ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 8, с. 1062–1072

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.956.35

О СУЩЕСТВОВАНИИ СЧЁТНОГО ЧИСЛА ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ С ОДНОРОДНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

© 2022 г. И. А. Рудаков

Доказано существование бесконечного числа периодических решений квазилинейного уравнения колебаний балки, если нелинейное слагаемое является однородной нечётной функцией, имеющей степенной рост. Граничные условия соответствуют случаям шарнирно опирающимся и упруго закреплённым концам.

DOI: 10.31857/S0374064122080064, EDN: CFUKPN

Введение. Рассмотрим задачу о периодических решениях квазилинейного уравнения

$$u_{tt}+u_{xxxx}-au_{xx}+s(x,t)|u|^{r-2}u=0,\quad 0<x<\pi,\quad t\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u(x,t+T)=u(x,t),\quad 0<x<\pi,\quad t\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Допустим, что выполнено одно из двух граничных условий

$$u(0,t)=u_{xx}(0,t)=u(\pi,t)=u_{xx}(\pi,t)=0,\quad t\in\mathbb{R}, \tag{3}$$

$$u(0,t)=u_{xx}(0,t)=u(\pi,t)=u_{xx}(\pi,t)+hu_x(\pi,t)=0,\quad t\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Константы h, a являются положительными, функция $s(x,t)$ в уравнении (1) T-периодична по времени. Константа r в показателе степени нелинейного слагаемого уравнения (1) удовлетворяет условию $r>2$.

Уравнение (1) есть математическая модель колебаний проводов и балки [1, с. 439]. Граничные условия (3) соответствуют случаю шарнирно опирающихся концов, граничное условие (4) соответствует случаю, когда правый конец балки удерживается специальным пружинным устройством (см. [2]). При $a=0$ (что соответствует условию отсутствия растяжения вдоль горизонтальной оси) задача о периодических и квазипериодических решениях уравнения (1) исследовалась во многих работах, например, [2–9]. В статье [10] при $a>0$ доказано существование периодического решения малой амплитуды в случае граничных условий (3), когда нелинейное слагаемое удовлетворяет условию Липшица. В работе [11] также исследовалась задача о периодических решениях уравнения (1) при $a>0$ с граничными условиями (3). Здесь при выполнении условий M. Yamaguchi [10] для константы a доказано существование бесконечного числа периодических решений в случае, когда нелинейное слагаемое имеет степенной рост. В [12] рассмотрено уравнение (1) также со значениями $a>0$ и граничными условиями

$$u(0,t)=u_{xx}(0,t)=u(\pi,t)=u_x(\pi,t)=0, \tag{5}$$

соответствующими случаю жёстко закреплённого правого конца. Получены условия существования периодического решения в случае резонанса на произвольном собственном значении дифференциального оператора.

При исследовании задач (1)–(3); (1), (2), (4) возникает так называемая проблема “малых знаменателей”. В связи с этим для собственных значений соответствующей задачи Штурма–Лиувилля удобно представление (7.2) из работы [13]:

$$\lambda_n=(n+m_0+\kappa+O(1/n))^4,\quad m_0\in\mathbb{Z},\quad n\to\infty.$$

Для граничных условий (3)–(5) константа $\varkappa$ (“спектральный сдвиг”) согласно [13] принимает соответственно значения $0, 0, 1/4$. Для обоснования возможности обращения дифференциального оператора $D = \partial_{tt} + \partial_{xxxx} - a\partial_{xx}$ на дополнении к ядру потребовался первый член асимптотики (вывод см. в п. 1) слагаемого $O(1/n)$ в формуле (7.2) из работы [13]:

$$O(1/n) = \left(\frac{a}{4} + \frac{h}{2\pi}\right)\frac{1}{n} + o(1/n)$$

для граничных условий (4). Следствием формул (2.10), (2.12) из статьи [12] является тот факт, что при выполнении граничных условий (5) справедливо равенство

$$O(1/n) = \frac{a}{4n} + o(1/n).$$

Такое же представление для $O(1/n)$ имеет место и в случае граничных условий (3), что позволило получить значительно менее жёсткое условие (8) на константу a, чем условия M. Yamaguchi [10, 11].

Основным результатом данной работы является теорема о существовании счётного числа решений задач (1)–(3); (1), (2), (4). Статья организована следующим образом. В п. 1 исследуется соответствующая задача Штурма–Лиувилля на собственные функции и собственные значения и строится ортонормированная в пространстве L_2 система функций. Решения задач (1)–(3); (1), (2), (4) будут представлены в виде ряда Фурье по этой системе. В п. 2 рассматриваются свойства дифференциального оператора D с соответствующими граничными условиями. В п. 3 приведено доказательство основной теоремы, опирающееся на вариационный метод.

Обозначим $\Omega = [0,\pi] \times \mathbb{R}/(T\mathbb{Z})$; $(u,v) = \int_\Omega u(x,t)v(x,t)\,dx\,dt$, если $u \in L_p(\Omega)$, $v \in L_q(\Omega)$, $p > 1$, $q = p/(p-1)$; $\|u\|_p = \|u\|_{L_p(\Omega)}$, $\|u\| = \|u\|_2$.

Будем предполагать выполнение следующих условий:

$$T = 2\pi\frac{b}{c}, \quad b, c \in \mathbb{N}, \quad \text{НОД}\,(b,c) = 1, \tag{6}$$

$$\text{функция } s(x,t) \in C^1(\Omega) \text{ является } T\text{-периодичной по } t, \tag{7}$$

$$s(x,t) > 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \Omega. \tag{8}$$

При исследовании граничных условий (3) потребуем выполнения неравенств

$$a > 0, \quad \frac{1}{2}ab \notin \mathbb{N}; \tag{9}$$

в случае граничных условий (4) – выполнения условий

$$a > 0, \quad b\left(\frac{1}{2}a + \frac{h}{\pi}\right) \notin \mathbb{N}. \tag{10}$$

Пусть $H_1(\Omega) = W_2^1(\Omega)$, $H_2(\Omega) = W_2^2(\Omega)$ есть пространства Соболева. Обозначим

$$W_1 = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \varphi(0,t) = \varphi_{xx}(0,t) = 0, \quad \varphi(\pi,t) = \varphi_{xx}(\pi,t) = 0 \text{ для любого } t\},$$

$$W_2 = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \varphi(0,t) = \varphi_{xx}(0,t) = 0, \quad \varphi(\pi,t) = \varphi_{xx}(\pi,t) + hu_x(\pi,t) = 0 \text{ для любого } t\}.$$

Определение. *Обобщённым решением* задач (1)–(3) и (1), (2), (4) называется функция $u \in L_r(\Omega)$, удовлетворяющая равенству

$$\int\limits_\Omega (u(\psi_{tt} + \psi_{xxxx} - a\psi_{xx}) + s(x,t)|u|^{r-2}u\psi)\,dx\,dt = 0$$

для любой функции $\psi \in W_1$ и $\psi \in W_2$ соответственно.

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема. *Предположим, что выполнены либо условия (6)–(9), либо условия (6)–(8), (10). Тогда, соответственно, для любого* $d>0$ *задачи (1)–(3) и (1), (2), (4) имеют обобщённое решение*

$$u \in H_2(\Omega)\bigcap C^1(\Omega) \tag{11}$$

такое, что $\|u\|_r \geqslant d$, $u_{xx}\in C(\Omega)$, *и граничные условия выполнены в классическом смысле.*

1. Свойства решений линейного уравнения. При исследовании нелинейного уравнения (1) будем использовать свойства дифференциального оператора этого уравнения. Для их изучения рассмотрим соответствующее линейное уравнение

$$u_{tt}+u_{xxxx}-au_{xx}=f(x,t),$$

в котором функция u удовлетворяет либо условиям (2), (3), либо условиям (2), (4). Соответствующая уравнению (1) задача Штурма–Лиувилля на нахождение собственных значений имеет вид

$$Y''''-aY''=\lambda Y,\quad 0<x<\pi, \tag{12}$$

где функция $Y(x)$ удовлетворяет одному из граничных условий:

$$Y(0)=Y''(0)=Y(\pi)=Y''(\pi)=0, \tag{13}$$

$$Y(0)=Y''(0)=Y(\pi)=Y''(\pi)+hY'(\pi)=0. \tag{14}$$

Собственные значения задачи (12), (13) имеют вид (см. [11]) $\lambda_{1,n}=n^4+an^2$, $n\in\mathbb{N}$, а соответствующие им нормированные в пространстве $L_2(0,\pi)$ функции определяются по формуле

$$Y_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx). \tag{15}$$

Легко видеть, что имеет место равенство

$$(\sqrt[4]{n^4+an^2}-n)n=\frac{a}{4}(1+O(1/n^2)),$$

поэтому для собственных значений будем иметь представление

$$\lambda_{1,n}=\left(n+\frac{a}{4n}+O(1/n^3)\right)^4. \tag{16}$$

Рассмотрим задачу (12), (14) с положительной константой h в условии (14). Умножив уравнение (12) на $Y(x)$ и проинтегрировав полученное соотношение по отрезку $[0,\pi]$, выведем равенство

$$h(Y'(\pi))^2+\int\limits_0^\pi((y''(x))^2(x)+a(Y'(x))^2)\,dx=\lambda\int\limits_0^\pi Y^2(x)\,dx.$$

Отсюда следует, что $\lambda\geqslant 0$. Если предположить, что $\lambda=0$, то из полученного тождества вытекает $Y'(x)\equiv 0$. Тогда с учётом граничных условий (12) получим $\lambda>0$. При $\lambda>0$ общее решение дифференциального уравнения (12) имеет вид

$$Y=C_1\sin(px)+C_2\cos(px)+C_3\,\mathrm{sh}\,(qx)+C_4\,\mathrm{ch}\,(qx),$$

где

$$p=\left(\left(\frac{a^2}{4}+\lambda\right)^{1/2}-\frac{a}{2}\right)^{1/2},\quad q=\left(\left(\frac{a^2}{4}+\lambda\right)^{1/2}+\frac{a}{2}\right)^{1/2}$$

и числа $\pm pi$, $\pm q$ являются корнями характеристического уравнения. Использовав граничные условия (14), запишем уравнение, которому удовлетворяет собственное значение λ:

$$\operatorname{ctg}(p\pi) = f(p). \tag{17}$$

Здесь

$$f(p) = \frac{1}{h}\left(2p + \frac{a}{p}\right) + \frac{q}{p}\operatorname{cth}(q\pi).$$

Так как $q^2 = p^2 + a$, то

$$f'(p) = \frac{2}{h} - \frac{a}{hp^2} - \frac{a}{p^2\sqrt{p^2+a}}\operatorname{cth}(\pi\sqrt{p^2+a}) + \frac{\pi}{\operatorname{sh}^2(\pi\sqrt{p^2+a})}.$$

Отсюда следует, что при достаточно большом $p_0 > 0$ функция $f(p)$ возрастает на промежутке $[p_0, +\infty)$. Обозначим $F(p) = \operatorname{ctg}(p\pi) - f(p)$. Поскольку для любого числа $n \in \mathbb{Z}_+ \equiv \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ имеем $F(n+1/2) = -f(n+1/2) < 0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} F(n+\varepsilon) = +\infty$, то на интервалах $I_n \equiv (n, n+1/2)$ уравнение (17) имеет решение. Легко видеть, что при $p > 0$ вне интервалов I_n функция F принимает отрицательные значения и уравнение (17) не имеет решений. При $p > p_0$ на интервале I_n функция $f(p)$ возрастает, а $\operatorname{ctg}(p\pi)$ убывает, поэтому на интервале I_n уравнение (17) имеет единственное решение p_n. Если положить $p_n = n + \tau_n$ $(\tau_n \in (0, 1/2))$, то из (17) получим соотношение

$$\operatorname{tg}(\pi\tau_n) = h\left(2(n+\tau_n) + \frac{a}{n+\tau_n} + h\frac{\sqrt{(n+\tau_n)^2+a}}{n+\tau_n}\operatorname{cth}(\pi\sqrt{(n+\tau_n)^2+a})\right)^{-1},$$

из которого и из (17) выведем равенства

$$\lim_{n\to\infty} n\tau_n = \frac{h}{2\pi}, \quad \tau_n = \frac{h}{2\pi}\frac{1}{n} + o(1/n).$$

Обозначим $n_0 = [p_0] + 1$. Таким образом, при $n \geqslant n_0$, $n \in \mathbb{N}$, на каждом интервале $I_n = (n, n+1/2)$ существует единственный корень p_n уравнения (17), которому соответствует собственное значение $\overline{\lambda}_n$ задачи (12), (14):

$$\overline{\lambda}_n = \left(n + \frac{h}{2\pi}\frac{1}{n} + o(1/n)\right)^4 + a\left(n + \frac{h}{2\pi}\frac{1}{n} + o(1/n)\right)^2. \tag{18}$$

Удобно будет также представление собственных значений $\overline{\lambda}_n$ по формуле (7.2) работы [13]:

$$\overline{\lambda}_n = (n + O(1/n))^4. \tag{19}$$

Использовав равенство (18), вычислим

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[4]{\overline{\lambda}_n} - n\right)n = \frac{1}{4}a + \frac{h}{2\pi},$$

откуда следует

$$\overline{\lambda}_n = \left(n + \left(\frac{1}{4}a + \frac{h}{2\pi}\right)\frac{1}{n} + o(1/n)\right)^4. \tag{20}$$

В равенстве (20) записан первый член асимптотики слагаемого $O(1/n)$ в формуле (19).

На промежутке $(0, n_0]$ задача (12), (14) имеет конечное число собственных значений [14, с. 78]. Пусть на промежутке $(0, n_0]$ имеется m $(m \in \mathbb{Z}_+ \equiv \mathbb{N}\bigcup\{0\})$ собственных значений задачи (12), (14) с учётом их кратностей. Обозначим через $\{\lambda_{2,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ соответственно множества всех собственных значений задачи (12), (14), пронумерованных в порядке возрастания, и соответствующих им собственных функций. Система функций $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является полной (см. [14, с. 91]) в $L_2(0,\pi)$. Из формулы (20) следует, что при $n\geqslant m+1$ имеет место следующее представление:

$$\lambda_{2,n}=\left(n+n_0-m-1+\left(\frac{1}{4}a+\frac{h}{2\pi}\right)\frac{1}{n}+o(1/n)\right)^4. \tag{21}$$

Соответствующие $\{\lambda_{2,n}\}$ собственные функции при $n\geqslant m+1$ имеют вид

$$Y_n=A_n\left(\sin(\overline{p}_n x)-\sin(\overline{p}_n\pi)\frac{\operatorname{sh}(\overline{q}_n x)}{\operatorname{sh}(\overline{q}_n\pi)}\right). \tag{22}$$

Здесь $\overline{p}_n=\overline{n}+\tau_{\overline{n}}$, $\overline{q}_n=\sqrt{\overline{p}_n^2+a}$, $\overline{n}=n+n_0-m-1$. Если выбрать множители A_n с учётом условия нормировки $\|Y_n\|=1$, то будем иметь представление

$$A_n=\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}+O(1/n)}\right)^{-1}.$$

Решения задач (1)–(3); (1), (2), (4) представим в виде ряда Фурье по следующей полной и ортонормированной в $L_2(\Omega)$ системе функций:

$$\left\{\sqrt{\frac{c}{\pi b}}Y_n(x)\cos\left(\frac{c}{b}kt\right),\sqrt{\frac{c}{\pi b}}Y_n(x)\sin\left(\frac{c}{b}kt\right),\sqrt{\frac{c}{2\pi b}}Y_n(x)\right\}_{n,k\in\mathbb{N}}, \tag{23}$$

в которой функции $Y_n(x)$ выражаются либо формулой (15), либо формулой (22), в соответствии с рассматриваемой задачей.

2. Исследование дифференциального оператора уравнения (1). Обозначим через $\overline{L}_i: L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)$, $i\in\{1,2\}$, дифференциальные операторы, областью определения которых являются множества W_i соответственно, и $\overline{L}_i v=v_{tt}+v_{xxxx}-av_{xx}$ при $v\in W_i$. Пусть L_i есть сопряжённые к $\overline{L}_i$ в $L_2(\Omega)$ операторы ($L_i=\overline{L}_i^*$). Операторы L_i, $i\in\{1,2\}$, являются самосопряжёнными в $L_2(\Omega)$. Обозначим через $N(L_i)$, $R(L_i)$ ядро и образ операторов L_i соответственно.

Функции системы (23) являются собственными функциями операторов $\overline{L}_i$, L_i. Соответствующие им собственные значения имеют вид

$$\mu_{i,nk}=\lambda_{i,n}-\frac{c^2}{b^2}k^2,\quad n\in\mathbb{N},\quad k\in\mathbb{Z}_+.$$

Лемма. *Предположим, что выполнено либо условие (9), либо условие (10). Тогда ядра $N(L_i)$ соответствующих операторов L_i являются конечномерными, и операторы $L_i^{-1}: R(L_i)\to R(L_i)$ вполне непрерывны.*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения достаточно проверить, что имеется не более конечного числа собственных значений $\mu_{i,nk}$, равных нулю. Обозначим $Q_{nk}^i=|b\sqrt{\lambda_{i,n}}-ck|$, $i\in\{1,2\}$. Из формул (16), (20) выведем

$$Q_{nk}^i=|j_{i,nk}+R_i(a,b)+\gamma_{i,n}|,$$

где

$$j_{1,nk}=bn^2-ck,\quad j_{2,nk}=b(n+n_0-m+1)^2-ck,\quad \gamma_{i,n}=o(1),$$

$$R_1(a,b)=\frac{1}{2}ab,\quad R_2(a,b)=b\left(\frac{1}{2}a+\frac{h}{\pi}\right).$$

Из условий (9), (10) следует существование натуральных чисел $l_i, i \in \{1,2\}$ таких, что $R_i(a,b) \in (l_i-1, l_i)$. Обозначим

$$\varepsilon_{1,0} = \min\left(\frac{1}{2}ab - l_1 + 1, l_1 - \frac{1}{2}ab\right), \quad \varepsilon_{2,0} = \min\left(b\left(\frac{1}{2}a + \frac{h}{\pi}\right) - l_2 + 1, l_2 - b\left(\frac{1}{2}a + \frac{h}{\pi}\right)\right).$$

Поскольку $j_{i,nk} \in \mathbb{Z}$, $\gamma_{i,n} = o(1)$, то найдутся натуральные числа $n_{i,o}$ такие, что $|\gamma_{i,n}| < \varepsilon_{i,0}/2$ при $n \geqslant n_{i,0}$. Следовательно, при $n \geqslant n_{i,0}$ будут иметь место неравенства

$$|Q^i_{nk}| \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon_{i,0}, \quad |\mu_{i,nk}| \geqslant \frac{1}{2b^2}\varepsilon_{i,0}(b\sqrt{\lambda_{i,n}} + ck), \quad i \in \{1,2\}. \tag{24}$$

Из (24) следует, что равенства $\mu_{i,nk} = 0$ могут выполняться не более чем для конечного числа пар $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}_+$. Поэтому $\dim\ker L_i < \infty$.

Для доказательства второго утверждения достаточно доказать сходимость рядов

$$S_i = \sum_{n=n_i}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\mu^2_{i,nk}}.$$

Обозначим $z_{i,n} = b\sqrt{\lambda_{i,n}}/c$, $k_{i,n} = [z_{i,n}]$, $\delta_{i,n} = \{z_{i,n}\}$. Из (24) следует оценка

$$|m - z_{i,n}| \geqslant \frac{1}{2c}\varepsilon_{i,0}, \quad \delta_{i,n} \geqslant \frac{1}{2c}\varepsilon_{i,0} \quad \text{для любых} \quad n \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{Z}_+. \tag{25}$$

Следовательно,

$$S_i = \sum_{n=n_1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(b\sqrt{\lambda_{i,n}} - ck)^2(b\sqrt{\lambda_{i,n}} + ck)^2} \leqslant \frac{1}{b^2c^2}\sum_{n=n_1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{i,n}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k - z_{i,n})^2}\right).$$

Использовав (25), выведем неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k - z_{i,n})^2} < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k - (1-\delta_{i,n}))^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k - \delta_{i,n})^2} <$$

$$< \frac{1}{(1-\delta_{i,n})^2} + \int\limits_1^{\infty}\frac{1}{(x - (1-\delta_{i,n}))^2}\,dx + \frac{1}{\delta^2_{i,n}} + \int\limits_1^{\infty}\frac{1}{(x - \delta_{i,n})^2}\,dx \leqslant 4c\frac{\varepsilon_{i,0}+1}{\varepsilon^2_{i,0}}.$$

Отсюда и из формул (16), (21) следует $S_i < \infty$. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы. Рассмотрим функционал

$$J(u) = \int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2}u^2_{xx} + \frac{a}{2}u^2_x - \frac{1}{2}u^2_t + \frac{1}{r}s(x,t)|u|^r\right)dx\,dt,$$

определённый на подпространствах $S_{i,k}$ $(k \in \mathbb{N})$ пространства $L_2(\Omega)$, имеющих базис

$$\left\{Y_l(x)\cos\left(\frac{c}{b}jt\right), Y_l(x)\sin\left(\frac{c}{b}jt\right), Y_l(x) : 1 \leqslant j,l \leqslant k\right\}.$$

Докажем существование критических точек функционалов J на $S_{i,k}$ с помощью метода работы [3]. Представим подпространства $S_{i,k}$ в виде прямой суммы подпространств $S^d_{i,l}$, $S^d_{i,g}$, базисами в которых являются соответственно следующие системы функций:

$$\left\{Y_l(x)\cos\left(\frac{c}{b}jt\right), Y_l(x)\sin\left(\frac{c}{b}jt\right), Y_l(x) : \mu_{i,lj} \leqslant d, \quad 1 \leqslant j,l \leqslant k\right\},$$

$$\left\{Y_l(x)\cos\left(\frac{c}{b}jt\right), Y_l(x)\sin\left(\frac{c}{b}jt\right), Y_l(x) : \mu_{i,lj} > d, \quad 1 \leqslant j,l \leqslant k\right\}.$$

Через a_{lj}, b_{lj} обозначим коэффициенты разложения функции $u \in L_2(\Omega)$ в ряд Фурье по системе (23). С помощью неравенств Хаусдорфа–Юнга и Гёльдера стандартно доказывается существование констант $z_0 \in (0,1)$, $C_0 \in (0,\infty)$, не зависящих от $k, i \in \{0,1\}$, таких, что

$$\|u\|_r^2 \leqslant C_0 \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=0}^{k} |\mu_{i,lj}|^{z_0} (a_{lj}^2 + b_{lj}^2) \quad \text{для всех} \quad u \in S_{i,k} \bigcap R(L_i). \tag{26}$$

Введём обозначения:

$$s_0 = \max_{\Omega} s(x,t), \quad s_1 = \min_{\Omega} s(x,t),$$

$$U_k = \left\{ v = \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=0}^{k} Y_l \left(a_{lj} \cos\left(\frac{c}{b} jt\right) + b_{lj} \sin\left(\frac{c}{b} jt\right)\right) : \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{k} |\mu_{i,lj}|^{z_0} (a_{lj}^2 + b_{lj}^2) = 1 \right\}.$$

Использовав (26), оценим значения функционала J на множествах $U_k \bigcap S_{i,l}^{-d}$, $d > 0$:

$$J(u) \leqslant -\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=0}^{k} |\mu_{i,lj}| (a_{lj}^2 + b_{lj}^2) + \frac{s_0}{r} \|u\|_r^r \leqslant -\frac{1}{2} d^{1-z_0} + \frac{s_0}{r} C_0^{r/2}$$

для каждой

$$u = \sum_{l=1}^{k} \sum_{j=0}^{k} Y_l \left(a_{ij} \cos\left(\frac{c}{b} jt\right) + b_{ij} \sin\left(\frac{c}{b} jt\right)\right) \in U_k \bigcap S_{i,l}^{-d}.$$

Если ввести обозначение $d(R) = (2(R + s_0 r^{-1} C_0^{r/2}))^{1/(1-z_0)}$ при $R > 0$, то для любой функции $u \in U_k \bigcap S_{i,l}^{-d(R)}$ будет иметь место неравенство

$$J(u) \leqslant -R. \tag{27}$$

Через C_1, C_2, ... будем обозначать константы, не зависящие от k. Для произвольного положительного числа y и любой функции $u \in S_{i,g}^{-y}$ выведем оценку

$$J(u) \geqslant -\frac{1}{2} y \|u\|^2 + \frac{s_1}{r} \|u\|_r^r \geqslant C_1 \|u\|^r - \frac{1}{2} y \|u\|^2 \geqslant -C_2 y^{r/(r-2)} \quad \text{для всех} \quad u \in S_{i,g}^{-y},$$

где $C_2 = (r-2)/(2r^{r/(r-2)} C^{2/(r-2)})$.

Обозначим $l(y) = -C_2 y^{r/(r-2)} - 1$ и зафиксируем произвольное действительное число $R > 0$. Выберем действительное число $R_1 > d(R)$ такое, что $S_{i,l}^{-R_1}$ является собственным подпространством $S_{i,l}^{-d(R)}$. Тогда найдётся собственная функция $u_0(x,t) \in U_k$ оператора L_i с собственным значением $\mu_0 \in (-R_1, -d(R)]$. Следовательно, $l(R_1) < J(u_0) \leqslant -R$ и $l(R_1) < -R$.

Докажем, что отрезок $[l(R_1), -R]$ содержит значение функционала $J(u)$ в некоторой его критической точке. Если предположить противное, то из деформационной леммы работы [15] следует существование нечётного непрерывного отображения $F : S_{i,k} \to S_{i,k}$ такого, что

$$F(\{u \in S_{i,k} : J(u) \leqslant -R\}) \subset \{u \in S_{i,k} : J(u) \leqslant l(R_1)\}.$$

Каждую функцию $u \in S_{i,k}$ представим в виде $u = u^l + u^g$, где $u^l \in S_{i,l}^{-R_1}$, $u^g \in S_{i,g}^{-R_1}$. Через P обозначим линейный оператор из $S_{i,k}$ в $S_{i,l}^{-R_1}$ такой, что $Pu = u^l$ для любых функций $u = u^l + u^g \in S_{i,k}$. Рассмотрим нечётное непрерывное отображение $PF : S_{i,k} \to$ $\to S_{i,l}^{-R_1}$. Поскольку $\dim S_{i,l}^{-d(R)} > \dim S_{i,l}^{-R_1}$, то из теоремы Борсук вытекает существование $v_0 \in U_k \bigcap S_{i,l}^{-d(R)}$ такого, что

$$PF(v_0) = 0.$$

Поэтому $F(v_0) = (F(v_0))^g \in S^{-R_1}_{i,g}$, и значит,

$$J(F(v_0)) > l(R_1). \tag{28}$$

Из (27) и включения (28) следует

$$J(v_0) < -R, \quad J(F(v_0)) \leqslant l(R_1).$$

Последнее неравенство противоречит (28). Противоречие получено в связи с предположением о том, что не существует критического значения функционала J на отрезке $[l(R_1), -R]$. Таким образом, доказано существование последовательности функций $u_k \in S_{i,k}$ (индекс i в записи u_k опущен для упрощения) такой, что

$$J'(u_k) = 0, \tag{29}$$

$$l(R_1) < J(u_k) \leqslant -R. \tag{30}$$

Осуществим предельный переход при $k \to \infty$. Для этого выведем оценку нормы $\|u_k\|_r$, не зависящую от k. Из (29) и (30) следуют соотношения

$$((u_k)_{tt} + (u_k)_{xxxx} - a(u_k)_{xx}, \psi) + \int\limits_\Omega s(x,t)|u_k|^{r-2}u_k\psi\,dx\,dt = 0 \quad \text{для любой} \quad \psi \in S_{i,k}, \tag{31}$$

$$l(R_1) \leqslant \frac{1}{2}((u_k)_{tt} + (u_k)_{xxxx} - a(u_k)_{xx}, u_k) + \frac{1}{r}\int\limits_\Omega s(x,t)|u_k|^r\,dx\,dt \leqslant -R.$$

Если в (30) положить $\psi = u_k$, то из последнего неравенства и (30) получим оценки

$$C_4 \geqslant \|u_k\|_r \geqslant C_3, \tag{32}$$

где

$$C_3 = \left(\frac{2r}{r-2}\frac{R}{s_0}\right)^{1/r}, \quad C_4 = \left(\frac{2r}{2-r}\frac{l(R_1)}{s_1}\right)^{1/r}.$$

Из оценок (32) вытекает также ограниченность последовательности $\|s(x,t)|u_k|^{r-2}u_k\|_r$. Отсюда и из (32) следует существование слабо сходящейся в $L_r(\Omega)$ подпоследовательности последовательности u_k, для которой сходится слабо в $L_r(\Omega)$ также соответствующая подпоследовательность последовательности $\{s(x,t)|u_k|^{r-2}u_k\}$. Чтобы не вводить новый индекс, будем считать, что $u_k \to u$ слабо в $L_r(\Omega)$ и $s(x,t)|u_k|^{r-2}u_k \to v_0$ слабо в $L_r(\Omega)$.

Докажем, что $v_0 = s(x,t)|u|^{r-2}u$ и что функция u является обобщённым решением соответствующих задач (1)–(3); (1), (2), (4). Разложим функции u_k, u в ряд Фурье по системе (23) и обозначим через $\{a^k_{lj}, b^k_{lj}\}$, $\{a_{lj}, b_{lj}\}$ коэффициенты Фурье функций u_k и u соответственно. Обозначим

$$D^k_N = \sum_{|\mu_{i,lj}| \geqslant N} |\mu_{i,lj}|((a^k_{lj})^2 + (b^k_{lj})^2).$$

Покажем, что $D^k_N \to 0$ при $N \to \infty$ равномерно по k. Обозначим

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ -1, & t \leqslant 0 \end{cases}$$

и подставим в (30) функцию

$$\psi_k = \sum_{|\mu_{i,lj}| \geqslant N} \theta(\mu_{i,lj}) Y_l(x)\left(a^k_{lj}\cos\left(\frac{c}{b}jt\right) + b^k_{lj}\sin\left(\frac{c}{b}jt\right)\right) \in S_{i,k}.$$

Если к полученному соотношению применить неравенство Гёльдера и воспользоваться оценкой (26), то получим

$$D_N^k \leqslant s_0 \int\limits_\Omega |u_k|^{r-1} |\psi_0|\,dx\,dt \leqslant s_0 \bigg(\int\limits_\Omega |u_k|^r\bigg)^{(r-1)/r} \bigg(\int\limits_\Omega |\psi_k|^r\bigg)^{1/r} \leqslant$$

$$\leqslant s_0 C_4^{r-1} \bigg(C_0 \sum_{|\mu_{i,lj}|\geqslant N} |\mu_{i,lj}|^{z_0} ((a_{lj}^k)^2 + (b_{lj}^k)^2)\bigg)^{1/2} \leqslant s_0 C_4^{r-1} C_0^{1/2} \frac{1}{N^{(1-z_0)/2}} (D_n^k)^{1/2}.$$

Поэтому $D_N^k \leqslant s_0^2 C_4^{2(r-1)} C_0/N^{1-z_0}$ и, следовательно, существует предел

$$\lim_{k\to\infty} ((u_k)_{tt} + (u_k)_{xxxx} - a(u_k)_{xx}, u_k) = \sum_{l=1}^\infty \sum_{j=0}^\infty \mu_{i,lj} (a_{lj}^2 + b_{lj}^2). \tag{33}$$

Зафиксируем $k_0 \in \mathbb{N}$, $\psi \in S_{i,k_0}$ и перейдём в равенстве (31) к пределу при $k \to \infty$:

$$(u, \psi_{tt} + \psi_{xxxx} - a\psi_{xx}) + \int\limits_\Omega v_0 \psi\,dx\,dt = 0. \tag{34}$$

Докажем, что имеет место равенство

$$v_0 = s(x,t)|u|^{r-2} u. \tag{35}$$

Подставим в равенство (31) $\psi = u_k$ и, использовав (33), перейдём к пределу при $k \to \infty$:

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega s(x,t)|u_k|^r\,dx\,dt = -\lim_{k\to\infty} ((u_k)_{tt} + (u_k)_{xxxx} - a(u_k)_{xx}, u_k) = -\sum_{l=1}^\infty \sum_{j=0}^\infty \mu_{i,lj} (a_{lj}^2 + b_{lj}^2). \tag{36}$$

Покажем, что существует предел

$$\lim_{k\to\infty} (u, (u_k)_{tt} + (u_k)_{xxxx} - a(u_k)_{xx}) = \sum_{l=1}^\infty \sum_{j=0}^\infty \mu_{i,lj} (a_{lj}^2 + b_{lj}^2). \tag{37}$$

Обозначим

$$G_L^K = \sum_{\substack{|\mu_{i,lj}|\geqslant L\\ l,j\leqslant K}} |\mu_{i,lj}| ((a_{lj})^2 + (b_{lj})^2), \quad K, L \in \mathbb{N}, \quad K > L, \quad r' = \frac{r}{r-1}.$$

Подставим в равенство (34) функцию

$$\psi_0 = \sum_{\substack{|\mu_{i,lj}|\geqslant L\\ l,j\leqslant K}} \theta(\mu_{i,lj}) Y_l(x) \bigg(a_{lj} \cos\bigg(\frac{c}{b} jt\bigg) + b_{lj} \sin\bigg(\frac{c}{b} jt\bigg)\bigg).$$

Воспользовавшись неравенством Гёльдера, получим

$$G_L^K = -\int\limits_\Omega v_0 \psi_0\,dx\,dt \leqslant \|v_0\|_{r'} \|\psi_0\|_r \leqslant$$

$$\leqslant \|v_0\|_{r'} \sqrt{C_0} \bigg(\sum_{\substack{|\mu_{i,lj}|\geqslant L\\ l,j\leqslant K}} |\mu_{i,lj}|^{z_0} ((a_{lj})^2 + (b_{lj})^2)\bigg)^{1/2} \leqslant \frac{\|v_0\|_{r'} \sqrt{C_0}}{L^{(1-z_0)/2}} \sqrt{G_L^K}.$$

Отсюда вытекает неравенство $G_L^K \leqslant C_0\|v_0\|_{r'}^2/L^{1-z_0}$. Таким образом, существует предел

$$\lim_{K\to\infty} G_L^K = \sum_{|\mu_{i,lj}|\geqslant L} |\mu_{i,lj}|((a_{lj})^2 + (b_{lj})^2) \equiv G_L$$

и $G_L \leqslant C_0\|v_0\|_{r'}^2/L^{1-z_0}$. Отсюда и из (36) следует равенство (37). Положим в (34) $\psi = u_k$ и, использовав (37), перейдём к пределу при $k\to\infty$:

$$\lim_{k\to\infty}(u,(u_k)_{tt} + (u_k)_{xxxx} - a(u_k)_{xx}) + \int\limits_\Omega v_0 u\,dx\,dt = \sum_{l=1}^\infty\sum_{j=0}^\infty \mu_{i,lj}(a_{lj}^2 + b_{lj}^2) + \int\limits_\Omega v_0 u\,dx\,dt = 0.$$

Из последнего равенства и из (36) получаем

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_\Omega s(x,t)|u_k|^r\,dx\,dt = \int\limits_\Omega v_0 u\,dx\,dt. \tag{38}$$

Для доказательства (35) воспользуемся неравенством

$$\int\limits_\Omega s(x,t)(|v|^{r-2}v - |u_k|^{r-2}u_k)(v-u_k)\,dx\,dt \geqslant 0,$$

справедливым для произвольной функции $v\in L_r(\Omega)$, и перейдём в этом неравенстве к пределу, использовав равенство (38):

$$\int\limits_\Omega (s(x,t)|v|^{r-2}v - v_0)(v-u)\,dx\,dt \geqslant 0 \quad \text{для любой} \quad v\in L_r(\Omega).$$

Отсюда выводится соотношение (35). Из (34) и (35) вытекает, что u является обобщённым решением. Из (32), (35) и (38) следует оценка

$$\|u\|_r \geqslant \left(\frac{2rs_0}{r-2}\frac{R}{s_1^2}\right)^{1/r}.$$

Аналогично доказательству леммы 2 в работе [16] обосновывается сходимость следующих рядов:

$$\sum_{\mu_{i,lj}\neq 0}\frac{l}{|\mu_{i,lj}|}(|a_{lj}| + |b_{lj}|), \qquad \sum_{\mu_{i,lj}\neq 0}\frac{j^2}{|\mu_{i,lj}|}(|a_{lj}| + |b_{lj}|).$$

Отсюда, из (16), (21) и из конечномерности ядра $\ker L_i$ вытекают включения (11) и условие $u_{xx}\in C(\Omega)$. Теорема доказана.

Заключение. Для квазилинейного уравнения (1) доказано существование бесконечной неограниченной последовательности периодических решений на отрезке при выполнении граничных условий, соответствующих шарнирно опирающимся и упруго закреплённым концам.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 0705-2020-0047).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. М., 1968.
2. *Ji S., Wei H.* Periodic solutions of a semilinear Euler–Bernoulli beam equation with variable coefficients // London J. Math. 2020. V. 53. P. 71–94.
3. *Feireisl E.* Time periodic solutions to a semilinear beam equations // Nonlin. Anal. 1988. V. 12. P. 279–290.

4. *Elishakoff I., Pentaras D.* Apparently the first closed-form solution of inhomogeneous elastically restrained vibrating beams // J. Sound Vibration. 2006. V. 298. № 1–2. P. 439–445.
5. *Eliasson L.H., Grebert B., Kuksin S.B.* KAM for the nonlinear beam equation // Geom. Funct. Anal. 2016. V. 26. № 6. P. 1588–1715.
6. *Wang Y., Ji S.* A result on quasi-periodic solutions of a nonlinear beam equation with a quasi-periodic forcing term // Z. Angew. Math. Phys. 2012. V. 63. № 1. P. 189–190.
7. *Chen B., Gao Y., Li Y.* Periodic solutions to nonlinear Euler–Bernoulli beam equations // Dynam. Systems (Math. DS). 2018. № 1. P. 23–49.
8. *Wang Y.* Quasi-periodic solutions of a quasi-periodically forced nonlinear beam equation // Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul. 2012. V. 17. P. 2682–2700.
9. *Рудаков И.А.* Периодические решения квазилинейного уравнения вынужденных колебаний балки // Изв. РАН. Сер. мат. 2015. Т. 79. № 5. С. 215–238.
10. *Yamaguchi M.* Existence of periodic solutions of second order nonlinear evolution equations and applications // Funkc. Ekvacioj. 1995. V. 38. P. 519–538.
11. *Рудаков И.А.* О периодических решениях одного уравнения колебаний балки // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54. № 5. С. 691–700.
12. *Рудаков И.А.* Задача о периодических колебаниях двутавровой балки с закреплённым концом в случае резонанса // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 3. С. 343–352.
13. *Nazarov A.I., Nikitin Y.Y.* Exact L2-small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems // Prob. Theory and Related Fields. 2004. V. 129. № 4. P. 469–494.
14. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 2010.
15. *Nirenberg L.* Variational and topological methods in nonlinear problems // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.). 1981. V. 4. № 3. P. 267–302.
16. *Рудаков И.А.* Периодические решения квазилинейного уравнения колебаний балки с однородными граничными условиями // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 6. С. 811–825.

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Поступила в редакцию 22.03.2022 г.
После доработки 09.06.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.