xi^k \tag{28}$$

для некоторых $\xi>0$ и $C=C(\alpha,x_0)$.

Доказательство. С учётом равенств (7) и (8) запишем разложение в ряд Тейлора функции $w_\mu(x-r,t)$ по степеням $(x-x_0)$:

$$w_\mu(x-r,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(x-x_0)^k w_{\mu-\alpha k}(x_0-r,t)\quad (t>0). \tag{29}$$

Из свойств функции Райта (см. [25, формула (2.2.85)]) следует, что

$$|w_{\mu-\alpha k}(x_0-r,t)|\leqslant C\xi^k\Gamma\left(\frac{1-\mu}{\alpha}+k\right)w_1(x_1-r,t)\quad (\mu<1),$$

где $x_1\in(r,x_0)$, а $C=C(\alpha,\mu)$ и $\xi=\xi(\alpha,\mu,x_1)$ – положительные константы, не зависящие от x и t. Из этой оценки следует, что по крайней мере при $\mu<1$ ряд (29) имеет положительный радиус сходимости, причём в силу неравенства (12) ряд сходится равномерно на множестве $t\in[0,\infty)$.

Далее запишем решение уравнения (26) с учётом (16) в виде

$$u(x,y)=\int\limits_0^\infty \varphi(y-t)w_0(x-r,t)\,dt.$$

Подставив в последнее равенство разложение (29) и приняв во внимание (12), после некоторых преобразований получим (27) и (28). Лемма доказана.

Из леммы, в частности, следует, что решения уравнения (26) являются аналитическими функциями переменной x для каждого $y<b$, и это никак не связано с гладкостью $\varphi(y)$.

Отметим, что таким свойством решения уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+D^\alpha_{cy}\right)u(x,y)=0$$

(в случае конечного c), также как и решения уравнения (2), не обладают.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Clément Ph., Gripenberg G., Londen S-O.* Schauder estimates for equations with fractional derivatives // Trans. of the American Math. Soc. 2000. V. 352. № 5. P. 2239–2260.
2. *Псху А.В.* Решение краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. акад. наук. 2000. Т. 5. № 1. С. 45–53.
3. *Псху А.В.* Решение краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 8. С. 1092–1099.
4. *Псху А.В.* Краевая задача для многомерного дифференциального уравнения дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 3. С. 385–395.
5. *Псху А.В.* О продолжении решений дифференциального уравнения в частных производных дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 1. С. 133–136.
6. *Псху А.В.* О краевой задаче для уравнения в частных производных дробного порядка в области с криволинейной границей // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 8. С. 1076–1082.
7. *Богатырева Ф.Т.* Краевая задача с интегральным условием Самарского для уравнения в частных производных первого порядка // Изв. Кабардино-Балкарского науч. центра РАН. 2017. № 6-1 (80). С. 10–14.
8. *Мамчуев М.О.* Нелокальная краевая задача для системы уравнений с частными производными дробного порядка // Мат. заметки Северо-Восточного федерал. ун-та. 2019. Т. 26. № 1. С. 23–31.
9. *Псху А.В.* Краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными дробного порядка // Изв. Кабардино-Балкарского науч. центра РАН. 2002. № 1 (8). С. 76–78.
10. *Мамчуев М.О.* Краевая задача для уравнения первого порядка с частной производной дробного порядка с переменными коэффициентами // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. акад. наук. 2009. Т. 11. № 1. С. 32–35.

11. *Мамчуев М.О.* Краевая задача для системы уравнений с частными производными дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 12. С. 1674–1686.
12. *Мамчуев М.О.* Краевая задача для многомерной системы уравнений с дробными производными Римана–Лиувилля // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 732–747.
13. *Псху А.В.* Краевая задача для уравнения в частных производных первого порядка с оператором дробного дискретно распределённого дифференцирования // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 12. С. 1682–1694.
14. *Богатырева Ф.Т.* Краевая задача для уравнения в частных производных первого порядка с оператором Джрбашяна–Нерсесяна // Докл. Адыгской (Черкесской) Междунар. акад. наук. 2015. Т. 15. № 1. С. 9–16.
15. *Богатырева Ф.Т.* Краевые задачи для уравнения в частных производных первого порядка с операторами Джрбашяна–Нерсесяна // Челябинский физ.-мат. журн. 2021. Т. 6. № 4. С. 403–416.
16. *Псху А.В.* Решение первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 9. С. 1286–1289.
17. *Лосанова Ф.М., Кенетова Р.О.* Нелокальная задача для обобщённого уравнения Маккендрика фон Фёрстера с оператором Капуто // Нелинейный мир. 2018. Т. 16. № 1. С. 49–53.
18. *Kilbas A.A., Pierantozzi T., Trujillo J.J., V'azquez L.* On the solution of fractional evolution equations // J. Phys. A: Math. Gen. 2004. V. 37. P. 3271–3283.
19. *Pskhu A.V., Rekhviashvili S.Sh.* Fractional diffusion-wave equation with application in electrodynamics // Mathematics. 2020. V. 8. № 11. P. 2086.
20. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М., 2003.
21. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.
22. *Wright E.M.* On the coefficients of power series having exponential singularities // J. London Math. Soc. 1933. V. s1-8. № 1. P. 71–79.
23. *Wright E.M.* The generalized Bessel function of order greater than one // Quart. J. Math. Oxford Ser. 1940. V. 11. № 1. P. 36–48.
24. *Stanković B.* On the function of E.M. Wright // Publications de L'institut Mathématique. Beograde. 1970. V. 10. № 24. P. 113–124.
25. *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М., 2005.

Институт прикладной математики и автоматизации
Кабардино-Балкарского научного центра РАН,
г. Нальчик

Поступила в редакцию 28.04.2022 г.
После доработки 28.04.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.