ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 8, с. 1105–1111

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1

СИНТЕЗ СУБОПТИМАЛЬНЫХ ФИЛЬТРОВ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

© 2022 г. **В. В. Фомичев, М. А. Каменщиков**

Рассматривается проблема построения субоптимальных фильтров (оптимальных фильтров пониженного порядка, т.е. фильтров для линейных векторных функционалов от фазового вектора системы) для стохастических многосвязных объектов управления. Способ построения таких фильтров представлен в каноническом базисе Люенбергера. На численном примере системы седьмого порядка показано, что с помощью предложенного подхода повышается оптимальность фильтров по сравнению с фильтрами на основе скалярных наблюдателей.

DOI: 10.31857/S0374064122080106, EDN: CGZDBG

Введение. Рассмотрена задача о построении субоптимальных фильтров, восстанавливающих по измеряемому векторному выходу несмещённую и оптимальную оценку векторного линейного функционала от фазового вектора состояния объектов управления со стохастическими возмущениями. Возмущения в системе представляют некоррелированные между собой в разные моменты времени белые аддитивные шумы с априорно известными вероятностными характеристиками, некоррелированные с начальным состоянием системы и воздействующие как на объект, так и на канал измерений. В качестве критерия оптимальности выбрана среднеквадратичная ошибка в установившемся режиме. Для вычисление критерия применён метод интегральных квадратичных оценок качества.

Ранее для решения задачи о построении минимального функционального наблюдателя для детерминированных линейных стационарных систем был предложен метод, основанный на скалярных наблюдателях [1, с. 80] для различных случаев: скалярный и векторных выход, скалярный и векторный функционал. Кроме того, были предложены использующие канонические представления методы синтеза субоптимальных фильтров для стохастических систем со скалярным выходом и скалярным функционалом как в непрерывном [2], так и в дискретном времени [3, 4].

Для стохастических многосвязных систем (векторный выход и векторный функционал) в настоящей работе предлагается подход для синтеза субоптимальных фильтров в каноническом базисе Люенбергера (см. [5]). Предложенный подход позволяет улучшить оптимальность фильтров по сравнению с фильтрами на основе скалярных наблюдателей. В отличие от существующих подходов [6, 7] к построению функциональных наблюдателей, динамический порядок субоптимальных фильтров не обязательно совпадает с размерностью векторного функционала от фазового вектора состояния. Кроме того, в работе представлена формула для нахождения общего количества неизвестных параметров субоптимальных фильтров в канонической форме и предложено левое матричное дробное описание передаточной функции для системы в отклонениях.

1. Постановка задачи. Ставится задача субоптимальной фильтрации для многосвязной динамической системы, заданной системой разностных уравнений

$$x_{i+1} = Ax_i + w_i, \quad y_i = Cx_i + v_i; \quad i = 0, 1, 2, \ldots; \tag{1}$$

где $x_i \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор состояния, $y_i \in \mathbb{R}^l$ – известный вектор измерений; $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$ – постоянные матрицы; w_i и v_i – некоррелированные между собой случайные процессы, которые имеют следующие вероятностные характеристики: $\mathbb{E}[w_i] = 0$, $\mathbb{E}[v_i] = 0$, $\mathbb{E}[w_i w_j^{\mathrm{T}}] = Q\delta_{ij}$, $\mathbb{E}[v_i v_j^{\mathrm{T}}] = R\delta_{ij}$, δ_{ij} – символ Кронекера; начальное условие x_0 – случайная величина, некоррелированная со случайными процессами w_i и v_i и имеющая следующие вероятностные характеристики: $\mathbb{E}[x_0] = \bar{x}_0$, $\mathbb{E}[(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)^{\mathrm{T}}] = P_0$; здесь Q, P_0 – положительно полуопределённые матрицы, R – положительно определённая матрица.

Требуется на основе наблюдения выхода y_i определить несмещённую оценку $\widetilde{\sigma}_i$ векторного линейного функционала от неизвестного фазового вектора

$$\sigma_i = Fx_i, \quad F \in \mathbb{R}^{p\times n}, \quad \sigma_i \in \mathbb{R}^p, \quad i = 0,1,2,\ldots, \tag{2}$$

обеспечивающую минимум установившегося среднего значения квадрата ошибки наблюдения:

$$J = \lim_{i\to\infty} \mathbb{E}[(\sigma_i - \widetilde{\sigma}_i)^{\mathrm{т}}(\sigma_i - \widetilde{\sigma}_i)]. \tag{3}$$

Не ограничивая общности рассуждений, считаем, что $\operatorname{rank} C = l$ и пара $\{C, A\}$ наблюдаема и задана в каноническом базисе Люенбергера [1, с. 31; 8, с. 44]:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & A_{ll} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & C_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & C_l \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l\times n},$$

$$A_{jj} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_{\theta_{j-1}+1} \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_{\theta_{j-1}+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -\alpha_{\theta_{j-1}+\nu_j} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\nu_j\times\nu_j}, \quad C_j = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times\nu_j}, \quad j = \overline{1,l}, \tag{4}$$

где $\nu_j \geqslant 1$ – индексы наблюдаемости пары $\{C_j, A_{jj}\}$; $\theta_0 = 0$, $\theta_j = \sum_{i=1}^{j} \nu_i$, $j = \overline{1,l}$, – суммы индексов наблюдаемости, причём $\theta_l = n$; $\alpha_{\theta_{j-1}+\eta_j}$, $\eta_j = \overline{1,\nu_j}$, – коэффициенты характеристического полинома матрицы A_{jj}, т.е.

$$\alpha_j(z) = \det(zI_{\nu_j} - A_{jj}) = z^{\nu_j} + \alpha_{\theta_{j-1}+\nu_j} z^{\nu_j - 1} + \ldots + \alpha_{\theta_{j-1}+1}.$$

Характеристический полином матрицы A при этом равен

$$\alpha(z) = \det(zI_n - A) = \prod_{j=1}^{l} \alpha_j(z) = \prod_{j=1}^{l} \det(zI_{\nu_j} - A_{jj}).$$

2. Построение фильтров. Пусть при некотором k для матрицы F имеет место разложение

$$F = PT + VC,$$

где $P \in \mathbb{R}^{p\times k}$, $T \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $V \in \mathbb{R}^{p\times l}$ – неизвестные постоянные матрицы, подлежащие дальнейшему нахождению. Тогда для восстановления неизвестного вектора $q_i = Tx_i \in \mathbb{R}^k$ используется субоптимальный фильтр порядка k вида

$$\widetilde{q}_{i+1} = N\widetilde{q}_i + My_i, \quad \widetilde{q}_0 = T\bar{x}_0, \quad i = 0,1,2,\ldots, \tag{5}$$

где $\widetilde{q}_i \in \mathbb{R}^k$ – фазовый вектор состояния фильтра; $M \in \mathbb{R}^{k\times l}$, $N \in \mathbb{R}^{k\times k}$ – неизвестные постоянные матрицы, также подлежащие дальнейшему нахождению. При этом в качестве оценки

$$\sigma_i = Fx_i = PTx_i + VCx_i = Pq_i + Vy_i - Vv_i$$

используется выход фильтра

$$\widetilde{\sigma}_i = P\widetilde{q}_i + Vy_i, \quad i = 0,1,2,\ldots \tag{6}$$

Для минимизации числа ненулевых элементов неизвестные матрицы P и N фильтра ищутся в каноническом представлении Люенбергера [1, с. 31; 8, с. 44]:

$$N = \begin{pmatrix} N_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & N_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & N_{pp} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times k}, \quad P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & P_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p\times k},$$

$$N_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -l_{\varkappa_{i-1}+1} \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -l_{\varkappa_{i-1}+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -l_{\varkappa_{i-1}+k_i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k_i \times k_i}, \quad P_i = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times k_i}, \quad i = \overline{1,p}, \qquad (7)$$

где $k_i \geqslant 1$ – индексы наблюдаемости пары $\{P_i,\, N_{ii}\}$; $\varkappa_0 = 0$, $\varkappa_i = \sum_{j=1}^{i} k_j$, $i = \overline{1,p}$, – суммы индексов наблюдаемости, причём $\varkappa_p = k$; $l_{\varkappa_{i-1}+\mu_i}$, $\mu_i = \overline{1,k_i}$, – коэффициенты характеристического полинома матрицы N_{ii}, т.е.

$$\beta_i(z) = \det(zI_{k_i} - N_{ii}) = z^{k_i} + l_{\varkappa_{i-1}+k_i} z^{k_i-1} + \ldots + l_{\varkappa_{i-1}+1}.$$

Характеристический полином матрицы N при этом равен

$$\beta(z) = \det(zI_k - N) = \prod_{i=1}^{p} \beta_i(z) = \prod_{i=1}^{p} \det(zI_{k_i} - N_{ii}).$$

Пусть матрицы $F = (f_{i,j})$, $T = (t_{i,j})$, $M = (m_{i,j})$, $V = (v_{i,j})$ в позициях (i,j) содержат элементы $f_{i,j}$, $t_{i,j}$, $m_{i,j}$, $v_{i,j}$ соответственно.

Использовав стохастические разностные уравнения системы (1) и уравнения фильтра (5), (6), нетрудно получить, что ошибка $\varepsilon_i = q_i - \widetilde{q}_i$ описывается уравнением

$$\varepsilon_{i+1} = q_{i+1} - \widetilde{q}_{i+1} = Tx_{i+1} - N\widetilde{q}_i - My_i = TAx_i - N(q_i - \varepsilon_i) - MCx_i + Tw_i - Mv_i =$$
$$= N\varepsilon_i + (TA - MC - NT)x_i + Tw_i - Mv_i; \quad \varepsilon_0 = T(x_0 - \bar{x}_0); \quad i = 0, 1, 2, \ldots \qquad (8)$$

Уравнение для ошибки $e_i = \sigma_i - \widetilde{\sigma}_i$ имеет вид

$$e_i = \sigma_i - \widetilde{\sigma}_i = Pq_i + Vy_i - Vv_i - (P\widetilde{q}_i + Vy_i) = P\varepsilon_i - Vv_i; \quad i = 0, 1, 2, \ldots \qquad (9)$$

На основании известных результатов [8, с. 55] можно сделать вывод, что для того чтобы оценки $\widetilde{q}_i$ и $\widetilde{\sigma}_i$ являлись несмещёнными для q_i и σ_i соответственно, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:

$$F = PT + VC, \quad TA - MC - NT = 0, \quad N \text{ – шуровская матрица.} \qquad (10)$$

Более того, если матрица N – шуровская, то (см. [9, с. 537]) ошибка ε_i в установившемся режиме является стационарным в широком смысле случайным процессом, в котором математическое ожидание постоянно, а корреляционная функция зависит от одной переменной.

Условия (10) в предположениях о канонических представлениях исходной системы (4) и искомого фильтра (7) могут быть сформулированы в виде следующего утверждения.

Теорема. *Пусть система (1) наблюдаема,* $\operatorname{rank} C = l$, *и пара* $\{C,\, A\}$ *находится в каноническом представлении Люенбергера (4). Векторный функционал (2), в котором в каноническом базисе матрица* $F = (f_{i,j}) \in \mathbb{R}^{p \times n}$, *может быть восстановлен субоптимальным фильтром (5), (6) порядка* k, *искомым в канонической форме Люенбергера (7), тогда и только тогда, когда относительно неизвестных элементов матриц* $T = (t_{i,j}) \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $M = (m_{i,j}) \in \mathbb{R}^{k \times l}$, $V = (v_{i,j}) \in \mathbb{R}^{p \times l}$ *выполняются следующие условия:*

$$t_{\varkappa_i,\theta_{j-1}+\eta_j} = f_{i,\theta_{j-1}+\eta_j}, \quad t_{\varkappa_{i-1}+1,\theta_{j-1}+\eta_j+1} = -l_{\varkappa_{i-1}+1} t_{\varkappa_i,\theta_{j-1}+\eta_j} \quad \textit{для} \quad \nu_j > 1;$$

$$t_{\varkappa_{i-1}+\mu_i+1,\theta_{j-1}+\eta_j+1} = t_{\varkappa_{i-1}+\mu_i,\theta_{j-1}+\eta_j} - l_{\varkappa_{i-1}+\mu_i+1} t_{\varkappa_i,\theta_{j-1}+\eta_j} \quad \textit{для} \quad \nu_j > 1, \quad k_i > 1;$$

$$m_{\varkappa_{i-1}+\mu_i+1,j} = -\sum_{\eta=1}^{\nu_j} \alpha_{\theta_{j-1}+\eta} t_{\varkappa_{i-1}+\mu_i+1,\theta_{j-1}+\eta} - t_{\varkappa_{i-1}+\mu_i,\theta_j} + l_{\varkappa_{i-1}+\mu_i+1} t_{\varkappa_i,\theta_j} \quad \textit{для} \quad k_i > 1;$$

$$m_{\varkappa_{i-1}+1,j} = -\sum_{\eta=1}^{\nu_j} \alpha_{\theta_{j-1}+\eta} t_{\varkappa_{i-1}+1,\theta_{j-1}+\eta} + l_{\varkappa_{i-1}+1} t_{\varkappa_i,\theta_j}, \quad v_{i,j} = f_{i,\theta_j} - t_{\varkappa_i,\theta_j},$$

где $\mu_i = \overline{1, k_i - 1}$, $\eta_j = \overline{1, \nu_j - 1}$, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,l}$; $\beta(z)$ *– дискретно устойчивый полином.*

Следствие 1. *Пусть* $\Delta_{i,j} = \max(\nu_j - k_i - 1, 0)$, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,l}$, *тогда количество неизвестных параметров субоптимального фильтра (5), (6) порядка* k *в канонической форме Люенбергера (7) равно*

$$\chi = \sum_{i=1}^{p}\left(k_i - r_i + \sum_{j=1}^{l}\max(k_i - \nu_j + 1, 0)\right), \tag{11}$$

где r_i *– количество базисных строк в системе линейных алгебраических уравнений*

$$\left(\begin{array}{ccc} f_{i,1} & \cdots & f_{i,k_i} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ f_{i,\Delta_{i,1}} & \cdots & f_{i,\Delta_{i,1}+k_i-1} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ \hline f_{i,\theta_{l-1}+1} & \cdots & f_{i,\theta_{l-1}+k_i} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ f_{i,\theta_{l-1}+\Delta_{i,l}} & \cdots & f_{i,\theta_{l-1}+\Delta_{i,l}+k_i-1} \end{array}\right) \begin{pmatrix} l_{\varkappa_{i-1}+1} \\ \vdots \\ l_{\varkappa_{i-1}+k_i} \end{pmatrix} = -\left(\begin{array}{c} f_{i,k_i+1} \\ \dots\dots\dots \\ f_{i,k_i+\Delta_{i,1}} \\ \hline \vdots \\ \hline f_{i,\theta_{l-1}+k_i+1} \\ \dots\dots\dots \\ f_{i,\theta_{l-1}+k_i+\Delta_{i,1}} \end{array}\right), \tag{12}$$

причём $r_i = \operatorname{rank}[\mathcal{A}_i] = \operatorname{rank}[\mathcal{A}_i|\mathcal{B}_i]$, *где* $\mathcal{A}_i$ *и* $\mathcal{B}_i$ *– матрица и столбец свободных членов системы (12), при этом блоки матриц* $\mathcal{A}_i$ *имеют ганкелеву структуру. Если* $\Delta_{i,j} = 0$, *то соответствующие строки в системе (12) отсутствуют. Если* $\Delta_{i,j} = 0$, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,l}$, *то* $r_i = 0$. *Кроме того, если* $\operatorname{rank}[\mathcal{A}_i] \neq \operatorname{rank}[\mathcal{A}_i|\mathcal{B}_i]$, *то условия теоремы несовместны.*

Относительно матричных передаточных функций от шумов w_i, v_i к ошибке e_i

$$W_{ew}(z) = P(zI_k - N)^{-1}T, \quad W_{ev}(z) = -P(zI_k - N)^{-1}M - V$$

для теоремы имеет место

Следствие 2. *Для системы в отклонениях (8), (9) левое матричное дробное описание передаточной функции от шумов* w_i, v_i *к ошибке фильтрации* e_i *в каноническом базисе Люенбергера (7) имеет вид*

$$\begin{pmatrix} W_{ew}(z) & W_{ev}(z) \end{pmatrix} = \mathcal{D}^{-1}(z)\begin{pmatrix} \mathcal{N}_{ew}(z) & \mathcal{N}_{ev}(z) \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$\mathcal{D}(z) = \begin{pmatrix} \beta_1(z) & \dots & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & \dots & \beta_p(z) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{N}_{ew}(z) = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{ew}^{1,1}(z) & \dots & \mathcal{N}_{ew}^{1,l}(z) \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ \mathcal{N}_{ew}^{p,1}(z) & \dots & \mathcal{N}_{ew}^{p,l}(z) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N}_{ev}(z) = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{ev}^{1,1}(z) & \dots & \mathcal{N}_{ev}^{1,l}(z) \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ \mathcal{N}_{ev}^{p,1}(z) & \dots & \mathcal{N}_{ev}^{p,l}(z) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{N}_{ew}^{i,j}(z) = \left(\sum_{\mu_i=1}^{k_i} t_{\varkappa_{i-1}+\mu_i,\theta_{j-1}+1} z^{\mu_i-1} \quad \dots \quad \sum_{\mu_i=1}^{k_i} t_{\varkappa_{i-1}+\mu_i,\theta_{j-1}+\nu_j} z^{\mu_i-1}\right),$$

$$\mathcal{N}_{ev}^{i,j}(z) = -\left(\sum_{\mu_i=1}^{k_i} m_{\varkappa_{i-1}+\mu_i,j} z^{\mu_i-1} + v_{i,j}\beta_i(z)\right), \quad i = \overline{1,p}, \quad j = \overline{1,l}.$$

Причём если пара $\{N, \begin{pmatrix} T & -M \end{pmatrix}\}$ *управляема, то передаточная матрица (13) имеет порядок* k.

3. Вычисление критерия оптимальности. Так как шумы w_i и v_i не коррелированы между собой, то (см. [10, с. 22])

$$J = \lim_{i\to\infty} \mathbb{E}[e_i^{\mathrm{T}} e_i] = \frac{1}{2\pi}\operatorname{trace}\int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} W_{ew}(e^{j\omega}) & W_{ev}(e^{j\omega}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{ew}^{\mathrm{T}}(e^{-j\omega}) \\ W_{ev}^{\mathrm{T}}(e^{-j\omega}) \end{pmatrix} d\omega, \tag{14}$$

если передаточные матричные функции $W_{ew}(z)$ и $W_{ev}(z)$ устойчивы. По следствию 2 из теоремы это условие устойчивости выполняется, если полином $\beta(z)$ дискретно устойчив.

Вычисление J можно свести к вычислению интегралов вида

$$\bar{J}_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{b_0e^{j\omega k} + b_1e^{j\omega(k-1)} + \ldots + b_k}{a_0e^{j\omega k} + a_1e^{j\omega(k-1)} + \ldots + a_k}\right|^2 d\omega, \tag{15}$$

где коэффициенты a_i, b_i зависят согласно следствию 2 от неизвестных параметров фильтра (5), (6), количество которых указано в следствии 1. При этом для расчёта интегралов (15) существует специальная формула [11, с. 204]. Для случаев $k = 1$ и $k = 2$ значения интеграла (15) имеют вид

$$\bar{J}_1 = \frac{a_0b_0^2 - 2a_1b_0b_1 + a_0b_1^2}{a_0(a_0^2 - a_1^2)}, \tag{16}$$

$$\bar{J}_2 = \frac{a_0(b_0^2 + b_1^2 + b_2^2)(a_0 + a_2) - 2(b_0b_1 + b_1b_2)a_0a_1 + 2b_0b_2(a_1^2 - a_2(a_0 + a_2))}{a_0[(a_0^2 - a_2^2)(a_0 + a_2) - (a_0a_1 - a_1a_2)a_1]}. \tag{17}$$

Таким образом, из вида (13) матричной передаточной функции следует, что функционал (14) в задаче оптимизации является рациональной функцией, т.е. отношением двух полиномов от переменных параметров.

4. Пример. Для сравнения между собой предложенного способа построения субоптимальных фильтров с методом скалярных наблюдателей проведём численный эксперимент на примере системы (1), (2) седьмого порядка $(n = 7)$ с выходом третьего порядка $(l = 3)$, заданной в каноническом представлении (4), в котором

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{33} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

индексы наблюдаемости $\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 2$, $\nu_3 = 2$,

$$\bar{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad Q = P_0 = I_7, \quad R = I_3.$$

Для восстановления векторного функционала (2) второго порядка $(p = 2)$ с матрицей

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 6 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

будем искать фильтр третьего порядка $(k = 3)$ с индексами наблюдаемости $k_1 = 2$, $k_2 = 1$.

Использовав метод, основанный на скалярных наблюдателях, получим следующие матрицы функционального фильтра (5), (6) третьего порядка:

$$N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 6 + \lambda_1 + \lambda_2 & -1 - \lambda_3 & -1 - \lambda_2 \\ -1 & -\lambda_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} -\alpha_1(\lambda_1) & 0 & 0 \\ -\alpha_1(\lambda_2) & 0 & (\lambda_2 - \lambda_1)\alpha_3(\lambda_2) \\ 0 & -\alpha_2(\lambda_3) & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & (\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где λ_1, λ_2, λ_3 – различные вещественные собственные значения функционального фильтра; $\alpha_1(z) = z^3 + 6z^2 + 12z + 1$, $\alpha_2(z) = z^2 + 3$, $\alpha_3(z) = z^2 + 1$. Передаточные матрицы имеют вид

$$W_{ew}(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{-1}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)} & \dfrac{-z}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)} & \dfrac{\lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1+\lambda_2)z}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)} & \dfrac{1}{z-\lambda_3} & \dfrac{\lambda_3}{z-\lambda_3} & \dfrac{1}{z-\lambda_2} & \dfrac{\lambda_2}{z-\lambda_2} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{z-\lambda_3} & \dfrac{\lambda_3}{z-\lambda_3} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$W_{ev}(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{(-\lambda_1-\lambda_2-6)z^2+(\lambda_1\lambda_2-12)z-1}{(z-\lambda_1)(z-\lambda_2)} & \dfrac{(1+\lambda_3)z-\lambda_3+3}{z-\lambda_3} & \dfrac{(1+\lambda_2)z-\lambda_2+1}{z-\lambda_2} \\ 1 & \dfrac{\lambda_3 z+3}{z-\lambda_3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Использовав формулы (14), (16), (17), получим, что критерий оптимальности (3) является рациональной функцией от параметров $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$. Для поиска этих параметров решается задача минимизации критерия оптимальности с ограничением устойчивости характеристического полинома: $|\lambda_1|<1,\ |\lambda_2|<1,\ |\lambda_3|<1$. Численные результаты, которые получены с помощью метода последовательного квадратичного программирования [12, гл. 18], имеют вид

$$\lambda_1 \approx -0.3296;\quad \lambda_2 \approx -0.2403;\quad \lambda_3 \approx -0.0277;\quad J \approx 159.2793.$$

Матрицы субоптимального фильтра третьего порядка, полученные предложенным в статье методом, равны

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -l_1 & 0 \\ 1 & -l_2 & 0 \\ 0 & 0 & -l_3 \end{pmatrix},\quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad V = \begin{pmatrix} 6-l_2 & -1+l_2-t_{14} & -1+l_2-t_{16} \\ -1 & l_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 1-6l_1+l_1l_2 & -3t_{14}+l_1(t_{14}-l_2) & -t_{16}+l_1(t_{16}-l_2) \\ 12-6l_2-l_1+l_2^2 & -3+l_1+l_2(t_{14}-l_2) & -1+l_1+l_2(t_{16}-l_2) \\ 0 & -3-l_3^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & l_1 & t_{14} & -l_1 & t_{16} & -l_1 \\ 0 & -1 & l_2 & 1 & t_{14}-l_2 & 1 & t_{16}-l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -l_3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $l_1,\ l_2,\ l_3,\ t_{14},\ t_{16}$ – пять (согласно формуле (11) количество параметров $\chi=5$) переменных параметров субоптимального фильтра, первые три из которых удовлетворяют условию дискретной устойчивости полиномов $\beta_1(z)=z^2+l_2z+l_1$ и $\beta_2(z)=z+l_3$, т.е.

$$1+l_2+l_1>0,\quad 1-l_2+l_1>0,\quad l_1<1;\quad |l_3|<1.$$

Левое матричное дробное описание передаточных функций имеет вид (13), в котором

$$\mathcal{N}_{ew}(z) = \begin{bmatrix} -1 & -z & l_1+l_2z & t_{14}+z & -l_1-(l_2-t_{14})z & t_{16}+z & -l_1-(l_2-t_{16})z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -l_3 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{N}_{ev}(z) = \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{ev}^{1,1}(z) & \mathcal{N}_{ev}^{1,2}(z) & \mathcal{N}_{ev}^{1,3}(z) \\ \mathcal{N}_{ev}^{2,1}(z) & \mathcal{N}_{ev}^{2,2}(z) & \mathcal{N}_{ev}^{2,3}(z) \end{bmatrix};\quad \mathcal{D}(z) = \begin{bmatrix} \beta_1(z) & 0 \\ 0 & \beta_2(z) \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{N}_{ev}^{1,1}(z) = (l_2-6)z^2+(l_1-12)z-1,\quad \mathcal{N}_{ev}^{1,2}(z) = (t_{14}-l_2+1)z^2+(3-l_1+l_2)z+3t_{14}+l_1,$$

$$\mathcal{N}_{ev}^{1,3}(z) = (t_{16}-l_2+1)z^2+(1-l_1+l_2)z+t_{16}+l_1,\quad \mathcal{N}_{ev}^{2,1}(z) = z+l_3,\quad \mathcal{N}_{ev}^{2,2}(z) = -l_3z+3,\quad \mathcal{N}_{ev}^{2,3}(z) = 0.$$

Найденные с помощью формул (14), (16), (17) и метода последовательного квадратичного программирования [12, гл. 18], численные значения оптимальных параметров и критерия оптимальности имеют вид

$$l_1 \approx 0.135,\quad l_2 \approx 0.5882,\quad l_3 = 0,\quad t_{14} \approx 0.5488,\quad t_{16} \approx 0.4385,\quad J \approx 158.3497.$$

При этом коэффициенты $l_1,\ l_2,\ l_3$ характеристического полинома соответствуют корням, среди которых один вещественный и пара комплексно-сопряжённых.

Таким образом, предложенный подход позволяет снять ограничение на вещественность спектра и увеличить оптимальность фильтра в сравнении с фильтром, полученным методом скалярных наблюдателей.

Заключение. В статье в каноническом базисе предложены необходимые и достаточные условия существования дискретных субоптимальных фильтров. Предложена формула нахождения количества неизвестных параметров субоптимальных фильтров для восстановления векторного фукнционала от состояния стохастической системы с векторным выходом. Дано левое матричное дробное описание передаточной функции для системы, описывающей ошибку фильтрации. На численном примере системы седьмого порядка построены фильтры третьего порядка методом скалярных наблюдателей и методом канонической формы Люенбергера. Показано, что по сравнению с фильтром на основе скалярных наблюдателей фильтр, использующий фробениусову нормальную форму, может дать выигрыш по квадратичному критерию оптимальности в установившемся режиме.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284 и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 20-37-90065-Аспиранты, 20-08-00073-А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коровин С.К., Фомичев В.В.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью. М., 2007.
2. *Фомичев В.В., Каменщиков М.А.* Сравнительный анализ оптимальных фильтров второго и третьего порядков для непрерывных систем // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 11. С. 1546–1554.
3. *Каменщиков М.А.* Передаточные функции оптимальных фильтров различных динамических порядков для дискретных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. 2021. № 2. С. 19–28.
4. *Kamenshchikov M.* Conditions for existence of second-order and third-order filters for discrete systems with additive noises // Math. 2022. V. 10. № 3.
5. *Luenberger D.* Canonical forms for linear multivariable systems // IEEE Trans. on Autom. Contr. 1967. V. 12. № 3. P. 290–293.
6. *Каменщиков М.А., Капалин И.В.* Метод построения оптимального функционального фильтра для линейных стационарных стохастических систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. 2018. № 4. С. 19–26.
7. *Darouach M., Fernando T.* Functional detectability and asymptotic functional observer design // IEEE Trans. on Autom. Contr. Early Access 16 February 2022.
8. *O'Reilly J.* Observers for Linear Systems. London, 1983.
9. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М., 1977.
10. *Saberi A., Stoorvogel A.A., Sannuti P.* Filtering Theory. With Applications to Fault Detection, Isolation, and Estimation. Basel, 2007.
11. *Цыпкин Я.З.* Теория линейных импульсных систем. М., 1963.
12. *Nocedal J., Wright S.* Numerical Optimization. New York, 2006.

Электротехнический университет,
г. Ханчжоу, Китай,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова,
Федеральный исследовательский центр
"Информатика и управление" РАН, г. Москва,
Институт проблем управления
имени В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
Национальный исследовательский технологический
университет "МИСиС", г. Москва

Поступила в редакцию 25.05.2022 г.
После доработки 25.05.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.