ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 8, с. 1073–1077

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 519.635.4

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНИКА РАССЕЯНИЯ В РАМКАХ ИНТЕГРОФУНКЦИОНАЛЬНОГО МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ИСТОЧНИКОВ

© 2022 г. Ю. А. Еремин, Е. В. Захаров

Получено аналитическое выражение для полного сечения рассеяния в методе дискретных источников, использующем представление диаграммы направленности рассеянного поля через неортогональные на единичной сфере функции. Последнее обстоятельство позволяет при численной реализации на порядок сократить время вычисления интегрального поперечника рассеяния. Кроме того, использование оптической теоремы и аналитических выражений для сечения экстинкции даёт возможность вычислять сечение поглощения излучения без процедуры интегрирования ближнего поля по поверхности рассеивателя.

DOI: 10.31857/S0374064122080076, EDN: CGAYAK

Введение. Интегрофункциональные методы, такие, например, как метод фундаментальных решений [1] и др., используются в многочисленных практических приложениях. Они объединяют целое семейство методов анализа задач рассеяния, которые ориентируются на представления полей через распределённые мультипольные источники (фундаментальные решения), локализованные внутри рассеивателя, среди которых можно выделить метод T-матриц [2], метод вспомогательных источников [3], метод дискретных источников (МДИ) [4] и метод множественных мультиполей [5], а также их модификации. Дело в том, что при использовании обобщений теории Ми (см. [6]) для решения задач рассеяния на проницаемых телах сталкиваются с серьёзными проблемами в случае анализа рассеивателей несферической геометрией в связи с несправедливостью гипотезы Рэлея [7]. В этих случаях приходится использовать представления для полей через распределённые мультиполи, локализованные в различных точках внутри рассеивателя. Вследствие последнего обстоятельства поле на бесконечности и диаграмма рассеяния представляются через неортогональные на единичной сфере функции, что требует выполнения численного интегрирования для вычисления интегрального поперечника рассеяния [4]. Однако процедура интегрирования по единичной сфере отнимает много ресурсов при рассмотрении атмосферных частиц или при исследовании эритроцитов, особенно если необходимо решать задачи рассеяния для набора углов падения плоской электромагнитной волны [8, 9]. Это обстоятельство существенно отличается от случая использования векторных сферических гармоник, ортогональных на единичной сфере, и позволяет вычислять полное сечение рассеяния в аналитическом виде, используя лишь амплитуды мультиполей, локализованных в одной единственной точке.

В настоящей работе показано, что аналогичное выражение можно получить и в случае использования неортогональных функций, т.е. распределённых мультипольных источников. Полученное аналитическое выражение для поперечника рассеяния позволяет не только на порядки снижать затраты на его вычисление, но и, использовав оптическую теорему (см. работы [10, 11]), вычислять такую важную характеристику ближнего поля, как сечение поглощения без интегрирования ближнего поля по поверхности рассеивателя.

1. Постановка граничной задачи. Рассмотрим постановку задачи дифракции плоской электромагнитной волны на однородной осесимметричной проницаемой частице с внутренней областью D_i в пространстве $\mathbb{R}^3$, ограниченной гладкой замкнутой поверхностью $\partial D_i \in C^{(2,\nu)}$, и внешней неограниченной областью D_e. Будем полагать, что плоская волна $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$ распространяется под углом $\pi - \theta_0$ по отношению к оси симметрии Oz. Тогда математическая постановка граничной задачи может быть записана в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}_i = -jk_0\mathbf{H}_i, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}_{i,e} = jk_0\varepsilon_{i,e}\mathbf{E}_{i,e}, \quad M \in D_{i,e}, \quad D_e = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}_i,$$

$$\widehat{\mathbf{n}}_i \times (\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_e) = \widehat{\mathbf{n}}_i \times \mathbf{E}^0, \quad \widehat{\mathbf{n}}_i \times (\mathbf{H}_i - \mathbf{H}_e) = \widehat{\mathbf{n}}_i \times \mathbf{H}^0, \quad Q \in \partial D_i,$$

$$\lim_{r\to\infty} \boldsymbol{r} \cdot \left(\sqrt{\varepsilon_e}\mathbf{E}_e \times \frac{\boldsymbol{r}}{r} - \mathbf{H}_e\right) = 0, \quad r = |M|. \tag{1}$$

Здесь $\{\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i\}$ – полное поле в области D_i, $\{\mathbf{E}_e, \mathbf{H}_e\}$ – рассеянное поле в D_e, $\widehat{\mathbf{n}}_i$ – единичная внешняя нормаль к поверхности ∂D_i, $\varepsilon_{i,e}$ – диэлектрические проницаемости сред в областях $D_{i,e}$ соответственно, при этом $\operatorname{Im}\varepsilon_i \leqslant 0$, $\operatorname{Im}\varepsilon_e = 0$, $k_0 = \omega/c$, ω – частота, c – скорость света, $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор в точку M из начала координат, временна́я зависимость выбрана в виде $\exp(j\omega t)$. Как известно, поставленная граничная задача (1) имеет единственное классическое решение [12].

2. Метод дискретных источников. Будем строить приближённое решение граничной задачи (1) на основе метода дискретных источников [4]. Разделим поле падающей линейно поляризованной плоской волны $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$ на поля P- и S-поляризации, тогда соответствующие поля могут быть записаны как

$$\mathbf{E}^{0,P}(M) = (\cos\theta_0\,\widehat{\mathbf{e}}_x + \sin\theta_0\,\widehat{\mathbf{e}}_z)\psi(x,z), \quad \mathbf{H}^{0,P}(M) = -\sqrt{\varepsilon_e}\widehat{\mathbf{e}}_y\psi(x,z), \tag{2}$$

$$\mathbf{E}^{0,S}(M) = \widehat{\mathbf{e}}_y\psi(x,z), \quad \mathbf{H}^{0,S}(M) = \sqrt{\varepsilon_e}(\cos\theta_0\widehat{\mathbf{e}}_x + \sin\theta_0\widehat{\mathbf{e}}_z)\psi(x,z), \tag{3}$$

где $\psi(x,z) = e^{-jk_e(x\sin\theta_0 - z\cos\theta_0)}$, $k_e = k_0\sqrt{\varepsilon_e}$, $(\widehat{\mathbf{e}}_x,\ \widehat{\mathbf{e}}_y,\ \widehat{\mathbf{e}}_z)$ – базис декартовой системы координат. Будем строить поля в областях $D_{i,e}$ на основе векторных потенциалов следующего вида [4]:

$$\mathbf{A}^{1\alpha}_{mn}(M) = Y^\alpha_m(\zeta, z^\alpha_n)\cos[(m+1)\varphi]\widehat{\mathbf{e}}_\rho - Y^\alpha_m(\zeta, z^\alpha_n)\sin[(m+1)\varphi]\widehat{\mathbf{e}}_\varphi, \quad \alpha = i, e,$$

$$\mathbf{A}^{2\alpha}_{mn}(M) = Y^\alpha_m(\zeta, z^\alpha_n)\sin[(m+1)\varphi]\widehat{\mathbf{e}}_\rho + Y^\alpha_m(\zeta, z^\alpha_n)\cos[(m+1)\varphi]\widehat{\mathbf{e}}_\varphi, \tag{4}$$

$$\mathbf{A}^{3\alpha}_{n}(M) = Y^\alpha_0(\zeta, z^\alpha_n)\widehat{\mathbf{e}}_z.$$

Здесь $Y^e_m(\zeta, z^e_n) = h^{(2)}_m(k_{e,l}R_{z^e_n})(\rho/R_{z^e_n})^m$, $Y^i_m(\zeta, z^i_n) = j_m(k_iR_{z^i_n})(\rho/R_{z^i_n})^m$, где $h^{(2)}_m$ – сферические функции Ханкеля, j_m – сферические функции Бесселя, $k_i = k_0\sqrt{\varepsilon_i}$, $\zeta = (\rho, z)$, $\rho^2 = x^2 + y^2$, $R^2_{z_n} = \rho^2 + (z - z_n)^2$, $\{z^\alpha_n\}^{N^m_\alpha}_{n=1}$ – координаты дискретных источников, распределённых вдоль оси вращения Oz, $(\widehat{\mathbf{e}}_\rho, \widehat{\mathbf{e}}_\varphi, \widehat{\mathbf{e}}_z)$ – базис цилиндрической системы координат. Отметим, что векторные потенциалы (4) удовлетворяют уравнениям Гельмгольца в соответствующих областях $D_{i,e}$.

Решение задачи дифракции (1) будем строить раздельно для P- и S-поляризаций. Тогда конкретные представления для полей в случае P-поляризации принимают вид (см. [4])

$$\mathbf{E}^N_\alpha(M) = \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=1}^{N^m_\alpha}\left\{p^\alpha_{mn}\frac{j}{k_0\varepsilon_\alpha}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}^{1\alpha}_{mn} + q^\alpha_{mn}\frac{j}{\varepsilon_\alpha}\operatorname{rot}\mathbf{A}^{2\alpha}_{mn}\right\} + \sum_{n=1}^{N^0_\alpha} r^\alpha_n\frac{j}{k_0\varepsilon_\alpha}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}^{3\alpha}_n,$$

$$\mathbf{H}^N_\alpha(M) = \frac{j}{k_0}\operatorname{rot}\mathbf{E}^N_\alpha(M), \quad \alpha = i, e. \tag{5}$$

Аналогично для случая S-поляризации представления для полей могут быть записаны как

$$\mathbf{E}^N_\alpha(M) = \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=1}^{N^m_\alpha}\left\{p^\alpha_{mn}\frac{j}{k_0\varepsilon_\alpha}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}^{2\alpha}_{mn} + q^\alpha_{mn}\frac{j}{\varepsilon_\alpha}\operatorname{rot}\mathbf{A}^{1\alpha}_{mn}\right\} + \sum_{n=1}^{N^0_\alpha} r^\alpha_n\frac{j}{\varepsilon_\alpha}\operatorname{rot}\mathbf{A}^{3\alpha}_n,$$

$$\mathbf{H}^N_\alpha(M) = \frac{j}{k_0}\operatorname{rot}\mathbf{E}^N_\alpha(M), \quad \alpha = i, e. \tag{6}$$

Легко убедиться в том, что построенные поля (5) и (6) для P- и S-поляризаций удовлетворяют системе уравнений Максвелла (1) и условиям излучения на бесконечности, а условия сопряжения на поверхности ∂D_i выполняются приближённо посредством выбора неизвестных амплитуд дискретных источников для фурье-гармоник по $\varphi : m = 0, 1, \ldots,$ $\vec{p}_m = \{p^i_{mn}, q^i_{mn}, p^e_{mn}, q^e_{mn}\}$, а также вектора независящей от φ гармоники $\vec{r} = \{r^i_n, r^e_n\}$ (см. [4]).

После определения амплитуд дискретных источников вычисляются ближние поля (5), (6) и компоненты диаграммы направленности рассеянного поля $\mathbf{F}(\theta, \varphi)$, которая определяется на единичной сфере $\{0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$ следующим образом [13, с. 131]:

$$\frac{\mathbf{E}(M)}{|\mathbf{E}^0(M)|} = \frac{e^{ik_e r}}{r}\mathbf{F}(\theta, \varphi) + o(r^{-1}), \quad r \to \infty.$$

В силу представления (5) выражения для компонент диаграммы направленности для P-поляризации имеют вид

$$F^P_\theta(\theta, \varphi) = jk_e \sum_{m=0}^{M} (j\sin\theta)^m \cos[(m+1)\varphi] \sum_{n=1}^{N^m_e} (p^e_{mn}\cos\theta + q^e_{mn}) e^{-jk_e z^e_n \cos\theta} - jk_e \sin\theta \sum_{n=1}^{N^0_e} r^e_n e^{-jk_e z^e_n \cos\theta},$$

$$F^P_\varphi(\theta, \varphi) = -jk_e \sum_{m=0}^{M} (j\sin\theta)^m \sin[(m+1)\varphi] \sum_{n=1}^{N^m_e} (p^e_{mn} + q^e_{mn}\cos\theta) e^{-jk_e z^e_n \cos\theta}. \tag{7}$$

Аналогично для S-поляризации:

$$F^S_\theta(\theta, \varphi) = jk_e \sum_{m=0}^{M} (j\sin\theta)^m \sin[(m+1)\varphi] \sum_{n=1}^{N^m_e} (p^e_{mn}\cos\theta - q^e_{mn}) e^{-jk_e z^e_n \cos\theta},$$

$$F^S_\varphi(\theta, \varphi) = jk_e \sum_{m=0}^{M} (j\sin\theta)^m \cos[(m+1)\varphi] \sum_{n=1}^{N^m_e} (p^e_{mn}\cos\theta - q^e_{mn}) e^{-jk_e z^e_n \cos\theta} +$$

$$+ jk_e \sin\theta \sum_{n=1}^{N^0_e} r^e_n e^{-jk_e z^e_n \cos\theta}. \tag{8}$$

Компоненты диаграммы определяются на единичной сфере.

3. Интегральный поперечник рассеяния. Определим интегральный поперечник рассеяния, который определяется через компоненты диаграммы направленности (7), (8) следующим образом:

$$\sigma^{P,S}_{\text{scs}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sigma^{P,S}(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi, \tag{9}$$

где $\sigma^{P,S}(\theta, \varphi) = |F^{P,S}_\theta(\theta, \varphi)|^2 + |F^{P,S}_\varphi(\theta, \varphi)|^2$.

Далее ограничимся случаем P-поляризации, так как компоненты диаграммы (7) и (8) содержат одинаковые выражения, если поменять местами их компоненты θ и φ. Прежде всего заметим, что

$$\int_0^{2\pi} \sigma^P(\theta, \varphi) \, d\varphi = \sigma(\theta) = 2\pi k_e^2 \sum_{m=0}^{M} (\sin^2\theta)^m \sum_{n,l=1}^{N^m_e} (p^e_{mn}\cos\theta + q^e_{mn})(p^{e*}_{ml}\cos\theta + q^{e*}_{ml}) \exp(j\beta_{nl}\cos\theta) +$$

$$+ 2\pi k_e^2 \sin^2\theta \sum_{n,l=1}^{N^0_e} r^e_n r^{e*}_l \exp(j\beta_{nl}\cos\theta),$$

где введено обозначение $\beta_{nl} = -k_e(z_n^e - z_l^e)$. Тогда для вычисления интеграла

$$\int\limits_0^\pi \sigma(\theta)\sin\theta\, d\theta = \int\limits_{-1}^1 \sigma(x)\, dx$$

достаточно вычислить интегралы вида

$$I_m^{(k)}(\beta) = \int\limits_{-1}^1 (1-x^2)^m x^k \exp(j\beta x)\, dx, \quad m = 0, 1, \ldots, \quad k = 0, 1, 2. \tag{10}$$

Рассмотрим сначала базовый интеграл вида $I_m^{(0)}(\beta)$, значение которого приведено в таблице в [14, с. 335, № 3.387.2]:

$$I_m^{(0)}(\beta) = \int\limits_{-1}^1 (1-x^2)^m \exp(j\beta x)\, dx = 2m!\left(\frac{2}{\beta}\right)^m j_m(\beta). \tag{11}$$

Выражение в правой части формулы (11) справедливо при всех β, отличных от нуля, в случае $\beta = 0$ для вычисления достаточно использовать асимптотику сферической функции Бесселя для малых аргументов [15, с. 256, № 10.1.4], т.е. $j_m(x) = x^m/(2m+1)!! + o(x^m)$, $x \to 0$. Тогда интеграл (11) будет равен $I_m^{(0)}(0) = 2(2m)!!/(2m+1)!!$. Легко видеть, что интегралы вида (10) для значений индекса $k = 1, 2$ получаются из $I_m^{(0)}(\beta)$ следующим образом:

$$I_m^{(1)} = \frac{\partial}{j\partial\beta} I_m^{(0)}, \quad I_m^{(2)} = -\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} I_m^{(0)}. \tag{12}$$

В результате получен следующий основной результат.

Теорема. *Аналитическое представление для интегрального поперечника рассеяния (9) граничной задачи дифракции (1) в рамках метода дискретных источников принимает следующий вид:*

$$\sigma_{\mathrm{scs}} = 2\pi k_e^2 \sum_{m=0}^{M} \sum_{n,l=1}^{N_e^m} (p_{mn}^e p_{ml}^{e*} I_m^{(2)}(\beta_{nl}) + 2\,\mathrm{Re}\,(p_{mn}^e q_{ml}^{e*}) I_m^{(1)}(\beta_{nl}) + q_{mn}^e q_{ml}^{e*} I_m^{(0)}(\beta_{nl})) +$$

$$+ 2\pi k_e^2 \sum_{n,l=1}^{N_e^0} r_n^e r_l^{e*} I_1^{(0)}(\beta_{nl}), \tag{13}$$

где значения $I_m^{(k)}(\beta)$, $k = 0, 1, 2$, задаются соотношениями (10)–(12), а коэффициенты p_{ml}^{e*}, q_{ml}^{e*} и r_l^{e*} – комплексно сопряжённые по отношению к p_{ml}^e, q_{ml}^e и r_l^e соответственно.

Таким образом, как только вычислены амплитуды дискретных источников $\vec{p}_m$ и $\vec{r}$, сечение рассеяния вычисляется в аналитическом виде простым суммированием аплитуд, без интегрирования компонент диаграммы по единичной сфере.

Во многих практических приложениях возникает необходимость вычисления сечения поглощения электромагнитной энергии проницаемым рассеивателем с комплексным индексом рефракции, которое представляется в виде интеграла по внешней поверхности рассеивателя:

$$\sigma_{\mathrm{abs}} = -\,\mathrm{Re} \int\limits_{\partial D_e} [(\mathbf{E}_e^N + \mathbf{E}^0) \times (\mathbf{H}_e^N + \mathbf{H}^0)^*] \cdot \widehat{\mathbf{n}}_j\, dS. \tag{14}$$

Вычислить сечение (14) можно с помощью либо интегрирования ближнего поля $\{\mathbf{E}_e^N, \mathbf{H}_e^N\}$ (5), (6), либо оптической теоремы [10], которая имеет вид

$$\sigma_{\text{ext}}(\lambda, \theta_0) = \sigma_{\text{abs}}(\lambda, \theta_0) + \sigma_{\text{scs}}(\lambda, \theta_0), \tag{15}$$

здесь σ_{ext} – сечение экстинкции (см. [10, 11]), которое показывает сколько энергии данный рассеиватель извлекает из поля плоской волны. В нашем случае сечение экстинкции для P-, S-поляризаций в рамках метода дискретного рассеяния может быть представлено в аналитическом виде [4]:

$$\sigma_{\text{ext}}^P = -\frac{4\pi}{k_e}\,\mathrm{Im}\,[F_\theta^P(\pi - \theta_0, \pi)], \quad \sigma_{\text{ext}}^S = \frac{4\pi}{k_e}\,\mathrm{Im}\,[F_\varphi^S(\pi - \theta_0, \pi)], \tag{16}$$

где $F_{\theta,\varphi}^{P,S}(\theta, \varphi)$ – соответствующие компоненты диаграммы направленности в направлении распространения плоской волны.

Таким образом, использовав оптическую теорему (15), представления для сечения экстинкции (16) и аналитическую формулу для сечения рассеяния (13), можно легко вычислить сечение поглощения (14) без интегрирования ближнего поля по поверхности рассеивателя.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Еремин Ю.А., Захаров Е.В., Несмеянова Н.И.* Метод фундаментальных решений в задачах дифракции электромагнитных волн на телах вращения // Вычислит. методы и программирование. 1980. Т. 32. С. 28–44.
2. *Doicu A.* Null-field method with discrete sources // Generalized Multipole Techniques for Electromagnetic and Light Scattering / Ed. T. Wriedt. Amsterdam, 1999. P. 229–255.
3. *Tsitsas N.L., Zouros G.P., Fikioris G., Leviatan Y.* On methods employing auxiliary sources for 2-d electromagnetic scattering by non-circular shapes // IEEE Trans. AP. 2018. V. 66. № 10. P. 5443–5452.
4. *Еремин Ю.А., Свешников А.Г.* Квазиклассические модели квантовой наноплазмоники на основе метода дискретных источников (обзор) // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2021. Т. 61. № 4. С. 34–62.
5. *Smajic J., Hafner C., Raguin L., et al.* Comparison of numerical methods for the analysis of plasmonic structures // J. Comput. Theor. Nanosci. 2009. V. 6. № 3. P. 763–774.
6. *Кюркчан А.Г., Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е.* Особенности продолжения волновых полей // Успехи физ. наук. 1996. Т. 166. № 12. С. 1285–1308.
7. *Farafonov V.G., Il'in V.B., Vinokurov A.A.* Near- and far field light scattering by nonspherical particles: applicability of methods that involve a spherical basis // Opt. Spectr. 2010. V. 109. № 3. P. 432–443.
8. *Doicu A., Eremin Yu.A., Efremenko D., Trautmann T.* Methods with discrete sources for electromagnetic scattering by large axisymmetric particles with extreme geometries // J. Quantitat. Spectr. Radiative Transfer. 2015. V. 164. P. 137–146.
9. *Eremina E., Hellmers J., Eremin Yu.A., Wriedt T.* Different shape models for erythrocyte: light scattering analysis based on the discrete sources method // J. Quantitat. Spectr. Radiative Transfer. 2006. V. 102. № 1. P. 3–10.
10. *Newton R.G.* Optical theorem and beyond // Amer. J. Phys. 1976. V. 44. P. 639–642.
11. *Еремин Ю.А.* Обобщение оптической теоремы для мультиполя на основе интегральных преобразований // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 9. С. 1156–1161.
12. *Купрадзе В.Д.* О приближенном решении задач математической физики // Успехи мат. наук. 1967. Т. 22. Вып. 2. С. 59–107.
13. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987.
14. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963.
15. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М., 1979.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 20.03.2022 г.
После доработки 20.03.2022 г.
Принята к публикации 25.05.2022 г.