ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 8, с. 1090–1104

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.968.7+537.876

ГРАНИЧНОЕ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ РАССЕЯНИЯ НА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИХ ТЕЛАХ

© 2022 г. А. Б. Самохин, А. В. Сетуха

Рассмотрено приложение метода граничных интегральных уравнений к задаче рассеяния на системе идеально проводящих объектов электромагнитного поля, подчиняющегося нестационарным уравнениям Максвелла. Использовано интегральное представление электромагнитного поля через поверхностные токи. Основной результат статьи состоит в том, что доказано существование краевых значений у электрического поля, определяемого таким интегральным представлением, которые выражаются через гиперсингулярный интеграл, понимаемый в смысле конечной части по Адамару. Это позволило свести задачу к интегро-дифференциальному уравнению эволюционного типа с запаздыванием, содержащему гиперсингулярный поверхностный интеграл. Также доказано, что если это уравнение имеет решение в определённом классе функций, то электрическое и магнитное поля, определяемые соответствующими интегральными представлениями, являются решением исходной задачи рассеяния для уравнений Максвелла.

DOI: 10.31857/S037406412208009X, EDN: CGFSFT

Введение. Метод граничных интегральных уравнений имеет широкое применение при решении задач рассеяния электромагнитных волн в монохроматическом случае, когда возникает краевая задача относительно составляющих электрического и магнитного полей, зависящих только от пространственных координат. В случае однородной среды, в которую помещены идеально проводящие или однородные диэлектрические объекты, известны интегральные представления для электромагнитного поля через поверхностные токи, что позволяет свести задачу рассеяния к решению интегральных уравнений, записанных на поверхности объекта, относительно этих токов [1, с. 262–342; 2, с. 25–26, 167; 3, с. 23; 4, с. 177–306].

Такой подход имеет целый ряд достоинств при численном моделировании электромагнитных процессов по сравнению с методами, основанными на непосредственном решении исходной краевой задачи в пространственной области. Здесь снижается размерность задачи: неизвестные функции ищутся только на граничной поверхности. При этом автоматически выполняются условия на бесконечности, что снимает проблему необходимости построения расчётной сетки в пространственной области больших размеров, актуальную при применении различных сеточных методов к исходной краевой задаче.

Значительный интерес представляет распространение метода граничных интегральных уравнений на нестационарные задачи для уравнений Максвелла во временно́й области. Однако это направление электродинамики значительно менее исследовано. В настоящей работе рассматривается задача рассеяния заданного первичного электромагнитного поля на системе идеально проводящих объектов (тел или экранов), помещённых в однородную внешнюю среду в нестационарной постановке. Распространение электромагнитного поля в окружающей среде описывается уравнениями Максвелла. Для такой задачи известен подход, основанный на применении интегрального представления электромагнитного поля через поверхностные токи (касательное векторное поле) и заряды (скалярная функция, заданная на поверхности) с использованием запаздывающих потенциалов. При этом задача сводится к системе из эволюционного интегро-дифференциального уравнения со слабо сингулярными поверхностными интегралами и дифференциального уравнения, связывающего токи и заряды [4, с. 200–203]. Также отметим, что для задачи рассеяния электромагнитной волны на неоднородном диэлектрическом теле интегро-дифференциальное уравнение эволюционного типа с запаздыванием и с интегралами по объёму получено в [5].

В настоящей работе нестационарные уравнения Максвелла для электромагнитного поля вне системы идеально проводящих тел и экранов сведены к граничному интегральному уравнению с применением интегрального представления только через поверхностные токи. При этом ядро интегрального уравнения имеет сильную особенность.

1. Постановка задачи для уравнений Максвелла. Рассматривается трёхмерная задача рассеяния электромагнитной волны, порождённой заданным первичным полем, на системе идеально проводящих объектов. Предполагается, что облучаемая система объектов может включать в себя идеально проводящие тела, каждое из которых ограничено замкнутой поверхностью, и идеально проводящие экраны, каждый из которых моделируется как незамкнутая поверхность с краем. Предположим, что поверхности тел образуют заданную суммарную поверхность Σ, которая может быть замкнутой (поверхность телесного объекта), незамкнутой (экраном), или состоять из нескольких замкнутых и незамкнутых ограниченных компонент. Обозначим также через Σ^{in} множество точек гладкости поверхности Σ, не лежащих на краю поверхности. Пусть Ω – область вне идеально проводящих объектов (область, образованная точками пространства, не лежащими на поверхности Σ и в областях, ограниченных замкнутыми компонентами этой поверхности).

Пусть окружающая среда является изотропной и однородной без проводимости, вне источников первичного поля отсутствуют токи и заряды. При этом электромагнитное поле вне облучаемых объектов и источников излучения описывается уравнениями Максвелла для напряжённостей электрического и магнитного полей [6, с. 17] $\vec{E}=\vec{E}(x,t)$ и $\vec{H}=\vec{H}(x,t)$, t – время, $x=(x_1,x_2,x_3)$ – точки пространства:

$$\operatorname{div}\vec{E}=0,\quad \operatorname{div}\vec{H}=0, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E}=-\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t},\quad \operatorname{rot}\vec{H}=\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \tag{2}$$

где ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости внешней среды, которые предполагаются константами.

Будем считать, что первичное поле, описываемое напряжённостями $\vec{E}_{\mathrm{inc}}$, $\vec{H}_{\mathrm{inc}}$, является заданным, это поле определено и удовлетворяет уравнениям (1), (2) в области вне источников поля (либо во всем пространстве), причём эта область включает в себя облучаемые объекты вместе с некоторой их окрестностью. Задача состоит в отыскании напряжённостей вторичных (отражённых) электрического и магнитного полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$, которые должны быть определены в области Ω вне облучаемых объектов. На поверхности облучаемых объектов должно выполняться граничное условие

$$\vec{n}\times\vec{E}_{\mathrm{tot}}=0, \tag{3}$$

где $\vec{E}_{\mathrm{tot}}=\vec{E}_{\mathrm{inc}}+\vec{E}$ – полное электрическое поле, $\vec{n}$ – орт вектора нормали на поверхности Σ. На каждой замкнутой компоненте поверхности Σ вектор $\vec{n}$ выбирается как вектор внешней нормали, условие (3) задаётся с внешней стороны поверхности. На каждой незамкнутой компоненте поверхности Σ вектор нормали выбирается на одной из сторон поверхности, при этом граничное условие должно выполняться для краевых значений электрического поля на обеих сторонах поверхности. Условие (3) должно быть выполнено в каждой точке $x\in\Sigma^{\mathrm{in}}$.

Также на вторичное поле $\vec{E}$, $\vec{H}$ ставятся: условие конечности энергии поля в любой ограниченной области, условия стремления к нулю на бесконечности и условие отсутствия волн, приходящих из бесконечности. Последнее условие можно записать в форме Мюллера [6, с. 45] (с учётом проведённого в [6, с. 18] обезразмеривания):

$$\vec{E}\to 0,\quad \vec{H}\to 0,\quad \left(|x|\vec{E}+\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}[x\times\vec{H}]\right)\to 0,$$

$$\left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}|x|\vec{H}-[x\times\vec{E}]\right)\to 0\quad\text{при}\quad |x|\to 0. \tag{4}$$

2. Преобразование Фурье и некоторые его свойства. Для сведения задачи к нестационарному граничному интегро-дифференциальному уравнению будем использовать прямое и обратное преобразования Фурье

$$\hat{f}(\omega) \equiv F[f](\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt, \quad f(t) \equiv F^{-1}[\hat{f}](t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega. \tag{5}$$

При этом имеют место следующие свойства преобразования Фурье [7, с. 441, 445–447]:

$$F^{-1}[-i\omega\hat{f}(\omega)] = \frac{df(t)}{dt}, \quad F^{-1}[-\omega^2\hat{f}(\omega)] = \frac{d^2f(t)}{dt^2}, \tag{6}$$

$$F^{-1}[e^{i\omega\Delta}\hat{f}(\omega)] = f(t-\Delta). \tag{7}$$

Заметим, что если $f \in L_2(\mathbb{R})$, то существует функция $\hat{f} = F[f] \in L_2(\mathbb{R})$ и $f = F^{-1}[\hat{f}]$, интегралы в формуле (5) существуют в смысле главного значения. Формулы (6) выполнены при условии $f' \in L_2(\mathbb{R})$ (для первой формулы) и $f'' \in L_2(\mathbb{R})$ (для второй формулы) [7, с. 441, 455–458].

Рассмотрим функцию $f(x,t)$, $x \in D$, где D – область в $\mathbb{R}^n$, скалярную или векторную: $f : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$. Пусть функция $f \in C[D \times \mathbb{R}]$ и удовлетворяет условию: существует функция $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ такая, что

$$|f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \quad \text{для всех} \quad x \in D, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Тогда функция $\hat{f}(x,\omega) \equiv F[f]$ есть функция, которая при каждом $\omega \in \mathbb{R}$ непрерывна по параметру x в области D. Если существует производная $f_i'(x,t) = \partial f(x,t)/\partial x_i$ такая, что $f_i' \in C[D \times \mathbb{R}]$, и функции f и f_i' удовлетворяют условию (8), то при каждом $\omega \in \mathbb{R}$ существует производная $\hat{f}_i'(x,\omega) = \partial\hat{f}(x,\omega)/\partial x_i$, причём $\hat{f}_i' = F[f_i']$ и $\hat{f}_i' \in C[D \times \mathbb{R}]$.

Для доказательства этих свойств достаточно заметить, что при выполнении условия (8) для любых точек $x, y \in D$ имеем

$$|\hat{f}(y,\omega) - \hat{f}(x,\omega)| = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (f(y,t) - f(x,t))e^{i\omega t}\,dt\right| \leqslant I_1 + I_2 + I_3, \tag{9}$$

где

$$I_1 = \int\limits_{|t|>R} |f(x,t)|e^{i\omega t}\,dt, \quad I_2 = \int\limits_{|t|>R} |f(y,t)|e^{i\omega t}\,dt, \quad I_3 = \int\limits_{|t|<R} |f(y,t) - f(x,t)|e^{i\omega t}\,dt,$$

R – некоторая константа. Для любого R найдётся окрестность $U(x)$ точки x такая, что функция $f(y,t)$ равномерно непрерывна как функция аргументов $(y,t) \in U(x) \times [-R,R]$. Тогда в силу условия (8) для любого $\varepsilon > 0$ найдётся константа R такая, что $I_1 + I_2 < \varepsilon/2$ при $y \in U(x)$, и для найденного R найдётся число $\delta > 0$ такое, что $I_3 < \varepsilon/2$ при $|x-y| < \delta$. Тогда $\hat{f}(y,\omega) \to \hat{f}(x,\omega)$ при $y \to x$, причём равномерно по переменной $\omega \in \mathbb{R}$.

Если функции f и f_i' удовлетворяют условию (8), то при $x \in D$ имеем

$$\hat{f}_i'(x,\omega) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x+\xi\vec{e}_i,t) - f(x,t)}{\xi}e^{i\omega t}\,dt,$$

$\vec{e}_i$, $i = 1,2,3$, – орты декартовой системы координат.

Заметим, что
$$\frac{f(x+\xi\vec{e}_i,t)-f(x,t)}{\xi}=f_i'(x^*,t),$$
где $x^*=x^*(\xi,t),\ \ |x^*-x|\leqslant\xi.$ Тогда
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x+\xi\vec{e}_i,t)-f(x,t)}{\xi}e^{i\omega t}\,dt=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_i'(x,t)e^{i\omega t}\,dt+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(f_i'(x^*,t)-f_i'(x,t))e^{i\omega t}\,dt.$$
Оценивая второй интеграл так же, как интеграл в формуле (9), получаем, что $\hat{f}_i'=F[f_i']$.

Непрерывность функции $\hat{f}'$ следует из выполнения условия (8) для функции f'.

3. Уравнения Максвелла в частотной области. Вернёмся к рассматриваемой задаче для уравнений Максвелла (1), (2). Предположим, что $\vec{E}=\vec{E}(x,t)$ и $\vec{H}=\vec{H}(x,t)$ есть решение поставленной задачи на множестве $(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R},$ дважды непрерывно дифференцируемое на этом множестве, и такое, что сами поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ и все их первые производные по пространственным координатам и времени удовлетворяют условию (8). Тогда определены функции $\vec{E}_\omega(x)$ и $\vec{H}_\omega(x),\ \ (x,\omega)\in\Omega\times\mathbb{R},$ – преобразования фурье-функций $\vec{E}(x,t)$ и $\vec{H}(x,t),$ для которых возникают уравнения, называемые уравнениями Максвелла в частотной области [6, с. 17]:
$$\operatorname{rot}\vec{E}_\omega=i\omega\mu\vec{H}_\omega,\quad \operatorname{rot}\vec{H}_\omega=-i\omega\varepsilon\vec{E}_\omega. \tag{10}$$
Также считаем, что существует функция $\vec{E}_{\omega,inc}(x),$ являющаяся преобразованием фурье-функции $\vec{E}_{\rm inc}(x,t).$

Заметим, что уравнения (10) равносильны уравнениям (1), (2) для функций $\vec{E}=\vec{E}_\omega(x)e^{-i\omega t}$ и $\vec{H}=\vec{H}_\omega(x)e^{-i\omega t}.$ При этом на поверхности Σ возникает условие
$$\vec{n}\times(\vec{E}_\omega+\vec{E}_{\omega,inc})=0, \tag{11}$$
и должно быть выполнено условие (4) на бесконечности для полей $\vec{E}_\omega$ и $\vec{H}_\omega.$

4. Интегральное представление для электрического поля во временно́й области. Электрическое поле в задаче (10), (11), удовлетворяющее условию на бесконечности (4), можно искать в виде [6, с. 115–116; 1, с. 262–263]
$$\vec{E}_\omega(x)=\vec{K}[\Sigma,\vec{j}_\omega](x)\equiv\int\limits_\Sigma\{\operatorname{grad}_x\operatorname{div}_x[\vec{j}_\omega(y)F(x-y)]+k^2\vec{j}_\omega(y)F(x-y)\}\,d\sigma_y, \tag{12}$$
где
$$F(x-y)=\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikR}}{R},\quad R=|x-y|,$$
$k=\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu}=\omega/c$ – волновое число, $c=1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ – скорость света, $\vec{j}_\omega$ – неизвестное касательное векторное поле на поверхности $\Sigma.$

Поле $\vec{j}_\omega$ определено в точках $x\in\Sigma^{\rm in}$ и пусть $\vec{j}_\omega\in L_1(\Sigma),$ а функции $\vec{j}_\omega(y)$ являются фурье-образом некоторой функции $\vec{j}(y,t),\ \ y\in\Sigma^{\rm in},\ \ t\in\mathbb{R},$ для которой выполнено условие: у функции $\vec{j}=\vec{j}(y,t)$ существуют производные
$$\vec{j}_t'(y,t)=\frac{\partial\vec{j}(y,t)}{\partial t}\quad\text{и}\quad\vec{j}_{tt}''(y,t)=\frac{\partial^2\vec{j}(y,t)}{\partial t^2},$$
причём при каждом $y\in\Sigma^{\rm in}$ функции $\vec{j},\ \vec{j}_t',\ \vec{j}_{tt}''$ являются непрерывными функциями от $t,$ лежащими в классе $L_1(\mathbb{R})\bigcap L_2(\mathbb{R}).$

Осуществим обратное преобразование Фурье для интегрального представления (12).

Пусть $x \notin \Sigma$. Формулу (12) запишем в виде

$$\vec{E}_\omega(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Sigma} \mathbf{G}(x-y)\vec{j}_\omega(y)\,dy,$$

где $\mathbf{G}(x)$ – оператор: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ с матрицей $(G_{nm}(x))_{3\times 3}$, коэффициенты которой имеют вид

$$G_{n\,m}(x,y) = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{e^{i\omega R/c}}{R}\delta_m^n + \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_m}\left(\frac{e^{i\omega R/c}}{R}\right), \quad R = |x-y|,$$

δ_m^n – символ Кронекера ($\delta_m^n = 1$ при $m = n$, $\delta_m^n = 0$ при $m \neq n$).

Матрицу $G_{n\,m}$ можно записать в виде

$$G_{n\,m}(x) = e^{i\omega R/c}G_{nm}^3(x) - \frac{i\omega}{c}e^{i\omega R/c}G_{nm}^2(x) - \frac{\omega^2}{c^2}e^{i\omega R/c}G_{nm}^1(x),$$

где

$$G_{nm}^1(x) = \frac{1}{R}\left(-\delta_n^m + \frac{\partial R}{\partial x_n}\frac{\partial R}{\partial x_m}\right) = -\frac{\delta_n^m}{R} + \frac{x_n x_m}{R^3}, \tag{13}$$

$$G_{nm}^2(x) = -\frac{\partial}{\partial x_n}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial x_m}\right] - \frac{\partial R}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{1}{R} = -\frac{\delta_n^m}{R^2} + 3\frac{x_m x_n}{R^4}, \tag{14}$$

$$G_{nm}^3(x) = \frac{\partial}{\partial x_n}\left[\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{1}{R}\right] = -\frac{\delta_n^m}{R^3} + 3\frac{x_m x_n}{R^5}. \tag{15}$$

Тогда функция $\vec{E}_\omega(x)$ представима в виде

$$\vec{E}_\omega(x) = \frac{1}{4\pi}(\vec{S}_{1,\omega}(x) + \vec{S}_{2,\omega}(x) + \vec{S}_{3,\omega}(x)), \tag{16}$$

где

$$\vec{S}_{1,\omega}(x) = \frac{-\omega^2}{c^2}\int\limits_{\Sigma} \mathbf{G}_1(x-y)\vec{j}_\omega(y)e^{i\omega R/c}\,dy, \quad \vec{S}_{2,\omega}(x) = \frac{-i\omega}{c}\int\limits_{\Sigma} \mathbf{G}_2(x-y)\vec{j}_\omega(y)e^{i\omega R/c}\,dy,$$

$$\vec{S}_{3,\omega}(x) = \int\limits_{\Sigma} \mathbf{G}_3(x-y)\vec{j}_\omega(y)e^{i\omega R/c}\,dy,$$

$\mathbf{G}_k(x-y) = (G_{nm}^k(x-y))$ – матрица размера $(k\times k)$, $\mathbf{G}_k(x-y)\vec{j}_\omega(y)$ – результат умножения матрицы $\mathbf{G}_k(x-y)$ на вектор $\vec{j}_\omega(y)$, $k = 1,2,3$.

Применим обратное преобразование Фурье к правой части и интегралам, входящим в выражение (16). Здесь также предположим, что функция $\omega^2\vec{j}_\omega(y)$, как функция переменных (y,ω), лежит в классе $L_1(\Sigma\times\mathbb{R})$. Тогда функции $\vec{j}_\omega(y)$ и $\omega\vec{j}_\omega(y)$ также лежат в классе $L_1(\Sigma\times\mathbb{R})$, и для любой матрицы $\mathbf{A}(y) = (a_{ij}(y))_{3\times 3}$ с коэффициентами $a_{ij}(y) \in (\Sigma)$ справедливы соотношения

$$F^{-1}\left[\int\limits_{\Sigma} \mathbf{A}(y)\vec{g}(y,\omega)\,dy\right](t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\left(\int\limits_{\Sigma} \mathbf{A}(y)\hat{\vec{g}}(y,\omega)\,dy\right)d\omega = \int\limits_{\Sigma} \mathbf{A}(y)F^{-1}[\vec{g}](y,t)\,dy$$

для $\vec{g}(y,\omega) = \vec{j}_\omega(y)$, $\omega\vec{j}_\omega(y)$, $\omega^2\vec{j}_\omega(y)$.

Тогда, используя свойства (5)–(7), получим, что электрическое поле $\vec{E}(x,t)$ имеет вид

$$\vec{E}(x,t)=\frac{1}{4\pi}\vec{S}[\Sigma,\vec{j}](x,t),\quad \vec{S}[\Sigma,\vec{j}]=\vec{S}_1[\Sigma,\vec{j}](x,t)+\vec{S}_2[\Sigma,\vec{j}](x,t)+\vec{S}_3[\Sigma,\vec{j}](x,t), \tag{17}$$

где

$$\vec{S}_1[\Sigma,\vec{j}](x,t)=\frac{1}{c^2}\int\limits_{\Sigma}\mathbf{G}_1(x-y)\frac{\partial^2\vec{j}(y,t-R/c)}{\partial t^2}\,dy,$$

$$\vec{S}_2[\Sigma,\vec{j}](x,t)=\frac{1}{c}\int\limits_{\Sigma}\mathbf{G}_2(x-y)\frac{\partial\vec{j}(y,t-R/c)}{\partial t}\,dy,$$

$$\vec{S}_3[\Sigma,\vec{j}](x,t)=\int\limits_{\Sigma}\mathbf{G}_3(x-y)\vec{j}(y,t-R/c)\,dy,\quad R=|x-y|.$$

5. Краевые значения электрического поля. Рассмотрим вопрос о краевых значениях векторного поля $\vec{E}(x,t)$, определяемого выражением (17), в котором функция $\vec{j}$ предполагается заданной и достаточно гладкой.

Теорема 1. *Пусть Σ – гладкая простая поверхность класса C^2, замкнутая или незамкнутая с краем, $\vec{j}(x,t)\in C^2(\Sigma\times\mathbb{R})$ – касательное векторное поле на поверхности Σ (в каждой точке $x\in\Sigma$ вектор $\vec{j}(x,t)$ лежит в касательной плоскости), электрическое поле определяется по формуле*

$$\vec{E}(x,t)=\vec{S}[\Sigma,\vec{j}](x,t). \tag{18}$$

Тогда в каждой точке $x\in\Sigma$, не являющейся точкой края, для каждого $t\in\mathbb{R}$ существуют краевые значения поля $\vec{E}(x,t)$:

$$\vec{E}^{\pm}(x,t)=\vec{S}[\Sigma,\vec{j}](x,t)\mp 2\pi\vec{n}(x)\operatorname{Div}\vec{j}(x,t), \tag{19}$$

где $\vec{n}(x)$ – орт вектора нормали к поверхности Σ в точке x, $\vec{E}^{+}$ и $\vec{E}^{-}$ – краевое значение поля $\vec{E}$ на поверхности Σ со стороны вектора $\vec{n}$ и с противоположной стороны, $\operatorname{Div}\vec{j}$ – поверхностная дивергенция поля $\vec{j}$, $\vec{S}[\Sigma,\vec{j}](x,t)$ – значение, определяемое в смысле конечной части по Адамару:

$$\vec{S}[\Sigma,\vec{j}](x,t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\vec{S}[\Sigma_\varepsilon,\vec{j}](x,t)-\frac{\pi\vec{j}(x,t)}{\varepsilon}\right\}, \tag{20}$$

где $\Sigma_\varepsilon=\Sigma\backslash U_\varepsilon(x)$, $U_\varepsilon(x)=\{y\in\mathbb{R}^3:|y-x|<\varepsilon\}$ – окрестность точки x радиуса ε, величина $\vec{S}[\Sigma_\varepsilon,\vec{j}](x,t)$ определяется формулой (17).

Замечание 1. В записи $\vec{j}(x,t)\in C^2(\Sigma\times\mathbb{R})$ в случае, когда Σ есть поверхность с краем, предполагается, что край является частью поверхности и, таким образом, поверхность Σ как множество точек в пространстве $\mathbb{R}^3$ является компактом.

Замечание 2. В формуле (20) предел вычисляется от всей суммы $\vec{S}$, определяемой вторым равенством в (17). При этом, как будет видно ниже из доказательства теоремы 1, при $x\in\Sigma$ интеграл $\vec{S}_1$ существует как несобственный и может быть рассмотрен отдельно. Сумма слагаемых $\vec{S}_2$ и $\vec{S}_3$ существует как интеграл в смысле конечной части по Адамару при условии, что эти два слагаемых рассматриваются совместно.

Для доказательства теоремы 1 сначала докажем лемму.

Лемма 1. *Пусть Σ – поверхность из теоремы 1, функция $K(x,y)$ определена и непрерывна при $x,y\in\mathbb{R}^3$, $x\neq y$, и подчинена оценке*

$$|K(x,y)|\leqslant\frac{C}{|x-y|^\beta},\quad x,y\in\mathbb{R}^3,\quad x\neq y,$$

$\beta\in(0,2)$ и C – некоторые константы.

Тогда функция

$$u(x) = \int\limits_{\Sigma} K(x,y)\,dy \tag{21}$$

определена при всех $x \in \mathbb{R}^3$ *и непрерывна в каждой точке* $x \in \Sigma$.

Доказательство. При всех $x \in \mathbb{R}^3$ интеграл в правой части выражения (21) существует, и значит значение функции $u(x)$ определено. Далее докажем непрерывность этой функции на поверхности.

Возьмём число α такое, что $\beta < \alpha < 2$, и представим ядро $K(x,y)$ в виде

$$|K(x,y)| \leqslant \frac{K^*(x,y)}{|x-y|^\alpha},$$

где $K^*(x,y) = K(x,y)|x-y|^\alpha$. Функция $K^*(x,y)$ непрерывна при всех $x, y \in \mathbb{R}^3$, если доопределить её значение $K^*(x,y)$ нулём при $x = y$.

Пусть $x \in \Sigma$ и $z \in \mathbb{R}^3$. Рассмотрим разность $\Delta = u(x) - u(z)$, которую представим в виде

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2, \quad \Delta_1 = \int\limits_{\Sigma} \frac{K^*(x,y) - K^*(z,y)}{|x-y|^\alpha}\,dy, \quad \Delta_2 = \int\limits_{\Sigma} K^*(z,y)\left\{\frac{1}{|x-y|^\alpha} - \frac{1}{|z-y|^\alpha}\right\}dy.$$

Пусть $U(x)$ – некоторая окрестность точки x. Функция $K^*(z,y)$ равномерно непрерывна на множестве аргументов $(z,y) \in U(x) \times \Sigma$, поэтому найдётся функция $\omega(\delta)$, стремящаяся к нулю при $\delta \to 0$, такая, что $|K^*(x,y) - K^*(z,y)| \leqslant \omega(|x-z|)$ при всех $(z,y) \in U(x) \times \Sigma$. Тогда

$$|\Delta_1| \leqslant \omega(|x-z|)I(x), \quad I(x) = \int\limits_{\Sigma} \frac{dy}{|x-y|^\alpha}.$$

При этом найдётся константа C, зависящая от поверхности Σ и параметра α, такая, что $|I(x)| \leqslant C$ (см., например, [8, с. 52, теорема 2.6]). Тогда $|\Delta_1| \to 0$ при $z \to x$.

Далее, разность Δ_2 представим в виде

$$\Delta_2 = \mathbf{A}[\psi_z](x) - \mathbf{A}[\psi_z](z), \tag{22}$$

где $\mathbf{A}[\psi]$ – оператор, ставящий в соответствие функции $\psi \in C(\Sigma)$ функцию

$$w(z) \equiv \mathbf{A}[\psi](z) = \int\limits_{\Sigma} A(x,y)\psi(y)\,dy, \quad A(x,y) = \frac{1}{|x-y|^\alpha}.$$

В формуле (22) $\psi_z(y) = K^*(z,y)$. Для ядра $A(x,y)$ легко доказать оценку

$$|A(x,y) - A(z,y)| \leqslant \frac{M|x-z|^\varepsilon}{|x-y|^{\alpha+\varepsilon}},$$

справедливую при всех $y \in \Sigma$, $|x-z| < |x-y|/2$, где ε – число, удовлетворяющее условиям $\alpha < \alpha + \varepsilon < 2$, M – некоторая константа, зависящая только от α и ε. Тогда из [8, с. 52–53, теорема 2.7] следует, что при каждом $z \in U(x)$ функция $w(z') = \mathbf{A}[\psi_z](z')$, порождаемая функцией ψ_z, непрерывна по Гёльдеру в окрестности $U(x)$ с некоторым показателем γ и некоторой константой C_γ, зависящей от γ, т.е. справедливо неравенство

$$|w(z') - w(z'')| \leqslant C_\gamma \|\psi_z\|_\infty |z' - z''|^\gamma, \quad z', z'' \in U(x), \quad \|\psi\|_\infty = \max_{y \in \Sigma} |\psi(y)|.$$

Остаётся заметить, что при любом $z \in U(x)$ выполнена оценка $\|\psi_z\|_\infty \leqslant C_1$, в которой $C_1 = \sup\limits_{z' \in U(x), y \in \Sigma} |K^*(z',y)|$. Тогда $|\Delta_2| \leqslant C_\gamma C_1 |x-z|^\gamma$ и $|\Delta_1| \to 0$ при $z \to x$, а значит, $u(z) \to u(x)$ при $z \to x$. Лемма доказана.

Замечание 3. В теоремах 2.6 и 2.7 из работы [8] рассматривается случай, когда поверхность, обозначенная нами как Σ, есть граница некоторой ограниченной области D, т.е. эта поверхность является замкнутой. Однако несложно увидеть, что при доказательстве этих теорем в [8] свойство замкнутости поверхности не используется, и для незамкнутой поверхности эти теоремы применимы.

Доказательство теоремы 1. Пусть поле $\vec{E}(x,t)$ определяется выражением (18) при $x \notin \Sigma$. Используя выражение (17) и учитывая соотношение

$$\mathbf{G}_2(x-y) = R\mathbf{G}_3(x-y), \quad R = |x-y|,$$

представим поле $\vec{E}(x,t)$ в виде

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_1(x,t) + \vec{E}_2(x,t) + \vec{E}_3(x,t),$$

где

$$\vec{E}_1(x,t) = \vec{S}_1[\Sigma,\vec{j}](x,t) = \frac{1}{c^2}\int\limits_{\Sigma} \mathbf{G}_1(x-y)\vec{j}\,''_{tt}(y,\tau)\,dy, \tag{23}$$

$$\vec{E}_2(x,t) = \int\limits_{\Sigma} \mathbf{G}_3(x-y)\left\{\vec{j}(y,\tau) + \frac{R}{c}\vec{j}\,'_t(y,\tau) - \vec{j}(y,t)\right\}dy, \tag{24}$$

$$\vec{E}_3(x,t) = \int\limits_{\Sigma} \mathbf{G}_3(x-y)\vec{j}(y,t)\,dy,$$

$$\vec{j}\,'_t(y,t) = \frac{\partial \vec{j}(y,t)}{\partial t}, \quad \vec{j}\,''_{tt}(y,t) = \frac{\partial^2 \vec{j}(y,t)}{\partial t^2}, \quad R = |x-y|, \quad \tau = t - \frac{R}{c}.$$

Функции

$$\vec{K}_1(x,y,t) = \mathbf{G}_1(x-y)\vec{j}\,''_{tt}(y,\tau)$$

и

$$\vec{K}_2(x,y,t) = \mathbf{G}_3(x-y)\left\{\vec{j}(y,\tau) + \frac{R}{c}\vec{j}\,'_t(y,\tau) - \vec{j}(y,t)\right\}$$

при каждом $t \in (t_1,t_2)$ являются непрерывными функциями от $x, y \in \mathbb{R}^3$ (при $x \neq y$) и подчинены оценкам

$$|\vec{K}_1(x,y,t)| \leqslant O(1/R), \quad |\vec{K}_2(x,y,t)| \leqslant O(1/R).$$

Тогда по лемме 1 при каждом $t \in (t_1,t_2)$ и в каждой точке $x \in \Sigma$ функции $\vec{E}_1(x,t)$, $\vec{E}_2(x,t)$, определённые выражениями (23), (24), являются непрерывными в этой точке.

Функцию $\vec{E}_3(x,t)$ при $x \notin \Sigma$ можно записать в виде

$$\vec{E}_3(x,t) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\int\limits_{\Sigma} \vec{j}(y,t)F(x-y)\,dy, \quad F(x-y) = \frac{e^{i\omega R/c}}{R}, \quad R = |x-y|.$$

Преобразуем последнее выражение:

$$\vec{E}_3(x,t) = \vec{E}_{31}(x,t) + \vec{E}_{32}(x,t),$$

$$\vec{E}_{31}(x,t) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\int\limits_{\Sigma} \vec{j}(y,t)F_0(x-y)\,dy, \tag{25}$$

$$\vec{E}_{32}(x,t) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\int\limits_{\Sigma} \vec{j}(y,t)\tilde{F}(x-y)\,dy, \tag{26}$$

$$F_0(x-y) = \frac{1}{R}, \quad \tilde{F}(x-y) = \frac{e^{i\omega R/c}-1}{R}, \quad R = |x-y|.$$

При этом функция

$$\vec{K}_{32}(x,y,t) = \operatorname{grad}_x \operatorname{div}_x[\vec{j}(y,t)\tilde{F}(x-y)]$$

при каждом $t \in (t_1, t_2)$ является непрерывной функцией от $x, y \in \mathbb{R}^3$ (при $x \neq y$) и подчинена оценке

$$|\vec{K}_{32}(x,y,t)| \leqslant O(1/R).$$

Поэтому по лемме 1 функция $\vec{E}_{32}(x,t)$ при каждом $t \in (t_1, t_2)$ и в каждой точке $x \in \Sigma$ определённая выражением (26), является непрерывной в этой точке.

Наконец, функция $\vec{E}_{31}(x,t)$, определяемая выражением (25), была рассмотрена в теореме 1 статьи [9], из которой следует, что при каждом значении параметра t в каждой точке $x \in \Sigma$, не являющейся точкой края, существуют краевые значения поля $\vec{E}_{31}(x,t)$:

$$\vec{E}_{31}^{\pm}(x,t) = \vec{E}_{31}(x,t) \mp 2\pi\vec{n}(x)\operatorname{Div}\vec{j}(x),$$

где $\vec{E}_{31}(x,t)$ – прямое значение, получаемое непосредственно из выражения (25), если интеграл в нем понимать в смысле конечной части по Адамару:

$$\vec{E}_{31}(x,t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\operatorname{grad}\operatorname{div}\int\limits_{\Sigma_\varepsilon} \vec{j}(y,t)F_0(x-y)\,dy - \frac{\pi\vec{j}(x,t)}{\varepsilon}\right\},$$

поверхность Σ_ε определена в формуле (20). Теорема доказана.

6. Интегро-дифференциальное уравнение для поверхностных токов. Вернёмся к исходной задаче (1)–(4) для уравнений Максвелла. Предположим, что суммарная поверхность идеально проводящих тел Σ является кусочно-гладкой и состоит из конечного числа компонент, каждая из которых есть гладкая поверхность класса C^2, замкнутая или незамкнутая с краем. Предположим, что у каждой точки $x \in \Sigma^{\text{in}}$ существует окрестность $U(x)$ такая, что множество

$$\Sigma_x = \Sigma \bigcap \bar{U}(x), \tag{27}$$

где $\bar{U}(x)$ – замыкание окрестности $U(x)$, есть простая гладкая поверхность с краем класса C^2, состоящая только из точек гладкости поверхности Σ.

В дальнейших рассуждениях считаем, что поверхность Σ как множество точек в пространстве $\mathbb{R}^3$ замкнуто и ограничено, что означает, в частности, что точки края относятся к поверхности Σ.

Решение задачи (1)–(4) на временно́м интервале $t \in \mathbb{R}$ ищем в виде (17), где $\vec{j}(x,t)$ – неизвестное касательное поле (поверхностные токи), которое ищется в классе функций, удовлетворяющих условиям:

i1) в каждый момент времени $t \in \mathbb{R}$ функция $\vec{j}(x,t)$ интегрируема на поверхности Σ;

i2) для каждой точки $x \in \Sigma$, являющейся точкой гладкости поверхности Σ, поле $\vec{j}$ удовлетворяет условию $\vec{j} \in C^2[\Sigma_x \times \mathbb{R}]$, Σ_x – участок поверхности Σ вида (27).

Если касательное поле $\vec{j}(x,t)$ удовлетворяет условиям i1), i2), то формула (17) определяет поле $\vec{E}$, определённое при $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$. При этом в каждой точке $x \in \Sigma$, являющейся точкой гладкости, это поле имеет краевые значения на обеих сторонах поверхности Σ, для которых справедливы формулы (19), (20). Это следует из теоремы 1, если учесть, что поле $\vec{E}$ имеет вид $\vec{E} = \vec{S}[\Sigma_x, \vec{j}] + \vec{S}[\Sigma\backslash\Sigma_x, \vec{j}]$, где к первому слагаемому применима теорема 1, второе слагаемое – непрерывная в окрестности точки x функция.

Тогда выполнение граничного условия (3) равносильно уравнению относительно поверхностных токов

$$\vec{n}(x)\times\frac{1}{4\pi}\vec{S}[\Sigma,\vec{j}](x,t)=-\vec{n}(x)\times\vec{E}_{\text{inc}}(x,t),\quad x\in\Sigma^{\text{in}},\quad t\in\mathbb{R},$$

которое можно записать в виде

$$\vec{n}(x)\times\int\limits_{\Sigma}\left[\frac{1}{c^2}\mathbf{G}_1(x-y)\vec{j}\,''_{tt}(y,\tau)+\frac{1}{c}\mathbf{G}_2(x-y)\vec{j}\,'_t(y,\tau)+\mathbf{G}_1(x-y)\vec{j}(y,\tau)\right]dy=\vec{f}(x,t),\tag{28}$$

$$\vec{f}(x,t)=-4\pi\vec{n}(x)\times\vec{E}_{\text{inc}}(x,t),$$

интеграл в уравнении (28) понимается в смысле конечной части по Адамару, уравнение (28) должно выполняться при всех $t\in T$ и для всех точек $x\in\Sigma^{\text{in}}$.

Формула (17) даёт выражение через поверхностные токи для электрического поля $\vec{E}(x,t)$. Получим соответствующее выражение для магнитного поля $\vec{H}(x,t)$.

Пусть $\vec{H}_\omega(x)$, $x\in\Omega$, $\omega\in\mathbb{R}$, – преобразование фурье-поля $\vec{H}(x,t)$. Из первого уравнения в системе (10) и формулы (12) следует

$$\vec{H}_\omega(x)=-\frac{i}{\omega\mu}\operatorname{rot}\vec{K}[\Sigma,\vec{j}_\omega](x)=-i\omega\varepsilon\operatorname{rot}\int\limits_{\Sigma}\vec{j}_\omega(y)F(x-y)\,d\sigma_y.\tag{29}$$

Последнее выражение запишем в виде

$$\vec{H}_\omega(x)=i\omega\varepsilon\int\limits_{\Sigma}\vec{j}_\omega(y)\times\operatorname{grad}_xF(x-y)\,d\sigma_y,$$

$$\operatorname{grad}_xF(x-y)=(x-y)\frac{e^{i\omega R/c}}{4\pi}\left(i\frac{\omega}{c}\frac{1}{R^2}-\frac{1}{R^3}\right),\quad R=|x-y|.$$

Тогда

$$\vec{H}_\omega(x)=-i\omega\frac{\varepsilon}{4\pi}\int\limits_{\Sigma}\vec{j}_\omega(y)\times\frac{x-y}{R^3}e^{i\omega R/c}\,d\sigma_y-\frac{\omega^2}{c}\frac{\varepsilon}{4\pi}\int\limits_{\Sigma}\vec{j}_\omega(y)\times\frac{x-y}{R^2}e^{i\omega R/c}\,d\sigma_y.\tag{30}$$

Применяя обратное преобразование Фурье и используя формулы (5)–(7), получаем

$$\vec{H}(x,t)=\frac{\varepsilon}{4\pi}\int\limits_{\Sigma}\vec{j}\,'_t(y,\tau)\times\frac{x-y}{R^3}\,d\sigma_y+\frac{\varepsilon}{4\pi c}\int\limits_{\Sigma}\vec{j}\,''_t(y,\tau)\times\frac{x-y}{R^2}\,d\sigma_y,\quad \tau=t-\frac{R}{c},\quad R=|x-y|.\tag{31}$$

Теперь докажем, что если касательное поле $\vec{j}$ является решением уравнения (28), то поля $\vec{E}(x,t)$ и $\vec{H}(x,t)$, определяемые выражениями (17) и (31) соответственно, являются решением исходной электродинамической задачи.

Лемма 2. *Пусть $\vec{j}(y,t)$, $y\in\Sigma$, $t\in\mathbb{R}$, – касательное векторное поле, удовлетворяющее условиям:*

l1) $\vec{j}\in L_1[\Sigma\times\mathbb{R}]\bigcap C[\Sigma^{\text{in}}\times\mathbb{R}]$;

l2) существует функция $g(t)$, $g\in C(\mathbb{R})\bigcap L_1(\mathbb{R})\bigcap L_2(\mathbb{R})$, такая, что для каждого $t\in\mathbb{R}$ существует интеграл

$$\int\limits_{\Sigma}|\vec{j}(y,t)|\,d\sigma_y\leqslant g(t).$$

Пусть

$$\vec{E}(x,t) = \int\limits_{\Sigma} \mathbf{K}(x,y)\vec{j}(y,\tau)\,d\sigma_y, \quad \tau = t - \frac{R}{c}, \quad R = |x-y|, \tag{32}$$

где $\mathbf{K}(x,y)$ *– оператор, определяемый матрицей* $(K_{i\,j}(x,y))_{3\times 3}$, $x\in\Omega$, $y\in\Sigma$, Ω *– область в* $\mathbb{R}^3$, *причём* $K_{i\,j}(x,y)\in C(\Omega\times\Sigma)$, C *– заданная константа.*

Тогда:

1) для любого $y\in\Sigma$ *существует функция* $\vec{j}_\omega(y) = F[\vec{j}]$ *(как функция от* $\omega\in\mathbb{R}$*), при каждом* $\omega\in\mathbb{R}$ *выполнено условие* $\vec{j}_\omega\in L_1[\Sigma]$ *(как функции от* $y\in\Sigma$*) и*

$$\int\limits_{\Sigma} |\vec{j}_\omega(y)|\,d\sigma_y \leqslant \int\limits_{\Sigma\times(-\infty,\infty)} |\vec{j}(y,t)|\,d\sigma_y\,dt;$$

2) функция $\vec{E}(x,t)$, *определённая выражением (32) для* $x\in\Omega$, $t\in\mathbb{R}$, *удовлетворяет условию* $\vec{E}(x,t)\in C(\Omega,\mathbb{R})$. *Для любого* $x\in\Omega$ *существует функция* $\vec{E}_\omega(x) = F[\vec{E}]$ *аргумента* $\omega\in\mathbb{R}$. *При каждом* $\omega\in\mathbb{R}$ *функция* $\vec{E}_\omega(x)$ *удовлетворяет условию* $\vec{E}_\omega\in C(\Omega)$ *и справедлива формула*

$$\vec{E}_\omega(x) = \int\limits_{\Sigma} \mathbf{K}(x,y)\vec{j}_\omega(y)e^{i\omega R/c}\,d\sigma_y, \quad R = |x-y|. \tag{33}$$

Кроме того, справедлива формула

$$\vec{E} = F^{-1}[\vec{E}_\omega]. \tag{34}$$

Доказательство. Из условия l2) следует, что при каждом $y\in\Sigma$ функция $\vec{j}_\omega(y) = F[\vec{j}]$ определена. По условию l1) существует интеграл

$$I = \int\limits_{\Sigma\times(-\infty,\infty)} \vec{j}(y,t)e^{i\omega t}\,d\sigma_y\,dt.$$

Пусть $T_m = [-m,m]$, $m\in\mathbb{N}$. Используя условие l2) и теорему Фубини для интеграла по произведению множеств ограниченной меры [7, с. 335], имеем

$$I = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{\Sigma\times T_m} \vec{j}(y,t)e^{i\omega t}\,d\sigma_y\,dt = \int\limits_{\Sigma}\Bigg[\int\limits_{(-\infty,\infty)} \vec{j}(y,t)e^{i\omega t}\,dt\Bigg]d\sigma_y =$$

$$= \int\limits_{\Sigma}\Bigg[\lim_{m\to\infty}\int\limits_{T_m}\vec{j}(y,t)\,dt\Bigg]d\sigma_y = \int\limits_{\Sigma}\vec{j}_\omega(y)\,d\sigma_y.$$

Тогда $\vec{j}_\omega\in L_1[\Sigma]$ и справедливы неравенства

$$\int\limits_{\Sigma}|\vec{j}_\omega(y)|\,d\sigma_y \leqslant \int\limits_{\Sigma\times(-\infty,\infty)} |\vec{j}(y,t)e^{i\omega t}|\,d\sigma_y\,dt \leqslant \int\limits_{\Sigma\times(-\infty,\infty)} |\vec{j}(y,t)|\,d\sigma_y\,dt.$$

Тем самым утверждение 1) доказано.

Перейдём к доказательству утверждения 2). Можно построить систему измеримых поверхностей $\Sigma_m\subset\Sigma^{\rm in}$, $m\in\mathbb{N}$, такую, что каждая поверхность Σ_m есть замкнутое множество в пространстве $\mathbb{R}^3$ и $\mu(\Sigma\backslash\Sigma_m)\to 0$ при $m\to\infty$, где μ – площадь поверхности. Пусть

$$\vec{E}(x,t) = \lim_{m\to\infty}\vec{E}_m(x,t), \quad \vec{E}_m(x,t) = \int\limits_{\Sigma_m}\mathbf{K}(x,y)\vec{j}(y,\tau)\,d\sigma_y.$$

При каждом m выполнено условие $\vec{E}_m(x,t)\in C(\Omega\times\mathbb{R})$, так как для любых $x_0\in\Omega$ и $t_0\in\in\mathbb{R}$ найдутся окрестности $U(x_0)\subset\Omega$ и $U(t_0)\subset\mathbb{R}$ такие, что функция $\mathbf{K}(x,y)\vec{j}(y,\tau)$ есть равномерно непрерывная функция аргументов x, y, t на множестве $U(x_0)\times\Sigma_m\times U(t_0)$. Тогда в силу условия l1) интеграл в правой части выражения (32) существует при каждых $(x,t)\in U(x_0)\times U(t_0)$, причём

$$\vec{E}(x,t)=\lim_{m\to\infty}\vec{E}_m(x,t),$$

и выполнено условие $\vec{E}(x,t)\in C(U(x_0)\times U(t_0))$, так как последний предел существует на данном множестве аргументов (x,t) в смысле равномерной сходимости.

Таким образом, функция $\vec{E}(x,t)$ определена и $\vec{E}(x,t)\in C(\Omega,t)$.

Рассмотрим для произвольного $x\in\Omega$ интеграл

$$J(x)=\int\limits_{\Sigma\times(-\infty,\infty)}\mathbf{K}(x,y)\vec{j}(y,\tau)e^{i\omega(\tau+R/c)}\,d\sigma_y\,d\tau.$$

Этот интеграл существует в силу условия l1). Опять обозначив $T_m=[-m,m]$, $m\in\mathbb{N}$, и применив теорему Фубини, можем записать

$$J(x)=\lim_{m\to\infty}\int\limits_{T_m}\biggl[\int\limits_{\Sigma}\mathbf{K}(x,y)\vec{j}(y,t)\,d\sigma_y\biggr]e^{i\omega(\tau+R/c)}\,dt=\vec{E}_\omega(x).$$

С другой стороны,

$$J(x)=\lim_{m\to\infty}\int\limits_{\Sigma}\mathbf{K}(x,y)\biggl[\int\limits_{T_m}\vec{j}(y,\tau)e^{i\omega(\tau+R/c)}\,d\tau\biggr]d\sigma_y=\int\limits_{\Sigma}\mathbf{K}(x,y)\vec{j}_\omega(y)e^{i\omega R/c}\,d\sigma_y.$$

При этом непрерывность функции $\vec{E}_\omega(x)$ по переменной x следует из представления этой функции в виде последнего интеграла и условия $\vec{j}_\omega\in L_1[\Sigma]$.

Докажем теперь, что при каждом $x\in\Omega$ выполнено условие $\vec{E}(x,t)\in L_2(\mathbb{R})$ как функция от аргумента t. Для этого заметим, что для рассматриваемой точки $x\in\Omega$ и для каждого отрезка $T_m=[-m,m]$, $m\in\mathbb{N}$, существует интеграл

$$\int\limits_{T_m}|\vec{E}(x,t)|^2\,dt=\int\limits_{T_m}\biggl|\int\limits_{\Sigma}\mathbf{K}(x,y)\vec{j}(y,\tau)\,d\sigma_y\biggr|^2\,dt.$$

Для рассматриваемой точки x найдётся константа $M=M(x)$ такая, что $|\mathbf{K}(x,y)|\leqslant M$ для всех $y\in\Sigma$. Тогда

$$\int\limits_{T_m}|\vec{E}(x,t)|^2\,dt\leqslant M^2\int\limits_{T_m}\int\limits_{\Sigma}|\vec{j}(y,\tau)|^2\,d\sigma_y\,dt\leqslant M^2\int\limits_{\Sigma}\biggl(\int\limits_{T_m}|\vec{j}(y,\tau)|^2\,dt\biggr)d\sigma_y\leqslant$$

$$\leqslant M^2\int\limits_{\Sigma}\biggl(\int\limits_{(-\infty,\infty)}|g(t)|^2\,dt\biggr)d\sigma_y.$$

Значит, существует интеграл

$$\int\limits_{(-\infty,\infty)}|\vec{E}(x,t)|^2\,dt=\lim_{m\to\infty}\int\limits_{T_m}|\vec{E}(x,t)|^2\,dt.$$

Тем самым условие $\vec{E}(x,t) \in L_2(\mathbb{R})$ для каждой точки x выполнено, и тогда справедлива формула (34). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $\vec{j}(y,t)$, $y \in \Sigma$, $t \in \mathbb{R}$, – касательное векторное поле такое, что при всех $y \in \Sigma$, $t \in \mathbb{R}$ существует производная $\vec{j}'_t(y,t)$ и для функций $\vec{j}(y,t)$ и $\vec{j}'_t(y,t)$ выполнены условия l1) и l2) из леммы 2.*

Рассмотрим поле $\vec{E}(x,t)$, определяемое формулой (32), где $K_{i\,j}(x,y) \in C(\Omega \times \Sigma)$ и существуют частные производные $\partial K_{i\,j}(x,y)/\partial x_m \in C(\Omega \times \Sigma)$, $m = 1,2,3$.

Тогда существуют производные $\partial\vec{E}(x,t)/\partial t \in C(\Omega,\mathbb{R})$ и $\partial\vec{E}(x,t)/\partial x_m \in C(\Omega,\mathbb{R})$, $m = 1,2,3$. Для каждого $x \in \Omega$ существуют образы фурье-функций $\partial\vec{E}(x,t)/\partial t$ и $\partial\vec{E}(x,t)/\partial x_n$, $n = 1,2,3$, причём справедливы формулы

$$F\left[\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right] = -i\omega\vec{E}_\omega, \quad \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -i\omega F^{-1}[\vec{E}_\omega], \tag{35}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_n}F[\vec{E}](x) = \frac{\partial\vec{E}_\omega}{\partial x_n}(x) = \int\limits_\Sigma \frac{\partial}{\partial x_n}(\mathbf{K}(x,y)e^{i\omega R/c})\vec{j}_\omega(y)\,d\sigma_y, \tag{36}$$

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial x_n} = F^{-1}\left[\frac{\partial\vec{E}_\omega}{\partial x_n}\right], \tag{37}$$

где $\vec{E}_\omega(x) = F[\vec{E}]$ – функция, определяемая выражением (33).

Доказательство. А) Рассмотрим производную $\partial\vec{E}(x,t)/\partial t$. Введём, как и при доказательстве леммы 1, систему поверхностей $\Sigma_m \subset \Sigma^{\text{in}}$, $m \in \mathbb{N}$, исчерпывающую поверхность Σ, и в результате получим

$$\partial\vec{E}(x,t)/\partial t = \lim_{m\to\infty}\int\limits_{\Sigma_m}\mathbf{K}(x,y)\vec{j}'_t(y,\tau)\,d\sigma_y = \int\limits_\Sigma \mathbf{K}(x,y)\vec{j}'_t(y,\tau)\,d\sigma_y.$$

Тогда выполнение формул (35) сразу следует из леммы 2.

Б) Рассмотрим производные $\partial\vec{E}(x,t)/\partial x_n$, $n = 1,2,3$. Продифференцируем под знаком интеграла и запишем

$$\frac{\partial\vec{E}(x,t)}{\partial x_n} = \int\limits_\Sigma \frac{\partial\mathbf{K}(x,y)}{\partial x_n}\vec{j}(y,\tau)\,d\sigma_y + \int\limits_\Sigma \mathbf{K}(x,y)\vec{j}'_t(y,\tau)\frac{x_n - y_n}{cR}\,d\sigma_y \tag{38}$$

(существование интегралов в правой части и возможность внесения производной под знак интеграла можно доказать, заменив интегралы по поверхности Σ на интегралы по поверхностям $\Sigma_m \subset \Sigma^{\text{in}}$, исчерпывающим поверхность Σ, с помощью перехода к пределу при $m \to \infty$).

Применяя к каждому из полей, определяемых интегралами в правой части равенства (38), лемму 2 и учитывая равенство

$$F[\vec{j}'_t] = -i\omega F[\vec{j}],$$

заключаем, что

$$F[\partial\vec{E}/\partial x_n] = \int\limits_\Sigma \frac{\partial\mathbf{K}(x,y)}{\partial x_n}\vec{j}_\omega(y)e^{i\omega R/c}\,d\sigma_y + i\omega\int\limits_\Sigma \mathbf{K}(x,y)\vec{j}_\omega(y)\frac{x_n - y_n}{cR}e^{i\omega R/c}\,d\sigma_y =$$

$$= \int\limits_\Sigma \frac{\partial}{\partial x_n}(\mathbf{K}(x,y)e^{i\omega R/c})\vec{j}_\omega(y)\,d\sigma_y.$$

В силу условия $\vec{j}_\omega \in L_1[\Sigma]$, выполненного при каждом значении ω, приходим к равенствам

$$F[\partial\vec{E}/\partial x_n] = \frac{\partial}{\partial x_n}\int\limits_\Sigma \mathbf{K}(x,y)e^{i\omega R/c}\vec{j}_\omega(y)\,d\sigma_y = \frac{\partial}{\partial x_n}E_\omega(x).$$

Последние равенства означают выполнение формул (36). Наконец, из леммы 2, применённой к полю $\partial\vec{E}/\partial x_n$ в виде (38), следует формула (37). Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть касательное поле $\vec{j}$ лежит в классе функций, удовлетворяющих условиям i1) и i2), удовлетворяет уравнению (28) при $t\in\mathbb{R}$, и дополнительно функция $\vec{j}$ и её производные $\vec{j}_t^{(k)} = \partial^k\vec{j}(y,t)/\partial t^k$, $k=\overline{1,4}$, определены и удовлетворяют условиям l1) и l2) из леммы 2.*

Тогда поля $\vec{E}(x,t)$, $\vec{H}(x,t)$, определяемые выражениями (17) и (31) для всех $x\in\Omega$, $t\in\mathbb{R}$, являются решением уравнений (1), (2), удовлетворяющим условиям (3), (4).

Доказательство. Пусть поле $\vec{j}$ – решение уравнения (28) в указанном классе функций. Построим поля $\vec{E}(x,t)$, $\vec{H}(x,t)$, определяемые выражениями (17) и (31) для любых $x\in\Omega$, $t\in\mathbb{R}$. По теореме 1 выполнено граничное условие (3), а из лемм 2 и 3 следует, что поля $\vec{E}(x,t)$ и $\vec{H}(x,t)$ лежат в классе $C^2(\Omega\times\mathbb{R})$.

Докажем, что уравнения (1), (2) выполняются в области Ω.

По лемме 2, во-первых, существуют фурье-образы функций $\vec{j}$ и $\vec{j}_t^{(k)}$, $k=\overline{1,4}$, причём если $\vec{j}_\omega = F[\vec{j}]$, то $F[\vec{j}_t^{(k)}] = (i\omega)^k\vec{j}_\omega$, и при каждом $\omega\in\mathbb{R}$ выполнено условие $\vec{j}_\omega\in L_1[\Sigma]$.

Далее, при каждом $x\in\Omega$ существуют фурье-образы функций $\vec{E}(x,t)$ и $\vec{H}(x,t)$: $\vec{E}_\omega(x) = F[\vec{E}]$ и $\vec{H}_\omega(x) = F[\vec{H}]$. При этом функции $\vec{E}_\omega(x)$ и $\vec{H}_\omega(x)$ дважды дифференцируемы по переменной x в области Ω, и из леммы 3 следует, что для функций $\vec{E}_\omega(x)$ и $\vec{H}_\omega(x)$ справедливы выражения (16) и (30) соответственно, где $\vec{j}_\omega\in L_1(\Sigma)$. Но тогда для этих полей справедливы и выражения (12) и (29) соответственно. Значит, поля $\vec{E}_\omega(x)$ и $\vec{H}_\omega(x)$ удовлетворяют уравнениям (10).

Из лемм 2 и 3 следует, что

$$\vec{E} = F^{-1}[\vec{E}_\omega], \quad \vec{H} = F^{-1}[\vec{H}_\omega],$$

$$\partial\vec{E}/\partial x_i = F^{-1}[\partial\vec{E}_\omega/\partial x_i], \quad \partial\vec{H}/\partial x_i = F^{-1}[\partial\vec{H}_\omega/\partial x_i],$$
$$\partial\vec{E}/\partial t = -F^{-1}[i\omega\vec{E}_\omega], \quad \partial\vec{H}/\partial t = -F^{-1}[i\omega\vec{H}_\omega].$$

Применяя обратное преобразование Фурье к уравнениям (10), доказываем выполнение уравнений (1), (2).

Наконец, докажем выполнение условий (4) на бесконечности.

Из формул (17) и (31) с учётом выражений (13)–(15) следует, что

$$\vec{E}(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2}\int\limits_\Sigma \left(-\frac{\vec{j}''_{tt}(y,\tau)}{|x|} + \frac{x}{|x|^2}(x,\vec{j}''_{tt}(y,\tau))\right)dy + o(1/|x|^2),$$

$$\vec{H}(x,t) = \frac{\varepsilon}{4\pi c}\int\limits_\Sigma \vec{j}''_t(y,\tau)\times\frac{x}{|x|^2}\,d\sigma_y + o(1/|x|^2).$$

Тогда, учитывая равенство $1/(\varepsilon c) = \sqrt{\mu/\varepsilon}$, получаем

$$\left[\frac{x}{|x|}\times\vec{E}\right] = -\frac{1}{4\pi c^2}\int\limits_\Sigma \left(\frac{x}{|x|^2}\times\vec{j}''_{tt}(y,\tau)\right)dy + o(1/|x|^2) = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\vec{H}(x,t) + o(1/|x|^2),$$

$$\frac{x}{|x|}\times\vec{H}(x,t)=\frac{\varepsilon}{4\pi c|x|^3}\int\limits_{\Sigma} x\times[\vec{j}_t''(y,\tau)\times x]\,d\sigma_y+o(1/|x|^2)=$$

$$=\frac{\varepsilon}{4\pi c}\int\limits_{\Sigma}\left(\frac{\vec{j}_t''(y,\tau)}{|x|}-\frac{x}{|x|^2}(x,\vec{j}_{tt}''(y,\tau))\right)d\sigma_y+o(1/|x|^2),$$

$$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left[\frac{x}{|x|}\times\vec{H}(x,t)\right]=-\vec{E}(x,t)+o(1/|x|^2),$$

откуда следует, что условия (4) выполнены. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20087), а также при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-286.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Volakis J.L., Sertel K.* Integral Equation Methods for Electromagnetics. Raleigh, 2012.
2. *Gibson W.* The Method of Moments in Electromagnetics. Boca Raton, 2008.
3. Вычислительные методы в электродинамике / Под. ред. Р.М. Митра. М., 1977.
4. *Смирнов Ю.Г.* Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза, 2009.
5. *Самохин А.Б.* Объемные сингулярные интегральные уравнения электродинамики. М., 2021.
6. *Хёнл Х., Мауэ А., Веспфаль К.* Теория дифракции. М., 1964.
7. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., 2004.
8. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М., 1987.
9. *Захаров Е.В., Рыжаков Г.В., Сетуха А.В.* Численное решение трёхмерных задач дифракции электромагнитных волн на системе идеально проводящих поверхностей методом гиперсингулярных интегральных уравнений // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 9. С. 1253–1263.

МИРЭА – Российский технологический университет,
г. Москва,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Институт вычислительной математики
имени Г.И. Марчука РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 30.03.2022 г.
После доработки 30.03.2022 г.
Принята к публикации 25.05.2022 г.