ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 8, с. 1121–1131

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.923+517.925.54

КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ С ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

© 2022 г. П. А. Крутицкий, И. О. Резниченко

Выводится квадратурная формула для потенциала двойного слоя с дифференцируемой плотностью, заданной на гладкой замкнутой либо незамкнутой поверхности. Проведённые численные тесты показывают, что эта формула даёт более высокую точность вычислений вблизи поверхности, где задана плотность потенциала, чем квадратурные формулы, в которых дифференцируемость плотности не учитывается и плотность предполагается лишь непрерывной. Преимущество квадратурной формулы в данной работе особенно заметно в случае, когда плотность потенциала представлена гладкими осциллирующими функциями, так как она позволяет повысить точность вычисления потенциала без увеличения стоимости вычислений.

DOI: 10.31857/S037406412208012X, EDN: CGZXBB

Введение. Потенциал двойного слоя для уравнений Лапласа и Гельмгольца используется при решении краевых задач математической физики методом интегральных уравнений [1, раздел IV; 2, раздел II; 3, гл. 5]. Для вычисления потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью в прикладных расчётах применяют стандартную квадратурную формулу [4, гл. 2] либо формулу, основанную на определении телесного угла [5], однако они не позволяют повысить точность вычислений при дифференцируемой плотности, так как не допускают обобщений на этот случай. В работе [6] предложена новая квадратурная формула для гармонического потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью, которую можно обобщить на случай дифференцируемой плотности, что позволит повысить точность вычислений потенциала двойного слоя, если плотность в потенциале дифференцируема. Указанному обобщению и посвящена настоящая работа. Улучшение точности вычислений потенциала подтверждается численными расчётами.

В двумерном случае улучшенная квадратурная формула для потенциала простого слоя с плотностью, заданной на незамкнутых кривых и имеющей степенные особенности на их концах, построена в статьях [7, 8] и может применяться для нахождения численных решений краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца вне разрезов и незамкнутых кривых на плоскости. Такие задачи изучались в работах [9–15].

1. Постановка задачи. Введём декартову систему координат $x = (x_1, x_2, x_3)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$. Пусть Γ – простая гладкая замкнутая поверхность класса C^2 либо простая гладкая ограниченная незамкнутая ориентированная поверхность класса C^2, содержащая свои предельные точки [16, гл. 14, § 1]. Если поверхность Γ замкнутая, то она должна ограничивать объёмно-односвязную внутреннюю область [17, с. 201]. Предположим, что поверхность Γ параметризована так, что на неё отображается прямоугольник $[0, A] \times [0, B]$:

$$y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma, \quad y_1 = y_1(u, v), \quad y_2 = y_2(u, v), \quad y_3 = y_3(u, v); \quad u \in [0, A], \quad v \in [0, B];$$
$$y_j(u, v) \in C^2([0, A] \times [0, B]), \quad j = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Сферу, поверхность эллипсоида, гладкие поверхности фигур вращения, поверхность тора и многие другие более сложные поверхности можно параметризовать таким образом.

Введём N точек u_n с шагом h на отрезке $[0, A]$ и M точек v_m с шагом H на отрезке $[0, B]$ и рассмотрим разбиение прямоугольника $[0, A] \times [0, B]$

$$A = Nh, \quad B = MH, \quad u_n = (n + 1/2)h, \quad n = \overline{0, N-1}; \quad v_m = (m + 1/2)H, \quad m = \overline{0, M-1},$$

на $N \times M$ прямоугольников с центрами (u_n, v_m).

Известно [16, гл. 14, § 1], что компоненты вектора нормали (не единичного)

$$\eta(y) = (\eta_1(y), \eta_2(y), \eta_3(y))$$

в точке поверхности $y = (y_1, y_2, y_3) \in \Gamma$ выражаются через определители второго порядка формулами

$$\eta_1 = \begin{vmatrix} (y_2)_u & (y_3)_u \\ (y_2)_v & (y_3)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{vmatrix} (y_3)_u & (y_1)_u \\ (y_3)_v & (y_1)_v \end{vmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{vmatrix} (y_1)_u & (y_2)_u \\ (y_1)_v & (y_2)_v \end{vmatrix},$$

а длина этого вектора равна $|\eta(y)| = \sqrt{(\eta_1(y))^2 + (\eta_2(y))^2 + (\eta_3(y))^2}$.

Известно [16, гл. 14, §§ 1, 2], что справедливо равенство

$$\int\limits_{\Gamma} F(y)\, ds_y = \int\limits_0^A du \int\limits_0^B F(y(u,v))|\eta(y(u,v))|\, dv.$$

Потребуем, чтобы

$$|\eta(y(u,v))| > 0 \quad \text{для любых точек} \quad (u,v) \in ((0,A) \times (0,B)). \tag{2}$$

Из условия (2) следует, что $|\eta(y(u,v))| \in C^1((0,A) \times (0,B))$.

Через $\mathbf{n}_y$ обозначим единичную нормаль в точке $y \in \Gamma$, т.е. $\mathbf{n}_y = \eta(y)/|\eta(y)|$. Производная по нормали $\mathbf{n}_y$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} = |\eta(y)|^{-1}(\eta(y), \nabla_y).$$

Обозначим $|x - y(u,v)| = \sqrt{(x_1 - y_1(u,v))^2 + (x_2 - y_2(u,v))^2 + (x_3 - y_3(u,v))^2}$ и заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y}|x-y| = \frac{1}{|\eta(y)|}\sum_{j=1}^3 \eta_j(y)\frac{y_j - x_j}{|x-y|}.$$

Пусть $x \notin \Gamma$. Рассмотрим потенциал двойного слоя для уравнения Гельмгольца с заданной на поверхности Γ дифференцируемой плотностью $\mu(y) \in C^1(\Gamma)$:

$$\mathcal{W}_k[\mu](x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma} \mu(y)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\, ds_y =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma} \mu(y)\frac{1}{|\eta(y)|}\frac{\exp(ik|x-y|)(ik|x-y|-1)}{|x-y|^2}\sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(y)(y_j - x_j)}{|x-y|}\, ds_y =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^A du \int\limits_0^B \mu(y(u,v))\exp(ik|x-y(u,v)|)(ik|x-y(u,v)|-1)\sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(y(u,v))(y_j(u,v) - x_j)}{|x-y(u,v)|^3}\, dv =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\int\limits_{u_n - h/2}^{u_n + h/2} du \int\limits_{v_m - H/2}^{v_m + H/2} \mu(y(u,v))\times$$

$$\times \exp(ik|x-y(u,v)|)(ik|x-y(u,v)|-1)\sum_{j=1}^3 \frac{\eta_j(y(u,v))(y_j(u,v) - x_j)}{|x-y(u,v)|^3}\, dv, \tag{3}$$

где $k \geqslant 0$. При $k = 0$ потенциал (3) переходит в потенциал двойного слоя для уравнения Лапласа.

При $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$ и $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$ так же, как и в работе [18], можно показать, что справедливы равенства

$$|x - y(u,v)| = |x - y(u_n, v_m)| + O(h+H), \quad \exp(ik|x - y(u,v)|) = \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|) + O(h+H)$$

для любого $x \notin \Gamma$. Константы в оценках функций $O(h+H)$ не зависят от n, m и от расположения $x \notin \Gamma$. Следовательно,

$$\mathcal{W}_k[\mu](x) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \exp(ik|x - y(u_n, v_m)|)(ik|x - y(u_n, v_m)| - 1) \times$$

$$\times \int\limits_{u_n - h/2}^{u_n + h/2} du \int\limits_{v_m - H/2}^{v_m + H/2} \mu(y(u,v)) \sum_{j=1}^{3} \frac{\eta_j(y(u,v))(y_j(u,v) - x_j)}{|x - y(u,v)|^3}\, dv. \tag{4}$$

Таким образом, чтобы получить квадратурную формулу для потенциала двойного слоя при $x \notin \Gamma$ необходимо вычислить следующий интеграл:

$$\int\limits_{u_n - h/2}^{u_n + h/2} du \int\limits_{v_m - H/2}^{v_m + H/2} \mu(y(u,v)) \sum_{j=1}^{3} \frac{\eta_j(y(u,v))(y_j(u,v) - x_j)}{|x - y(u,v)|^3}\, dv. \tag{5}$$

2. Вычисление интеграла. Пусть точка x не принадлежит части поверхности Γ, на которой изменяется точка $y = y(u,v)$ при $(u - u_n) \in [-h/2, h/2]$ и $(v - v_m) \in [-H/2, H/2]$. Разложим $y_j(u,v)$ по формуле Тейлора с центром в точке (u_n, v_m), тогда для $j = 1,2,3$ получим

$$y_j(u,v) = y_j(u_n, v_m) + D_j + O(H^2 + h^2),$$

где

$$D_j = (y_j)'_u(u - u_n) + (y_j)'_v(v - v_m).$$

Здесь и далее все производные по u и v берутся в точке (u_n, v_m). Положим

$$r^2 = |x - y(u_n, v_m)|^2 = \sum_{j=1}^{3} r_j^2 \neq 0, \quad r_j = y_j(u_n, v_m) - x_j, \quad j = 1,2,3,$$

тогда

$$y_j(u,v) - x_j = r_j + D_j + O(H^2 + h^2), \quad j = 1,2,3.$$

Следовательно,

$$|x - y(u,v)|^2 = \sum_{j=1}^{3} (x_j - y_j(u,v))^2 \approx \sum_{j=1}^{3} (r_j^2 + 2r_j D_j + D_j^2) =$$

$$= r^2 + 2P(u - u_n) + 2Q(v - v_m) + \alpha^2(u - u_n)^2 + \beta^2(v - v_m)^2 + 2\delta(u - u_n)(v - v_m) =$$
$$= \beta^2(V + \delta U/\beta^2 + Q/\beta^2)^2 - (\delta U + Q)^2/\beta^2 + \alpha^2 U^2 + 2PU + r^2,$$

где

$$U = u - u_n, \quad V = v - v_m, \quad P = \sum_{j=1}^{3} r_j (y_j)'_u, \quad Q = \sum_{j=1}^{3} r_j (y_j)'_v,$$

$$\alpha^2 = \sum_{j=1}^{3} ((y_j)'_u)^2, \quad \beta^2 = \sum_{j=1}^{3} ((y_j)'_v)^2, \quad \delta = \sum_{j=1}^{3} (y_j)'_u (y_j)'_v.$$

Можно показать [16, гл. 14, § 1], что справедливо равенство

$$\alpha^2\beta^2 - \delta^2 = |\eta(y(u_n, v_m))|^2.$$

Согласно условию (2) $|\eta(y(u_n, v_m))| > 0$ для всех возможных n, m, поэтому

$$\alpha^2\beta^2 - \delta^2 > 0,$$

откуда следует, что $\alpha^2 > 0$ и $\beta^2 > 0$.

Применив формулу Тейлора в точке (u_n, v_m) с остаточным членом в форме Пеано [16, гл. 10, § 5.3], находим

$$\eta_j(y(u,v)) = \eta_j(y(u_n, v_m)) + (\eta_j)'_u(u - u_n) + (\eta_j)'_v(v - v_m) + o(\sqrt{(u-u_n)^2 + (v-v_m)^2}).$$

Поскольку $\mu(y(u,v)) \in C^1(\Gamma)$, аналогично получим

$$\mu(y(u,v)) = \mu(y(u_n, v_m)) + \mu'_u(u - u_n) + \mu'_v(v - v_m) + o(\sqrt{(u-u_n)^2 + (v-v_m)^2}),$$

где $u \in [u_n - h/2, u_n + h/2]$ и $v \in [v_m - H/2, v_m + H/2]$.

Для вычисления выражения $\sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u,v))(y_j(u,v) - x_j)$ с учётом формул

$$\sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u_n, v_m))(y_j)'_u = \sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u_n, v_m))(y_j)'_v = 0,$$

отражающих ортогональность вектора нормали и касательных векторов к поверхности (см. [16, гл. 14, § 1.2]), воспользуемся разложением по формуле Тейлора в точке (u_n, v_m) с остаточным членом в форме Пеано

$$y_j(u,v) - x_j = r_j + (y_j)'_u(u - u_n) + (y_j)'_v(v - v_m) +$$

$$+ \frac{1}{2}(y_j)''_{uu}(u-u_n)^2 + \frac{1}{2}(y_j)''_{vv}(v-v_m)^2 + (y_j)''_{uv}(u-u_n)(v-v_m) + o((u-u_n)^2 + (v-v_m)^2),$$

тогда

$$\mu(y(u,v))\sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u,v))(y_j(u,v) - x_j) \approx R + \xi_4 U + \xi_5 V + \xi_1 U^2 + \xi_2 V^2 + \xi_3 UV,$$

где $U = u - u_n$, $V = v - v_m$,

$$\xi_1 = \sum_{j=1}^3 \left(\mu(y(u_n, v_m))\left(\frac{1}{2}\eta_j(y(u_n, v_m))(y_j)''_{uu} + (\eta_j)'_u(y_j)'_u\right) + \mu'_u(\eta_j)'_u r_j\right),$$

$$\xi_2 = \sum_{j=1}^3 \left(\mu(y(u_n, v_m))\left(\frac{1}{2}\eta_j(y(u_n, v_m))(y_j)''_{vv} + (\eta_j)'_v(y_j)'_v\right) + \mu'_v(\eta_j)'_v r_j\right),$$

$$\xi_3 = \sum_{j=1}^3 (\mu(y(u_n, v_m))(\eta_j(y(u_n, v_m))(y_j)''_{uv} + (\eta_j)'_u(y_j)'_v + (\eta_j)'_v(y_j)'_u) + \mu'_u(\eta_j)'_v r_j + \mu'_v(\eta_j)'_u r_j),$$

$$\xi_4 = \sum_{j=1}^3 (\mu(y(u_n, v_m))(\eta_j)'_u r_j + \mu'_u \eta_j(y(u_n, v_m)) r_j),$$

$$\xi_5 = \sum_{j=1}^3 (\mu(y(u_n, v_m))(\eta_j)'_v r_j + \mu'_v \eta_j(y(u_n, v_m)) r_j), \quad R = \mu(y(u_n, v_m))\sum_{j=1}^3 \eta_j(y(u_n, v_m)) r_j.$$

Из приведённых соотношений вытекает, что интеграл (5) приближённо равен следующему интегралу, который обозначим через $K_{nm}(x)$:

$$\int\limits_{u_n-h/2}^{u_n+h/2} du \int\limits_{v_m-H/2}^{v_m+H/2} \frac{\mu(y(u,v))}{|x-y(u,v)|^3} \sum_{j=1}^{3} \eta_j(y(u,v))(y_j(u,v)-x_j)\,dv \approx$$

$$\approx \int\limits_{-h/2}^{h/2} dU \int\limits_{-H/2}^{H/2} \frac{R+\xi_4 U+\xi_5 V+\xi_1 U^2+\xi_2 V^2+\xi_3 UV}{\beta^3((V+\delta U/\beta^2+Q/\beta^2)^2-(\delta U+Q)^2/\beta^4+(\alpha^2U^2+2PU+r^2)/\beta^2)^{3/2}}\,dV =$$

$$= K_{nm}(x). \tag{6}$$

Следовательно, чтобы вывести квадратурную формулу для потенциала двойного слоя, необходимо вычислить интеграл $K_{nm}(x)$ в явном виде. Этот интеграл вычислен в работе [6].

3. Основной результат.

Теорема. *Пусть Γ – простая гладкая замкнутая поверхность класса C^2, ограничивающая объёмно-односвязную внутреннюю область, либо простая гладкая ограниченная незамкнутая ориентированная поверхность класса C^2, содержащая свои предельные точки. Пусть Γ допускает параметризацию (1) со свойством (2) и $\mu(y) \in C^1(\Gamma)$. Тогда для потенциала двойного слоя (3) при $x \notin \Gamma$ и $k \geqslant 0$ имеет место квадратурная формула*

$$\mathcal{W}_k[\mu](x) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} \exp(ik|x-y(u_n,v_m)|)(ik|x-y(u_n,v_m)|-1)K_{nm}(x) + \varepsilon_{NM}(x), \tag{7}$$

где $\varepsilon_{NM}(x) \to 0$ при $N, M \to \infty$. Интеграл $K_{nm}(x)$, записанный в (6), вычислен в явном виде в статье [6], а коэффициенты в $K_{nm}(x)$ берутся из п. 2.

При $k=0$ потенциал двойного слоя для уравнения Гельмгольца переходит в потенциал двойного слоя для уравнения Лапласа, а квадратурная формула (7) принимает вид квадратурной формулы для гармонического потенциала двойного слоя.

Если в формуле (7) при вычислении коэффициентов в $K_{nm}(x)$ в п.2 положить $\mu'_u = \mu'_v = 0$, то она при $k=0$ переходит в квадратурную формулу для потенциала двойного слоя из [6], где плотность $\mu(y)$ не предполагается дифференцируемой, а считается всего лишь непрерывной. Тем самым формула (7) обобщает прежнюю квадратурную формулу для потенциала двойного слоя с непрерывной плотностью на случай дифференцируемой плотности. Ниже эффективность формулы (7) оценивается на тестовых примерах и сравнивается с эффективностью других формул.

4. Квадратурная формула, основанная на свойствах телесного угла. Рассмотрим треугольник с вершинами x^1, x^2, x^3. Известно [19, с. 253], что телесный угол $\Omega(x; x^1, x^2, x^3)$, под которым этот треугольник виден из точки x, с точностью до знака, зависящего от выбранного на треугольнике направления нормали, равен определённому на этом треугольнике потенциалу двойного слоя с единичной плотностью, умноженному на 4π. С другой стороны, для телесного угла, под которым треугольник с вершинами x^1, x^2, x^3 виден из точки x, имеется явная формула [20; 21, результат (359)]:

$$\Omega(x; x^1, x^2, x^3) = 2\arccos\Bigg(\sqrt{|R_1||R_2||R_3|/2} \times$$

$$\times \frac{|R_1||R_2||R_3| + (R_1,R_2)|R_3| + (R_2,R_3)|R_1| + (R_3,R_1)|R_2|}{\sqrt{|R_1||R_2||R_3| + (R_1,R_2)|R_3|}} \times$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{|R_1||R_2||R_3| + (R_2,R_3)|R_1|}} \frac{1}{\sqrt{|R_1||R_2||R_3| + (R_3,R_1)|R_2|}}\Bigg),$$

где через $R_1 = x^1 - x$, $R_2 = x^2 - x$, $R_3 = x^3 - x$ обозначены векторы, а через $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение. Использовав указанную формулу для телесного угла и параметризацию (1), можно вывести следующую квадратурную формулу для потенциала двойного слоя с плотностью $\mu(y)$ на поверхности Γ:

$$\mathcal{W}_k[\mu](x) \approx \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}\mu(y(u_n,v_m))\exp(ik|x-y(u_n,v_m)|)(ik|x-y(u_n,v_m)|-1)\times$$
$$\times[\Omega(x;y(u_n-h/2,v_m-H/2),y(u_n-h/2,v_m+H/2),y(u_n+h/2,v_m-H/2))+$$
$$+\Omega(x;y(u_n+h/2,v_m+H/2),y(u_n-h/2,v_m+H/2),y(u_n+h/2,v_m-H/2))]\times$$
$$\times\operatorname{sgn}\left(\sum_{j=1}^{3}\eta_j(y(u_n,v_m))(y_j(u_n,v_m)-x_j)\right). \tag{8}$$

Квадратурная формула (8) используется в инженерных расчётах, однако она не допускает улучшения за счёт учёта производных в случае дифференцируемой плотности в потенциале двойного слоя.

5. Численные расчёты для диска. В данных расчётах оценивается эффективность квадратурных формул вблизи поверхности Γ, когда поверхность Γ является круговым диском единичного радиуса, расположенным в плоскости $x_3 = 0$ с центром в начале координат. Тем самым Γ является незамкнутой поверхностью, заданной уравнениями

$$y_1(u,v) = u\cos v, \quad y_2(u,v) = u\sin v, \quad y_3(u,v) = 0, \tag{9}$$

причём $(u,v) \in [0,1]\times[0,2\pi]$. Отметим, что в этом случае $|\eta(y(u,v))| = u$ и направление нормали $\eta(y)$ на диске Γ совпадает с направлением оси Ox_3. Кроме того, $|\eta(y(0,v))| = 0$ для всех $v \in [0,2\pi]$, иначе говоря, $|\eta(y)| = 0$ в центре диска при такой параметризации. Согласно [22, § 27.6] плотность потенциала двойного слоя на диске Γ можно найти по формуле

$$\mu(x)|_\Gamma = 2\mathcal{W}_k[\mu](x)|_{\Gamma^-}. \tag{10}$$

Здесь диск Γ рассматривается как двусторонняя поверхность, через Γ^- обозначена сторона, которую мы видим, смотря навстречу вектору нормали $\mathbf{n}_y$. Направление единичной нормали $\mathbf{n}_y$ совпадает с направлением нормали η, так как вектор $\mathbf{n}_y$ получается из η в результате нормировки. В формуле (10) берётся предельное значение потенциала двойного слоя на верхней стороне Γ, т.е. на Γ^-. Отметим, что потенциал двойного слоя $\mathcal{W}_k[\mu](x)$ равен нулю в плоскости $x_3 = 0$ вне диска Γ.

Эффективность квадратурных формул вблизи поверхности Γ можно оценивать следующим образом. В тестовых примерах известно явное выражение плотности потенциала $\mu(y)$ на диске Γ. Для точек x, расположенных над диском Γ, значение потенциала $\mathcal{W}_k[\mu](x_1,x_2,x_3)$ при уменьшении $x_3 > 0$ должно сходиться к значению $(1/2)\mu(x_1,x_2)$ согласно формуле (10) в силу непрерывности потенциала вплоть до границы. Поэтому приближённые значения потенциала, вычисленные по квадратурным формулам, также должны стремиться к известному значению $(1/2)\mu(x_1,x_2)$. Однако для совсем малых величин $x_3 > 0$ значения, вычисленные по квадратурным формулам, перестают приближаться к $(1/2)\mu(x_1,x_2)$ из-за дискретности квадратурных формул. Тесты позволяют оценить расстояния до границы, на которых квадратурные формулы приближаются к предельным значениям потенциала, и расстояние, с которого они перестают приближаться. Кроме того, тесты показывают, насколько хорошо квадратурные формулы аппроксимируют предельные значения потенциала вблизи границы.

Во всех тестах приближённое значение потенциала двойного слоя вычислялось по прежней квадратурной формуле из работы [6], по новой квадратурной формуле (7) и по формуле (8) в некоторых точках на единичных вспомогательных дисках, имеющих центры с координатами $(0,0,x_3)$ и расположенных параллельно плоскости $x_3 = 0$ над диском Γ. Затем в

каждой такой точке (x_1, x_2, x_3) на вспомогательном диске был найден модуль разности между значением квадратурной формулы в данной точке и явным значением $(1/2)\mu(x_1, x_2)$ при $x_3 = 0$, x_3 – расстояние от вспомогательного диска до диска Γ. На каждом вспомогательном диске был найден максимум модуля таких разностей по всем указанным точкам для каждой формулы. Результаты представлены в таблицах.

Координаты точек, которые использовались для оценки максимального модуля разности:

$$x_j^{ql} = y_j(u_q, v_l), \quad j = 1, 2,$$

$$u_q = \frac{1}{2N}q, \quad q = \overline{0, 2N}; \quad v_l = \frac{2\pi}{2M}l, \quad l = 0, 1, 2, \tag{11}$$

где $y_j(u, v)$ определяются формулами (9), т.е. эти точки расположены над центрами участков разбиения диска Γ, серединами границ между такими участками и пересечениями этих границ. Отметим, что данные точки распределены не по всему вспомогательному диску, а находятся вблизи радиуса с полярным углом $v = H/2$.

Вычисления проводились для различных значений M и N. Значения шагов определяются формулами

$$h = 1/N, \quad H = 2\pi/M.$$

Если $N = M/5 = 10$, то $h \approx 0.1$, $H \approx 0.13$; если $N = M/5 = 20$, то $h \approx 0.05$, $H \approx 0.063$; если $N = M/5 = 40$, то $h \approx 0.025$, $H \approx 0.03$.

В таблицах для каждого вспомогательного диска с координатой x_3 приведены рассчитанные максимальные абсолютные отклонения значений квадратурных формул от явных предельных значений потенциала двойного слоя на Γ по точкам (11). Первое число в ячейках таблицы – максимальное отклонение для новой формулы (7) на данном вспомогательном диске, второе число – максимальное отклонение для прежней квадратурной формулы из статьи [6] на данном диске, третье число – максимальное отклонение для формулы (8).

В численных тестах квадратурные формулы сравниваются при $k = 0$, т.е. для потенциала двойного слоя в случае уравнения Лапласа.

Тест 1. В данном тесте использовалась плотность потенциала

$$\mu(y(u, v)) = 1 - u^2.$$

При этом потенциал двойного слоя непрерывен на кромке диска Γ, но его производные терпят разрыв, хотя и ограничены. Потенциал в рассматриваемом случае не зависит от полярного угла v, как и его плотность. В табл. 1 приведены рассчитанные максимальные абсолютные отклонения квадратурных формул от предельных значений потенциала.

Таблица 1. Максимальные абсолютные отклонения квадратурных формул в тесте 1

x_3	$M/5 = N = 10$	$M/5 = N = 20$	$M/5 = N = 40$
0.03	0.029; 0.034; 0.033	0.029; 0.029; 0.029	0.029; 0.029; 0.029
0.01	0.017; 0.028; 0.22	0.012; 0.018; 0.017	0.012; 0.014; 0.014
0.008	0.019; 0.028; 0.41	0.01; 0.017; 0.016	0.01; 0.012; 0.012
0.006	0.026; 0.031; 0.47	0.0082; 0.016; 0.015	0.0081; 0.011; 0.011
0.004	0.044; 0.051; 0.49	0.0069; 0.015; 0.022	0.0059; 0.0092; 0.0092
0.002	0.1; 0.11; 0.5	0.014; 0.016; 0.49	0.0034 0.0078; 0.0077

Тест 2. В данном тесте плотность потенциала равна $\mu(y(u, v)) = \sin(3\pi u)$. При этом потенциал двойного слоя непрерывен на кромке диска Γ, но его производные терпят разрыв, как и в предыдущем тесте. Плотность потенциала не зависит от полярного угла v, поэтому и сам потенциал от него не зависит. В табл. 2 приведены рассчитанные максимальные абсолютные отклонения квадратурных формул от предельных значений потенциала.

Таблица 2. Максимальные абсолютные отклонения квадратурных формул в тесте 2

x_3	$M/5 = N = 10$	$M/5 = N = 20$	$M/5 = N = 40$
0.03	0.11; 0.15; 0.15	0.12; 0.13; 0.13	0.15; 0.15; 0.15
0.01	0.047; 0.12; 0.53	0.05; 0.069; 0.068	0.074; 0.073; 0.073
0.008	0.042; 0.12; 0.53	0.041; 0.067; 0.066	0.062; 0.06; 0.06
0.006	0.036; 0.12; 0.55	0.032; 0.065; 0.063	0.049; 0.047; 0.047
0.004	0.057; 0.13; 0.54	0.023; 0.063; 0.11	0.034; 0.038; 0.037
0.002	0.15; 0.21; 0.52	0.023; 0.062; 0.51	0.018; 0.034; 0.033

Тест 3. В этом тесте использовалась плотность потенциала

$$\mu(y(u,v)) = (u(1-u))^2 \cos(10v),$$

первые производные которого являются непрерывными функциями на кромке диска Γ. В отличие от предыдущих тестов здесь в формуле (11) вместо $l = 0, 1, 2$ взяты значения $l = \overline{0, 2M}$ для учёта зависимости потенциала двойного слоя от полярного угла v. В первых двух тестах плотность потенциала двойного слоя от v не зависит, поэтому и сам потенциал не зависит от v.

В табл. 3 приведены данные расчётов максимальных абсолютных отклонений квадратурных формул от предельных значений потенциала.

Таблица 3. Максимальные абсолютные отклонения квадратурных формул в тесте 3

x_3	$M/5 = N = 10$	$M/5 = N = 20$	$M/5 = N = 40$
0.03	0.014; 0.017; 0.017	0.015; 0.015; 0.015	0.015; 0.015; 0.015
0.01	0.0056; 0.01; 0.02	0.0061; 0.007; 0.007	0.0064; 0.0065; 0.0065
0.008	0.0045; 0.01; 0.036	0.0049; 0.006; 0.0059	0.0052; 0.0054; 0.0054
0.006	0.0034; 0.01; 0.034	0.0037; 0.005; 0.0049	0.004; 0.0042; 0.0042
0.004	0.0027; 0.011; 0.034	0.0024; 0.004; 0.0038	0.0027; 0.003; 0.0029
0.002	0.0071; 0.014; 0.032	0.0014; 0.0037; 0.031	0.0014; 0.0017; 0.0017

6. Численные расчёты для сферы. В тестах для сферы оценивается эффективность квадратурных формул вблизи поверхности Γ, которая является сферой единичного радиуса и задана параметрически уравнениями

$$y_1(u,v) = \cos u \sin v, \quad y_2(u,v) = \sin u \sin v, \quad y_3(u,v) = \cos v, \tag{12}$$

причём $(u,v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. Отметим, что в данном случае $|\eta(y(u,v))| = \sin v$ и $|\eta(y(u,0))| = |\eta(y(u,\pi))| = 0$ для всех $u \in [0, 2\pi]$. Иначе говоря, $|\eta(y)| = 0$ на полюсах сферы при такой параметризации, но условия теоремы выполняются.

В тестах для диска явные значения для потенциала двойного слоя были известны только на поверхности диска. В отличие от тестов для диска в тестах для сферы известно явное выражение потенциала двойного слоя во всех точках внутри единичной сферы, поэтому точные значения потенциала можно сравнить с приближёнными, вычисленными по квадратурным формулам. Во всех тестах приближённое значение потенциала двойного слоя вычислялось по новой квадратурной формуле (7), в которой учитывается, что плотность $\mu(y(u,v))$ дифференцируема на Γ, по прежней квадратурной формуле из работы [6], в которой плотность $\mu(y(u,v))$ считается всего лишь непрерывной на Γ и её дифференцируемость не учитывается, а также по формуле (8). Вычисления проводились в некоторых точках на вспомогательных сферах, имеющих центры в начале координат и радиусы, равные $1 - \Delta R$. Тем самым вспомогательные сферы находятся внутри сферы единичного радиуса, на которой задана плотность потенциала на расстоянии ΔR от неё. Затем были рассчитаны значения абсолютных погрешностей в этих точках, и для каждой вспомогательной сферы определялись максимумы значений этих погрешностей.

Координаты точек, которые использовались для оценки максимальной абсолютной погрешности, равны

$$x_j^{ql} = Ry_j(u_q, v_l), \quad j = 1, 2, 3,$$

$$u_q = \frac{2\pi}{2N}q, \quad q = \overline{0, 2N}; \quad v_l = \frac{\pi}{2M}l, \quad l = \overline{1, 2M-1},$$

где $y_j(u, v)$ определяются формулами (12), R – радиус вспомогательной сферы, т.е. эти точки расположены под центрами участков разбиения единичной сферы, серединами границ между такими участками и пересечениями этих границ. Отметим, что эти точки распределены по всей сфере.

Вычисления проводились для различных значений M и N. Значения шагов определяются формулами $h = 2\pi/N$, $H = \pi/M$. Если $N/2 = M = 16$, то $h = H \approx 0.2$; если $N/2 = M = 32$, то $h = H \approx 0.098$; если $N/2 = M = 64$, то $h = H \approx 0.049$.

В таблицах приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей. В первом столбце указано отличие радиуса на ΔR вспомогательной сферы от единицы, тем самым её радиус будет равен $1 - \Delta R$. В верхней строке указаны значения M, N. Первое число в ячейках таблицы – максимальная погрешность для новой формулы (7) на данной вспомогательной сфере, второе число – максимальная погрешность для прежней квадратурной формулы из [6] на данной сфере, третье число – максимальная погрешность для формулы (8).

В численных тестах квадратурные формулы сравниваются при $k = 0$, т.е. для потенциала двойного слоя в случае уравнения Лапласа.

Тест 4. В данном тесте использовалась плотность потенциала $\mu(y(u, v)) = P_{10}(\cos v)$, тогда гармонический потенциал двойного слоя внутри единичной сферы Γ имеет вид

$$\mathcal{W}_0[\mu](x) = \frac{11|x|^{10}}{21}P_{10}(\cos\vartheta), \quad |x| < 1,$$

где

$$P_{10}(\cos v) = \frac{1}{256}(46189\cos^{10} v - 109395\cos^8 v + 90090\cos^6 v - 30030\cos^4 v + 3465\cos^2 v - 63)$$

– полином Лежандра десятой степени от $\cos v$, ϑ – зенитный угол в сферических координатах с центром в начале координат. В табл. 4 приведены максимальные значения абсолютных погрешностей.

Таблица 4. Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 4

ΔR	$N/2 = M = 16$	$N/2 = M = 32$	$N/2 = M = 64$
0.2	0.0077; 0.01; 0.01	0.0022; 0.0026; 0.0024	0.00056; 0.00065; 0.00059
0.1	0.012; 0.025; 0.024	0.0036; 0.0053; 0.0045	0.00094; 0.0014; 0.0011
0.06	0.013; 0.045; 0.041	0.0043; 0.0084; 0.0067	0.0012; 0.0023; 0.0015
0.03	0.019; 0.074; 0.063	0.0048; 0.017; 0.011	0.0018; 0.0046; 0.0022

Тест 5. В этом тесте использовалась плотность потенциала

$$\mu(y(u, v)) = \cos(10u)\sin^{10} v.$$

Гармонический потенциал двойного слоя внутри единичной сферы Γ в данном случае имеет вид

$$\mathcal{W}_0[\mu](x) = \frac{11|x|^{10}\cos(10\varphi)\sin^{10}\vartheta}{21}, \quad |x| < 1,$$

где ϑ и φ – зенитный и азимутальный углы соответственно в сферических координатах с центром в начале координат. В табл. 5 приведены рассчитанные максимальные значения абсолютных погрешностей.

Таблица 5. Максимальная абсолютная погрешность квадратурных формул в тесте 5

ΔR	$N/2 = M = 16$	$N/2 = M = 32$	$N/2 = M = 64$
0.2	0.0046; 0.013; 0.0093	0.0016; 0.0031; 0.002	0.00043; 0.00078; 0.0005
0.1	0.012; 0.058; 0.046	0.0044; 0.011; 0.0068	0.0012; 0.0027; 0.0016
0.06	0.013; 0.11; 0.09	0.0055; 0.021; 0.013	0.0015; 0.0046; 0.0026
0.03	0.061; 0.2; 0.15	0.0047; 0.046; 0.026	0.0011; 0.0085; 0.0042

Заключение. Во всех тестах для диска максимальные отклонения квадратурной формулы (7) от предельных значений потенциала существенно меньше, чем отклонения у двух остальных формул. В тестах 2 и 3, когда плотность $\mu(y(u,v))$ задана осциллирующими функциями, на расстояниях от диска $x_3 \approx H^2$ отклонения формулы (7) от предельных значений потенциала в 2–3 раза меньше, чем у остальных формул. В тесте 1 на таких же расстояниях от диска отклонения формулы (7) от предельных значений потенциала в 1.5–2 раза меньше, чем у двух других формул.

В тестах для сферы из табл. 4 и 5 следует, что квадратурная формула для потенциала двойного слоя из [6], как и квадратурная формула с телесным углом (8), на расстоянии H от сферы дают погрешность $O(H^2)$, а на расстоянии H^2 от сферы – погрешность $O(H)$.

Как видно из табл. 4 и 5, в тестах для сферы погрешность новой квадратурной формулы (7) значительно меньше погрешностей двух других формул для всех приведённых величин M и N. На расстояниях порядка H от сферы погрешность формулы (7) в 1.3–2 раза меньше, а на расстояниях порядка H^2 от сферы – в 2–3 раза меньше, чем у двух других квадратурных формул.

Таким образом, сделанные тесты показывают, что новая квадратурная формула (7) обеспечивает более высокую точность вычислений вблизи границы Γ, чем квадратурная формула из [6] и формула с телесным углом. Эффективность формулы (7) для потенциала двойного слоя с дифференцируемой плотностью особенно заметна, если плотность в потенциале представлена гладкими осциллирующими функциями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М., 1985.
2. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., 1995.
3. *Сетуха А.В.* Численные методы в интегральных уравнениях и их приложения. М., 2016.
4. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М., 1987.
5. *Гутников В.А., Лифанов И.К., Сетуха А.В.* О моделировании аэродинамики зданий и сооружений методом замкнутых вихревых рамок // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. Т. 2006. № 4. С. 78–93.
6. *Крутицкий П.А., Резниченко И.О.* Квадратурная формула для гармонического потенциала двойного слоя // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 7. С. 932–950.
7. *Krutitskii P.A., Kwak D.Y., Hyon Y.K.* Numerical treatment of a skew-derivative problem for the Laplace equation in the exterior of an open arc // J. of Eng. Math. 2007. V. 59. P. 25–60.
8. *Крутицкий П.А., Колыбасова В.В.* Численный метод решения интегральных уравнений в задаче с наклонной производной для уравнения Лапласа вне разомкнутых кривых // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 9. С. 1262–1276.
9. *Krutitskii P.A.* The Dirichlet problem for dissipative Helmholtz equation in a plane domain bounded by closed and open curves // Hiroshima Math. J. 1998. V. 28. № 1. P. 149–168.
10. *Krutitskii P.A.* The Neumann problem for the 2-D Helmholtz equation in a domain bounded by closed and open curves // Int. J. of Math. and Math. Sci. 1998. V. 21. № 2. P. 209–216.
11. *Krutitskii P.A.* The skew derivative problem in the exterior of open curves in a plane // Zeitschrift fur Analysis und Ihre Anwendungen. 1997. Bd. 16. № 3. S. 739–747.
12. *Krutitskii P.A.* The 2-dimensional Dirichlet problem in an external domain with cuts // Zeitschrift fur Analysis und Ihre Anwendungen. 1998. Bd. 17. № 2. S. 361–378.

13. *Krutitskii P.A.* The Neumann problem in a 2-D exterior domain with cuts and singularities at the tips // J. of Differ. Equat. 2001. V. 176. № 1. P. 269–289.
14. *Krutitskii P.A.* The 2-D Neumann problem in a domain with cuts // Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni. Ser. VII. 1999. V. 19. № 1. P. 65–88.
15. *Krutitskii P.A.* The mixed harmonic problem in an exterior cracked domain with Dirichlet condition on cracks // Comput. and Math. with Appl. 2005. V. 50. P. 769–782.
16. *Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А.* Математический анализ в вопросах и задачах. М., 2000.
17. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Ч. 2. М., 1973.
18. *Крутицкий П.А., Федотова А.Д., Колыбасова В.В.* Квадратурная формула для потенциала простого слоя // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 9. С. 1269–1284.
19. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. М., 1977.
20. *Van Oosterom A., Strackee J.* The solid angle of a plane triangle // IEEE Trans. on Biomedical Eng. 1983. V. 30. P. 125–126.
21. *Casey J.* A Treatise on Spherical Trigonometry. Dublin, 1889.
22. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М., 1981.

Институт прикладной математики
имени М.В. Келдыша РАН, г. Москва,
Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию 16.02.2022 г.
После доработки 24.04.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.