ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 8, с. 1132–1147

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.958:582+517.968.23

ДВУМЕРНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ С ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ ИСТОЧНИКАМИ В НЕОДНОРОДНОМ ПОРИСТОМ СЛОЕ

© 2022 г. В. Ф. Пивень

Исследуются первая и вторая краевые задачи и задача сопряжения для комплексного потенциала двумерного фильтрационного течения в пористом тонком слое, в общем случае неоднородном (переменные толщина и проницаемость). Источники течения произвольные дискретные и могут располагаться как на границах, так и вне границ области течения. Границы моделируются произвольными, гладкими, замкнутыми кривыми линиями (контурами), а источники – сингулярностями (изолированными особыми точками логарифмического типа и полюсами) комплексного потенциала. Наличие источников на границах приводит к принципиально новому обобщению (усложнению) граничных условий, которые характеризуются заданными сингулярными функциями. Решения поставленных задач представлены в конечном виде для слоёв некоторых классов проводимостей, что продемонстрировано на примере слоя с проводимостью, моделируемой степенной функцией координат. В случае когда проводимость слоя моделируется произвольной гладкой функцией, а границы – произвольные гладкие замкнутые кривые, использован обобщённый интеграл типа Коши для комплексного потенциала. Это позволило вторую краевую задачу и задачу сопряжения (при наличии на границах стока особенности логарифмического типа и произвольных источников вне границ) редуцировать к граничным сингулярным интегральным уравнениям со слабой сингулярностью. Исследованные задачи являются математическими моделями двумерных фильтрационных процессов в слоистых пористых средах и представляют интерес, например, для практики добычи нефти (воды) из природных пластов грунта сложной геологической структуры.

DOI: 10.31857/S0374064122080131, EDN: CHCDYW

Введение. Известны граничные задачи аэродинамики и теории фильтрации, для которых характерны сингулярные (негладкие) условия на границах. Плоские и трёхмерные задачи обтекания непроницаемых поверхностей летательных аппаратов при наличии отсоса внешнего потока исследуются в работах [1, с. 164; 2; 3]. Поставленная краевая задача Неймана для уравнения Лапласа с обобщёнными краевыми условиями редуцируется к гиперсингулярному интегральному уравнению, решение которого получено численным методом дискретных вихрей. В работах [4, с. 87; 5; 6] изучаются плоские задачи фильтрации в однородной пористой среде (в грунте) с источниками на непроницаемых границах, моделируемых отрезком прямой и окружностью.

Первая и вторая краевые задачи и задача сопряжения плоского фильтрационного течения в пористом слое постоянной толщины и проницаемости исследуются в статье [7], а трёхмерного течения в неслоистой пористой среде при наличии источников на границе и вне их – в [8]. Решения задач в случае канонических границ представлены в конечном виде, а в общем случае произвольных гладких границ задачи редуцируются к граничным сингулярным (гиперсингулярным) интегральным уравнениям. Аналогичный подход используется в предлагаемой статье для исследования двумерных граничных задач фильтрации с новыми (усложнёнными) представлениями граничных условий, характеризуемых сингулярными (негладкими) функциями координат; обобщаются исследования [7] на случай тонких и неоднородных (переменных толщины и проницаемости) пористых слоёв. При этом источники течения располагаются произвольно как на границах, так и вне границ.

1. Основные уравнения и граничные условия. Рассмотрим двумерное фильтрационное течение в тонком неоднородном пористом слое переменной малой толщины H и проницаемости K. Течение характеризуется обобщённым потенциалом φ и функцией тока ψ, которые, как функции декартовых координат x, y точек плоскости основания слоя, определяют скорость фильтрации $\vec{v} = (v_x, v_y)$ в области D течения [9, с. 274]:

$$v_x = K\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = K\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (x,y) \in D. \tag{1.1}$$

Здесь $\varphi = -(p+\rho\Pi)/\mu$, p – давление, ρ и μ – плотность и вязкость жидкости соответственно, Π – потенциал массовых сил.

Равенства (1.1) записаны в безразмерных величинах [10, с. 10], из которых следует, что функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ удовлетворяют всюду в области D течения, за исключением сингулярностей (изолированных особых точек) этих функций, эллиптической системе уравнений

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{P}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{1}{P}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad (x,y) \in D, \tag{1.2}$$

где $P = HK > 0$ – проводимость слоя, которая моделируется гладкой (непрерывно дифференцируемой хотя бы один раз) функцией координат $P = P(x,y)$.

Наряду с функциями $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ для исследования течения используем также комплексный потенциал

$$W = \varphi + i\frac{\psi}{P} \quad \left(\varphi = \frac{W+\overline{W}}{2}, \quad \psi = \frac{P(W-\overline{W})}{2i}\right). \tag{1.3}$$

Он характеризует в комплексной плоскости $z = x + iy$ течение и удовлетворяет всюду в области D плоскости z, за исключением его особых точек, следующему из системы (1.2) уравнению

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} + A(W - \overline{W}) = 0, \quad z \in D. \tag{1.4}$$

Здесь $A = \dfrac{\partial \ln\sqrt{P}}{\partial \overline{z}}$, $2\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}} = \dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Удовлетворяющий уравнению (1.4) комплексный потенциал $W(z)$ течения в неоднородном слое является обобщённой аналитической функцией (см. [11, с. 110]). В частности, для течения в однородном слое, когда его толщина H и проницаемость K постоянные (проводимость слоя $P = \mathrm{const}$, следовательно, $A = 0$), комплексный потенциал $W(z)$ есть аналитическая функция $(\partial W/\partial\bar{z} = 0)$.

Течение, как правило, происходит в ограниченной части (области) слоя, причём в силу слоистости пористой среды её коэффициент проницаемости (проницаемость) K может иметь разрывы, в двумерном случае – на некоторых кривых. В связи с этим укажем основные граничные условия, характерные при исследовании фильтрационных процессов в пористых слоях. Запишем условия согласно (1.3) в плоскости z для комплексного потенциала $W(z)$ (функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$). Границы моделируем в плоскости z простыми (без самопересечений) гладкими кривыми (контурами).

Пусть на границе σ_1 области D задан обобщённый потенциал φ (давление p и потенциал Π). Тогда имеем условие

$$W^+(z) + \overline{W}^+(z) = 2\alpha_1(z), \quad (\varphi^+(z) = \alpha_1(z)), \quad z \in \sigma_1, \tag{1.5}$$

где $\alpha_1(z)$ – непрерывная, а в случае замкнутого контура σ_1 также и периодическая, функция. Здесь и далее знаком “ + ” (знаком “ − ”) отмечаются предельные значения функций на границе при подходе к ней со стороны (противоположной стороны) орта $\vec{n}$ нормали границы, который направлен внутрь области D.

В частности, для напорной фильтрации, когда массовые силы пренебрежимо малы $(\rho|\nabla\Pi| \ll |\nabla p|)$ и давление на границе σ_1 постоянное, в условии можно принять $\alpha_1 = \mathrm{const}$.

Если область D имеет непроницаемую для жидкости границу σ_2, являющуюся линией тока, то с учётом $P^+(z) = P(z)$, $z \in \sigma_2$, имеем условие

$$P(z)[W^+(z) - \overline{W}^+(z)] = i2\alpha_2 \quad (\psi^+(z) = \mathrm{const} \equiv \alpha_2), \quad z \in \sigma_2. \tag{1.6}$$

Пусть Γ – граница сопряжения областей D_1 и D_2 течения, проводимость слоя в которых P_1 и P_2, причём $P_\nu = HK_\nu = k_\nu HK = k_\nu P$ $(P = HK,\ k_\nu = \mathrm{const} > 0,\ \nu = 1,2)$, а течение характеризуют комплексные потенциалы W_1 и W_2 (т.е. обобщённые потенциалы φ_ν и функции тока ψ_ν):

$$W_\nu = k_\nu\varphi_\nu + i\frac{\psi_\nu}{P} \quad \left(\varphi_\nu = \frac{W_\nu + \overline{W}_\nu}{2k_\nu}, \quad \psi_\nu = \frac{P(W_\nu - \overline{W}_\nu)}{2i}\right), \quad \nu = 1,2. \tag{1.7}$$

На границе Γ имеют место условия непрерывности давления и расхода жидкости (условия сопряжения):

$$\varphi_1^+(z) = \varphi_2^-(z), \quad \psi_1^+(z) = \psi_2^-(z), \quad z \in \Gamma,$$

которые, учитывая $P_\nu^\pm(z) = k_\nu P(z)$, $\nu = 1,2$, $z \in \Gamma$, запишем для комплексных потенциалов (1.7):

$$\frac{W_1^+(z) + \overline{W}_1^+(z)}{k_1} = \frac{W_2^-(z) + \overline{W}_2^-(z)}{k_2}, \quad W_1^+(z) - \overline{W}_1^+(z) = W_2^-(z) - \overline{W}_2^-(z), \quad z \in \Gamma.$$

Исключим отсюда $W_1^+(z)$ и получим условия сопряжения в виде

$$(1-\lambda)W_1^+(z) = W_2^-(z) + \lambda\overline{W}_2^-(z), \quad z \in \Gamma, \tag{1.8}$$

где орт нормали $\vec{n} \in \Gamma$ направлен внутрь области D_1, а $\lambda = (k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)$, $\lambda \in (-1,1)$.

Так как слой в общем неоднородный, его проводимость $P = P(z) = P(x,y)$, то в слое может быть сингулярная линия $\sigma_0 = \sigma_{01} \bigcup \sigma_{02}$, на которой $P(z) = \infty$ (проницаемость слоя $K = \infty$, его толщина H конечная), $z \in \sigma_{01}$ и $P(z) = 0$ $(K = 0$ или $H = 0)$, $z \in \sigma_{02}$. Поэтому на линии σ_0 должны выполняться условия

$$\frac{[W(z) + \overline{W}(z)]^+}{2} = \mathrm{const} \quad (\varphi^+(z) = \mathrm{const}), \quad z \in \sigma_{01},$$

$$\frac{[P(z)(W(z) - \overline{W}(z))]^+}{2i} = \mathrm{const} \quad (\psi^+(z) = \mathrm{const}), \quad z \in \sigma_{02}. \tag{1.9}$$

Отметим, что если имеются дискретные источники на границах, то заданные на них условия справедливы всюду на границах за исключением точек расположения источников.

Итак, исследование фильтрационного процесса в неоднородном пористом слое сводится к отысканию комплексного потенциала $W(z)$, удовлетворяющего уравнению (1.4) и указанным граничным условиям. Сформулируем конкретные математические модели (граничные задачи) процесса с учётом заданных источников процесса и граничных условий, в которых он протекает.

2. Постановка граничных задач. Пусть заданы источники течения в слое проводимости P, которые моделируем в плоскости z сингулярными (изолированными) особыми точками логарифмического типа и полюсами комплексного потенциала W_0 (обобщённого потенциала φ_0 и функции тока ψ_0):

$$W_0(z) = \varphi_0 + i\frac{\psi_0}{P} \quad \left(\varphi_0 = \frac{W_0 + \overline{W}_0}{2}, \quad \psi_0 = \frac{P(W_0 - \overline{W}_0)}{2i}\right). \tag{2.1}$$

Представим $W_0(z)$ в виде

$$W_0(z) = f_0(z) + f(z), \tag{2.2}$$

где сингулярности функции $f_0(z)$ расположены на заданных в плоскости z кривых σ_1, σ_2 и Γ, а сингулярности функции $f(z)$ – вне кривых.

Учтём источники течения. Когда область D течения ограничена кривой σ_1 или σ_2, представим комплексный потенциал (1.3) в виде

$$W(z) = W_0(z) + W_*(z) = f_0(z) + f(z) + W_*(z), \quad z \in D. \tag{2.3}$$

Если кривая Γ – граница сопряжения областей D_1 и D_2, то комплексный потенциал (1.7) запишем как

$$W_\nu(z) = W_0(z) + W_*(z) = f_0(z) + f(z) + W_*(z), \quad z \in D_\nu, \quad \nu = 1, 2. \tag{2.4}$$

Здесь

$$W_*(z) = \varphi_* + i\frac{\psi_*}{P} \quad \left(\varphi_* = \frac{W_* + \overline{W}_*}{2}, \quad \psi_* = \frac{P(W_* - \overline{W}_*)}{2i}\right), \tag{2.5}$$

$W_*(z)$ – комплексный потенциал (φ_* – обобщённый потенциал, ψ_* – функция тока) возмущений, обусловленных наличием каждой из границ σ_1, σ_2 и Γ.

Уравнению (1.4) удовлетворяет комплексный потенциал $W_0(z)$ на всей плоскости z за исключением особых точек функций $f_0(z)$ и $f(z)$, а комплексный потенциал $W_*(z)$ удовлетворяет всюду в области D течения плоскости z за исключением границ.

С учётом представлений (2.1)–(2.5) запишем для комплексного потенциала $W_*(z)$ возмущений условия на границах, а также в бесконечности. Полагаем, что для заданного комплексного потенциала $W_0(z)$ предельное значение $W_0^+(z)$ со стороны орта нормали границы (противоположной стороны $W_0^-(z)$) равны $W_0(z)$: $W_0^\pm(z) = W_0(z)$ и, следовательно, $f_0^\pm(z) = f_0(z)$, $f^\pm(z) = f(z)$. Условия (1.5) и (1.6) принимают вид

$$W_*^+(z) + \overline{W}_*^+(z) = 2\alpha_1(z) - [f_0(z) + \overline{f}_0(z) + f(z) + \overline{f}(z)]$$
$$(\varphi_*^+(z) = \alpha_1(z) - \operatorname{Re} f_0(z) - \operatorname{Re} f(z)), \quad z \in \sigma_1, \tag{2.6}$$

и

$$P(z)[W_*^+(z) - \overline{W}_*^+(z)] = i2\alpha_2 - P(z)[f_0(z) + \overline{f}_0(z) + f(z) + \overline{f}(z)]$$
$$(\psi_*^+(z) = \alpha_2 - P(z)[\operatorname{Im} f_0(z) + \operatorname{Im} f(z)]), \quad z \in \sigma_2. \tag{2.7}$$

На границе Γ условия сопряжения (1.8) запишем как

$$(1-\lambda)W_*^+(z) - W_*^-(z) - \lambda\overline{W}_*^-(z) = \lambda[f_0(z) + \overline{f}_0(z) + f(z) + \overline{f}(z)], \quad z \in \Gamma$$
$$((1-\lambda)\varphi_*^+(z) - (1+\lambda)\varphi_*^-(z) = 2\lambda[\operatorname{Re} f_0(z) + \operatorname{Re} f(z)], \quad \psi_*^+(z) = \psi_*^-(z)). \tag{2.8}$$

На границе Γ функция тока $\psi_*(z)$ непрерывна, а обобщённый потенциал $\varphi_*(z)$ имеет разрыв, определяемый функциями $f_0(z)$, $f(z)$, $z \in \Gamma$, и параметром $\lambda \in (-1, 1)$. Заметим, что условия (2.6)–(2.8) принципиально усложнены: комплексный потенциал $W_*(z)$ характеризуется на границах сингулярностями заданной функции $f_0(z)$, т.е. заданными на границах источниками течения. Условия справедливы всюду на границах за исключением изолированных особых точек функции $f_0(z)$.

Пусть функции $f_0(z)$ и $f(z)$ удовлетворяют условиям (1.9), тогда находим

$$[W_*(z) + \overline{W}_*(z)]^+ = 0 \quad (\varphi_*^+(z) = 0), \quad z \in \sigma_{01},$$
$$[P(z)(W_*(z) - \overline{W}_*(z))]^+ = 0 \quad (\psi_*^+(z) = 0), \quad z \in \sigma_{02}. \tag{2.9}$$

Комплексный потенциал возмущений $W_*(z)$ не имеет сингулярностей на бесконечности, так как все заданные сингулярности содержат комплексный потенциал $W_0(z)$. Потребуем для $W_*(z)$ условий в бесконечно удалённой точке

$$W_*(z) = O(|z|^{-1}), \quad P(z)|\nabla \mathrm{Re}\, W_*(z)| = O(|z|^{-2}) \quad \text{при} \quad |z| \to \infty, \tag{2.10}$$

которые означают затухание возмущений. При $|z| \to \infty$ комплексный потенциал $W_*(z)$ стремится к нулю и поток скорости $\vec{v}_* = K\nabla\varphi_*$ через замкнутый контур L удовлетворяет условию

$$\int\limits_L H\vec{v}_* \cdot d\vec{l} = \int\limits_L P\nabla\varphi_* \cdot d\vec{l} \to 0,$$

где ∇ – оператор Гамильтона.

Выполнение условий (2.10) обеспечивает единственность решения исследуемых далее задач (см. [10, с. 33]).

Поставим граничные задачи для комплексного потенциала возмущений $W_*(z)$. Заданы источники течения (в плоскости z задан комплексный потенциал $W_0(z)$) и проводимость P (проводимости $P_\nu = k_\nu P$, $k_\nu = \mathrm{const} > 0$, $\nu = 1, 2$) слоя. Найти $W_*(z)$, удовлетворяющий уравнению (1.4) и одному из условий: (2.6) (первая краевая задача), (2.7) (вторая краевая задача) или (2.8) (задача сопряжения). Если область D течения ограничена сингулярной линией σ_0 или/и содержит бесконечно удалённую точку, то $W_*(z)$ должен удовлетворять также условиям (2.9) или/и (2.10).

Тогда по найденному $W_*(z)$ можно найти, использовав представления (2.3) и (2.4), искомые комплексные потенциалы $W(z)$, $W_\nu(z)$, $\nu = 1, 2$, и соответствующие им согласно формулам (1.3) и (1.7) обобщённые потенциалы и функции тока течения.

Отметим, что для разрешимости второй внутренней краевой задачи согласно уравнению неразрывности суммарный поток жидкости от всех заданных источников течения, расположенных внутри и на замкнутом непроницаемом контуре границы σ_2, должен быть равен нулю. Это означает, что характеризующий заданные источники комплексный потенциал $W_0(z) = f_0(z) + f(z)$ должен удовлетворять условию

$$\int\limits_{\sigma_2} H\vec{v}_0 \cdot d\vec{l} = \int\limits_{\sigma_2} P\frac{\partial \mathrm{Re}\, W_0(z)}{\partial n} dl = \int\limits_{\sigma_2} P\frac{\partial}{\partial n}[\mathrm{Re}\, f_0(z) + \mathrm{Re}\, f(z)]dl = 0, \tag{2.11}$$

которое выражает отсутствие потока скорости $\vec{v}_0 = K\nabla\varphi_0 = K\nabla(\mathrm{Re}\, W_0)$ через границу σ_2.

3. Некоторые граничные задачи о течениях в степенном слое. Решения поставленных граничных задач удаётся представить в конечном виде для слоёв некоторых классов проводимостей P. Такие представления решений получены в случае однородного слоя ($P = \mathrm{const}$) (см. [7]). Найдём представления решений задач в конечном виде, когда проводимость слоя моделируется степенной функцией

$$P = y^s \quad (s = \mathrm{const}) \tag{3.1}$$

при $s > 0$ или $s < 0$.

Течение в слое проводимости (3.1), называемом степенным слоем, подробно изучено в монографии [10, с. 201]. Характерной особенностью слоя является наличие сингулярной линии $\sigma_0 = \{(x, y) : y = 0,\ x \in (-\infty, \infty)\}$, на которой проводимость $P = \infty$ (проницаемость слоя $K = \infty$, его толщина H конечная) при $s < 0$ либо $P = 0$ (проницаемость $K = 0$ или/и толщина $H = 0$) при $s > 0$. Течение исследуется в комплексной полуплоскости $\mathrm{Im}\, z \geqslant 0$.

Изучение течения в слое проводимости (3.1) имеет принципиальное значение, так как на примере простейшего вида сингулярной линии $\sigma_0 = \{(x, y) : y = 0,\ x \in (-\infty, \infty)\}$ удаётся развить метод исследования двумерных граничных задач фильтрационных процессов в неоднородных слоях, содержащих сингулярные линии. Кроме того, интересен частный случай, когда $s = 1$, отвечающий осесимметричному процессу в пространстве.

Рассмотрим случай, когда полупрямая линия $x=0,\ y\geqslant 0$ (полуось Oy), ортогональная сингулярной линии $\sigma_0=\{(x,y): y=0,\ x\in(-\infty,\infty)\}$, моделирует каждую из границ σ_1, σ_2 и Γ. Предположим сначала, что $\Gamma=\{(x,y): x=0,\ y\in[0,\infty)\}$ – граница сопряжения областей $D_1(x>0)$ и $D_2(x<0)$, проводимости слоя в которых равны P_1 и P_2 $(P_\nu=k_\nu P$, $k_\nu=\mathrm{const}>0,\ \nu=1,2)$.

Пусть полуось $Oy,\ y\geqslant 0$, моделирует границу Γ. Справедлива

Теорема 1 (сопряжения на полупрямой линии). *Пусть в слое проводимости $P=y^s$ $(s=\mathrm{const})$ источники течения располагаются произвольно и характеризуются в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ комплексным потенциалом $W_0(z)=f_0(z)+f_1(z)+f_2(z)$, в котором сингулярности (изолированные особые точки) функции $f_0(z)$ лежат на полуоси $Oy,\ y>0$, а функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ – соответственно в области $x>0,\ y>0$ и в области $x<0,\ y>0$ полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$. Причём $W_0(z)$ удовлетворяет условиям (2.9) и (2.10). Тогда течения в областях $D_1=\{(x,y): x>0,\ y>0\}$ и $D_2=\{(x,y): x<0,\ y>0\}$, проводимости слоя в которых равны P_1 и P_2 $(P_\nu=k_\nu y^s,\ k_\nu=\mathrm{const}>0,\ \nu=1,2)$, характеризуют комплексные потенциалы*

$$W_1(z)=W_0(z)+\lambda[\overline{f_0(-\bar z)}+\overline{f_1(-\bar z)}+f_2(z)],\quad z\in D_1,$$

$$W_2(z)=W_0(z)-\lambda[f_0(z)+f_1(z)+\overline{f_2(-\bar z)}],\quad z\in D_2, \tag{3.2}$$

где $\lambda=(k_1-k_2)/(k_1+k_2),\ \lambda\in(-1,1)$, а точки $z=x+iy$ и $-\bar z=-x+iy$ полуплоскости $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ симметричны относительно полуоси $Oy,\ y>0$.

Доказательство. Представим комплексные потенциалы (3.2) формулой (2.4), в которой

$$W_*(z)=\begin{cases}AU_1(z), & z\in D_1,\\ BU_2(z), & z\in D_2.\end{cases}$$

Здесь $U_1(z)=\overline{f_0(-\bar z)}+\overline{f_1(-\bar z)}+f_2(z),\ U_2(z)=f_0(z)+f_1(z)+\overline{f_2(-\bar z)},\ A$ и B – в общем случае комплексные постоянные.

Функция $\overline{f_0(-\bar z)}$ также как и заданная функция $f_0(z)$ имеет сингулярности только на границе $\Gamma=\{(x,y): x=0,\ y\in(0,\infty)\}$. Поэтому $\overline{f_0(-\bar z)}$ – обобщённая аналитическая функция, удовлетворяющая уравнению (1.4) всюду в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$.

Функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ имеют заданные сингулярности в областях $D_1=\{(x,y): x>0,\ y>0\}$ и $D_2=\{(x,y): x<0,\ y>0\}$ соответственно. Поэтому функции $\overline{f_1(-\bar z)},\ z\in D_2$, и $\overline{f_2(-\bar z)},\ z\in D_1$, имеют сингулярности в областях D_2 и D_1, так как они являются аналитическими продолжениями в эти области функций $f_1(z),\ z\in D_1$, и $f_2(z),\ z\in D_2$, соответственно. Следовательно, $\overline{f_1(-\bar z)}$ и $\overline{f_2(-\bar z)}$ – обобщённые аналитические функции соответственно в областях D_1 и D_2. Тогда $U_1(z),\ z\in D_1$, и $U_2(z),\ z\in D_2$, – обобщённые аналитические функции, удовлетворяющие в областях D_1 и D_2 уравнению (1.4).

Найдём константы A и B, подставив комплексный потенциал $W_*(z)$ в условие (2.8). В результате получим равенство

$$(1-\lambda)AU_1(0,y)-BU_2(0,y)-\lambda\bar B\overline{U}_2(0,y)=\lambda[W_0(0,y)+\overline{W}_0(0,y)],\quad y>0,$$

в котором $W_0(0,y)=f_0(0,y)+f_1(0,y)+f_2(0,y),\ \overline{W}_0(0,y)=\bar f_0(0,y)+\bar f_1(0,y)+\bar f_2(0,y)$. Так как $U_1(0,y)=\overline{U}_2(0,y)$ и $W_0(0,y)+\overline{W}_0(0,y)=U_1(0,y)+U_2(0,y)$, то имеем выражение

$$[(1-\lambda)A-\lambda(1+\bar B)]U_1(0,y)-(B+\lambda)U_2(0,y)=0,\quad y>0,$$

которое обращается в тождество при $A=\lambda$ и $B=-\lambda$. Следовательно, $W_*(z)$ – обобщённая аналитическая функция в областях D_1 и D_2:

$$W_*(z)=\begin{cases}\lambda U_1(z)=\lambda[\overline{f_0(-\bar z)}+\overline{f_1(-\bar z)}+f_2(z)], & z\in D_1,\\ -\lambda U_2(z)=-\lambda[f_0(z)+f_1(z)+\overline{f_2(-\bar z)}], & z\in D_2,\end{cases}$$

удовлетворяющая условиям (2.9) и (2.10), которым в силу предположений теоремы удовлетворяет заданный комплексный потенциал $W_0(z)$. С учётом вида функции $W_*(z)$ согласно представлению (2.4) имеем искомые комплексные потенциалы (3.2) течения. Теорема доказана.

Из комплексных потенциалов (3.2) найдём обобщённые потенциалы и функции тока течения. Для этого представим функции в виде

$$f_j = u_j + i\frac{v_j}{P} \quad \left(u_j = \frac{f_j + \bar{f}_j}{2}, \quad v_j = \frac{P(f_j - \bar{f}_j)}{2i}\right), \quad j = 0, 1, 2, \tag{3.3}$$

где P – проводимость слоя (3.1).

Тогда, использовав комплексные потенциалы (1.7) и (2.1), имеем

$$k_1\varphi_1(x,y) = \varphi_0(x,y) + \lambda[u_0(-x,y) + u_1(-x,y) + u_2(x,y)],$$

$$\psi_1(x,y) = \psi_0(x,y) - \lambda[v_0(-x,y) + v_1(-x,y) - v_2(x,y)], \quad (x,y) \in D_1,$$

$$k_2\varphi_2(x,y) = \varphi_0(x,y) - \lambda[u_0(x,y) + u_1(x,y) + u_2(-x,y)],$$

$$\psi_2(x,y) = \psi_0(x,y) - \lambda[v_0(x,y) + v_1(x,y) - v_2(-x,y)], \quad (x,y) \in D_2, \tag{3.4}$$

где $\varphi_0(x,y) = u_0(x,y) + u_1(x,y) + u_2(x,y)$, $\psi_0(x,y) = v_0(x,y) + v_1(x,y) + v_2(x,y)$.

Рассмотрим частные случаи задания источников течения и запишем для них комплексные потенциалы (3.2). Если источники течения на границе Γ отсутствуют $(f_0(z) = 0)$, то имеем (см. [10, с. 275])

$$W_1(z) = f_1(z) + (1+\lambda)f_2(z) + \lambda\overline{f_1(-\bar{z})}, \quad z \in D_1,$$

$$W_2(z) = (1-\lambda)f_1(z) + f_2(z) - \lambda\overline{f_2(-\bar{z})}, \quad z \in D_2.$$

Когда источники располагаются только на границе Γ, а вне Γ источников нет $(f_1(z) = 0$ и $f_2(z) = 0)$, то

$$W_1(z) = f_0(z) + \lambda\overline{f_0(-\bar{z})}, \quad z \in D_1,$$

$$W_2(z) = (1-\lambda)f_0(z), \quad z \in D_2.$$

Для этих частных случаев обобщённые потенциалы и функции тока течений нетрудно найти из комплексных потенциалов (3.4).

Полагаем теперь, что полуось Oy, $y \geqslant 0$, моделирует границу σ_1 или σ_2.

Теорема 2. *Пусть течение в слое проводимости $P = y^s$ $(s = \mathrm{const})$ характеризует в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ комплексный потенциал $W_0(z) = f_0(z) + f_1(z)$, в котором моделирующие источники течения сингулярности функции $f_0(z)$ расположены на полуоси Oy, $y > 0$, а функции $f_1(z)$ – в области $x > 0$, $y > 0$ полуплоскости $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. Причём $W_0(z)$, а значит и функции $f_0(z)$ и $f_1(z)$, удовлетворяют условиям (2.9) и (2.10). Тогда течение в области $D = \{(x,y) : x \in (0,\infty),\ y \in (0,\infty)\}$ с границей $\sigma_1 = \{(x,y) : x = 0,\ y \geqslant 0\}$ определяет комплексный потенциал*

$$W(z) = W_0(z) - \overline{W_0(-\bar{z})}, \quad z \in D, \tag{3.5}$$

а с границей $\sigma_2 = \{(x,y) : x = 0,\ y \geqslant 0\}$ – комплексный потенциал

$$W(z) = W_0(z) + \overline{W_0(-\bar{z})}, \quad z \in D. \tag{3.6}$$

Здесь $\overline{W_0(-\bar{z})} = \overline{f_0(-\bar{z})} + \overline{f_1(-\bar{z})}$; $z = x + iy$ и $-\bar{z} = -x + iy$ – симметричные точки относительно полуоси Oy, $y > 0$.

Доказательство. Сингулярности функции $\overline{W_0(-\bar{z})}$ (функций $\overline{f_0(-\bar{z})}$ и $\overline{f_1(-\bar{z})}$) расположены в области $x \leqslant 0$, $y > 0$ полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Поэтому комплексные потенциалы возмущений $W_*(z) = -\overline{W_0(-\bar{z})}$ и $W_*(z) = \overline{W_0(-\bar{z})}$ – обобщённые аналитические функции, удовлетворяющие уравнению (1.4) в области $D = \{(x,y) : x \in (0,\infty),\ y \in (0,\infty)\}$.

Так как на полуоси Oy при $x=0,\ y>0$ справедливы равенства

$$W_0(z)=\overline{W_0(-\bar z)}\quad (f_0(z)=\overline{f_0(-\bar z)},\quad f_1(z)=\overline{f_1(-\bar z)}),$$

то условие (2.6) при $\alpha_1(z)=0$ и условие (2.7) при $\alpha_2=0$ тождественно выполняются. Комплексные потенциалы $W_*(z)=-\overline{W_0(-\bar z)}$ и $W_*(z)=\overline{W_0(-\bar z)}$ удовлетворяют условиям (2.9), (2.10), так как им по условию теоремы удовлетворяет заданный комплексный потенциал $W_0(z)$. Тогда выражения (3.5) и (3.6) – действительно искомые комплексные потенциалы течений. Теорема доказана.

Отметим, что комплексные потенциалы (3.5) и (3.6) можно рассматривать как предельные случаи комплексного потенциала $W_1(z)$ из представления (3.2) при $\lambda\to -1$ и $\lambda\to 1$, когда $k_1=1$ и $W_0(z)=f_0(z)+f_1(z)$ $(f_2(z)=0)$.

Из вида комплексных потенциалов (3.5) и (3.6) следуют их частные выражения в зависимости от задания источников течения: если на границах σ_1 и σ_2 источники отсутствуют $(f_0(z)=0)$, то в комплексных потенциалах (3.5) и (3.6) $W_0(z)=f_1(z)$ [10, с. 277]; когда источники располагаются только на этих границах, вне их источников нет $(f_1(z)=0)$, то $W_0(z)=f_0(z)$.

Использовав представления (1.3), (2.1) и (3.3), находим из комплексных потенциалов (3.5) и (3.6) обобщённые потенциалы и функции тока

$$\begin{gathered}\varphi(x,y)=u_0(x,y)-u_0(-x,y)+u_1(x,y)-u_1(-x,y),\\ \psi(x,y)=v_0(x,y)+v_0(-x,y)+v_1(x,y)+v_1(-x,y),\quad (x,y)\in D,\end{gathered}\tag{3.7}$$

и

$$\begin{gathered}\varphi(x,y)=u_0(x,y)+u_0(-x,y)+u_1(x,y)+u_1(-x,y),\\ \psi(x,y)=v_0(x,y)-v_0(-x,y)+v_1(x,y)-v_1(-x,y),\quad (x,y)\in D.\end{gathered}\tag{3.8}$$

Применим теоремы 1 и 2 для исследования конкретных двумерных течений в слое проводимости $P=y^s$ $(s=\mathrm{const})$ с границами Γ, σ_1, σ_2, моделируемых прямой линией $x=0$, $y\geqslant 0$. Ряд течений с источниками вне границ изучен в монографии [10, с. 286]. Исследуем некоторые течения с источниками, заданными на границах. Пусть течение в слое проводимости $P=y^s$ $(s=\mathrm{const})$ вызвано расположенным в точке (x_0,y_0) стоком полной мощности $\Pi_0>0$ (для источника $\Pi_0<0$) и характеризуется обобщёнными потенциалами [10, с. 209]:

$$u_0(x,y)=\frac{\Pi_0}{2\pi(yy_0)^{s/2}}Q_{s/2-1}(\omega),\quad s>0,\tag{3.9}$$

$$u_0(x,y)=\frac{\Pi_0(yy_0)^{|s|/2}}{2\pi}Q_{|s|/2}(\omega),\quad s<0.\tag{3.10}$$

Здесь $Q_\nu(\omega)$ – функция Лежандра второго рода степени ν (где ν принимает одно из значений: $s/2$, $|s|/2$ или $s/2-1$) аргумента $\omega=1+R^2/(2yy_0)$, $R^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$. С учётом известных свойств функции $Q_\nu(\omega)$ при $\omega\to 1$ (см. [12, с. 165]) в малой окрестности точки (x_0,y_0) запишем

$$Q_\nu(\omega)=\ln\frac{1}{R}-\gamma+\psi(\nu+1),\quad \nu\neq -1,-2,\ldots,\quad \text{при}\quad R\to 0,$$

а также при $\omega\to\infty$ асимптотическое приближение

$$Q_\nu(\omega)\sim\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+3/2)}\left(\frac{yy_0}{R^2}\right)^{\nu+1}\quad \text{при}\quad R^2/(2yy_0)\to\infty.\tag{3.11}$$

Здесь γ – постоянная Эйлера–Маскерони, $\psi(\nu+1)$ – логарифмическая производная гамма-функции $\Gamma(\nu+1)$. Видно, что обобщённые потенциалы (3.9) и (3.10) имеют в точке (x_0,y_0)

сингулярность логарифмического типа и удовлетворяют на сингулярных линиях σ_{01} и σ_{02} условиям (см. [10, с. 108])

$$\lim_{y\to 0}\left[y^s\frac{\partial u_0(x,y)}{\partial y}\right]=0,\quad s>0\quad \text{на}\quad \sigma_{02};\quad \lim_{y\to 0}u_0(x,y)=0,\quad s<0\quad \text{на}\quad \sigma_{01},\tag{3.12}$$

а также при $s>0$ и $s<0$ условию на бесконечности

$$u_0(x,y)=O(1/r^2)\quad \text{при}\quad r=\sqrt{x^2+y^2}\to\infty.\tag{3.13}$$

В силу условий (3.12) и (3.13) будут выполняться требования (2.9) и (2.10), при которых справедливы теоремы 1 и 2.

В случае задачи сопряжения имеем согласно представлению (3.4) и с учётом $u_1(x,y)=0$, $u_2(x,y)=0$ выражения для обобщённых потенциалов течения к стоку, расположенному в точке $(0,y_0)$ границы $\Gamma=\{(x,y): x=0,\ \ y\geqslant 0\}$:

$$k_1\varphi_1(x,y)=u_0(x,y)+\lambda u_0(-x,y),\quad x\in(0,\infty),\quad y\in(0,\infty),$$

$$k_2\varphi_2(x,y)=(1-\lambda)u_0(x,y),\quad x\in(-\infty,0),\quad y\in(0,\infty).$$

Здесь обобщённый потенциал $u_0(x,y)$ представлен формулами (3.9) и (3.10), в которых аргумент функции Лежандра $\omega=1+R^2/(2yy_0)=1+[x^2+(y-y_0)^2]/(2yy_0)$ симметричен: $\omega(x,y)=$ $=\omega(-x,y)$ и, следовательно, $u_0(x,y)=u_0(-x,y)$. Поэтому $\varphi_1(x,y)=\varphi_2(x,y)=\varphi(x,y)$,

$$\varphi(x,y)=\frac{\Pi_0}{\pi(k_1+k_2)(yy_0)^{s/2}}Q_{s/2-1}(\omega),\quad s>0,$$

$$\varphi(x,y)=\frac{\Pi_0(yy_0)^{|s|/2}}{\pi(k_1+k_2)}Q_{|s|/2}(\omega),\quad s<0,\quad x\in(-\infty,\infty),\quad y\in(0,\infty).\tag{3.14}$$

Обобщённые потенциалы (3.14) характеризуют течение к стоку $(\Pi_0>0)$ (от источника, $\Pi_0<$ $<0)$ мощности $2\Pi_0/(k_1+k_2)$.

Пусть теперь сток расположен в точке $(0,y_0)$ границ σ_1 или σ_2, моделируемых прямой $x=0$, $y\geqslant 0$. Тогда согласно представлениям (3.7) и (3.8), в которых $u_1(x,y)=0$, а функция $u_0(x,y)$ имеет вид (3.9) и (3.10), получаем

$$\varphi(x,y)=u_0(x,y)-u_0(-x,y)\quad \text{и}\quad \varphi(x,y)=u_0(x,y)+u_0(x,y),\quad x,y\in(0,\infty).$$

В силу симметрии $u_0(x,y)=u_0(-x,y)$ находим в случае границы σ_1 обобщённый потенциал $\varphi(x,y)=0$ (течение отсутствует) и границы σ_2 –

$$\varphi(x,y)=\frac{\Pi_0}{\pi(yy_0)^{s/2}}Q_{s/2-1},\quad s>0,$$

$$\varphi(x,y)=\frac{\Pi_0(yy_0)^{|s|/2}}{\pi}Q_{|s|/2}(\omega),\quad s<0,\quad x,y\in(0,\infty).\tag{3.15}$$

Обобщённые потенциалы (3.15) характеризуют течение к стоку $(\Pi_0>0)$ (от источника, $\Pi_0<$ $<0)$ мощности $2\Pi_0$. Заметим, что эти потенциалы следуют из выражений (3.14) при $k_1=1$ и $k_2\to 0$.

Найдём предельные выражения обобщённых потенциалов (3.14) и (3.15), $s>0$, когда $y_0\to 0$ $(R\to r=\sqrt{x^2+y^2})$. Использовав асимптотическое приближение функции Лежандра (3.11), имеем

$$\varphi(x,y)=\frac{\Pi_0\Gamma(s/2)}{\pi(k_1+k_2)((s+1)/2)r^s},\quad x\in(-\infty,\infty),\quad y\in(0,\infty),\tag{3.16}$$

и

$$\varphi(x,y)=\frac{\Pi_0\Gamma(s/2)}{\pi((s+1)/2)r^s},\quad x,y\in(0,\infty),\tag{3.17}$$

где $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

Обобщённые потенциалы (3.16) и (3.17) описывают течения к стоку (от источника), расположенному в начале координат, на пересечении сингулярной линии $\sigma_{02}=\{(x,y):x\in\in(-\infty,\infty),\ y=0\}$ с границами Γ и σ_2 соответственно, моделируемыми прямой линией $x=0,\ y\geqslant 0$.

Решения (3.14)–(3.17) при $s=1$ характеризуются гармоническими функциями $\varphi(x,y)$ – потенциалами пространственных осесимметричных течений, когда стоки (источники) расположены на границах Γ и σ_2, моделируемых плоскостью $x=0$. А именно, при $s=1$ потенциалы (3.14) и (3.15) описывают кольцевые стоки (источники) радиуса y_0 с центром в начале координат, а потенциалы (3.16) и (3.17) – точечные стоки (источники), находящиеся в начале координат.

Рассмотренные примеры не исчерпывают возможностей использования теорем 1 и 2 для нахождения в конечном виде обобщённых потенциалов течений от других источников в слое проводимости (3.1). В слое такой проводимости имеют место другие представления решений в конечном виде граничных задач [10, с. 290], допускающих обобщения на случай, когда стоки (источники) течения располагаются на границах.

4. Задачи с произвольными замкнутыми гладкими границами. Рассмотрим общий случай течения в слое проводимости $P(z)$, когда сток или источник располагается на границе Γ или σ_2, каждая из которых моделируется произвольной замкнутой гладкой кривой (контуром) L. Для исследования граничных задач принципиальное значение имеют первое $(k=1)$ и второе $(k=2)$ комплексные фундаментальные решения

$$F_k(z,z_0)=\Phi_k(z,z_0)+i\frac{\Psi_k(z,z_0)}{P(z)},\quad k=1,2,$$

которые по координатам точки $z=x+iy$ $(z\neq z_0,\ z_0=x_0+iy_0$ – точка-параметр) удовлетворяют в области D течения уравнению (1.4) и имеют в точке $z=z_0$ согласно асимптотике

$$F_1(z,z_0)\sim\frac{1}{2\pi P(z_0)}\ln\frac{1}{z-z_0},\quad F_2(z,z_0)\sim\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{1}{z-z_0}\quad\text{при}\quad z\to z_0\tag{4.1}$$

сингулярности логарифмического типа.

Полагаем, что согласно представлениям (2.9) решения $F_k(z,z_0)$ (функции $\Phi_k(z,z_0)$ и $\Psi_k(z,z_0)$, $k=1,2$) удовлетворяют на сингулярной линии $\sigma_0=\sigma_{01}\bigcup\sigma_{02}$ условиям

$$[F_k(z,z_0)+\overline{F}_k(z,z_0)]^+=0\quad(\Phi_k^+(z,z_0)=0),\quad k=1,2,\quad z\in\sigma_{01},\tag{4.2}$$

$$[P(z)(F_k(z,z_0)-\overline{F}_k(z,z_0))]^+=0\quad(\Psi_k^+(z,z_0)=0),\quad k=1,2,\quad z\in\sigma_{02}.$$

Решения $F_1(z,z_0)$ и $F_2(z,z_0)$ – комплексные потенциалы течений, вызванные нормированным стоком и вихрем соответственно, известны для слоёв широких классов проводимостей $P(z)$ [10, с. 94].

Пусть течение в слое проводимости $P(z)$ обусловлено стоком суммарной мощности Π_0, а также другими источниками. Сток расположен в точке z_0 контура L и характеризуется комплексным потенциалом

$$f_0(z)=\Pi_0F_1(z,z_0)=\Pi_0\left(\Phi_1(z,z_0)+i\frac{\Psi_1(z,z_0)}{P(z)}\right),$$

а другие источники течения заданы вне и внутри контура L. Начало координат выберем внутри контура L. Течение описываем комплексным потенциалом

$$W_0(z)=\Pi_0F_1(z,z_0)+f(z),\tag{4.3}$$

в котором сингулярности (изолированные особые точки) функции $f(z)$ характеризуют источники, расположенные вне и внутри контура L.

Искомый комплексный потенциал $W(z)$ течения представим в виде (2.3), в котором комплексный потенциал возмущения $W_*(z)$ выразим обобщённым интегралом типа Коши [10, с. 166], а именно, когда на всём контуре L, за исключением точки $z_0 \in L$, функция тока непрерывна (непрерывен расход жидкости):

$$W_*(z) = -\int\limits_L P(\zeta) w_2'(z,\zeta)[g(\zeta) + A_0\Phi_1(\zeta, z_0)]\,dl_\zeta, \quad z \notin L, \tag{4.4}$$

и если контур L – непроницаемый для жидкости (нет потока через L), то

$$W_*(z) = \int\limits_L P(\zeta) w_1'(z,\zeta)\left[h(\zeta) + B_0\frac{\Psi_1(\zeta, z_0)}{P(\zeta)}\right]dl_\zeta, \quad z \notin L. \tag{4.5}$$

Здесь A_0 и B_0 – вещественные постоянные; $g(\zeta)$ и $h(\zeta)$ – непрерывные вещественные функции переменной $\zeta \in L$; $w_1'(z,\zeta)$ и $w_2'(z,\zeta)$ – главные решения уравнения (1.4) по переменной z (ζ – точка-параметр), которые связаны с фундаментальными решениями $F_k(z,\zeta)$, $k = 1, 2$, равенствами

$$w_1' = (z,\zeta) = -\frac{\partial F_1(z,\zeta)}{\partial l_\zeta} = -\frac{1}{P(\zeta)}\frac{\partial F_2(z,\zeta)}{\partial n_\zeta},$$

$$w_2' = (z,\zeta) = -\frac{\partial F_1(z,\zeta)}{\partial n_\zeta} = \frac{1}{P(\zeta)}\frac{\partial F_2(z,\zeta)}{\partial l_\zeta}.$$

Рассмотрим подынтегральные выражения (4.4) и (4.5), содержащие функции $\Phi_1(\zeta, z_0)$ и $\Psi_1(\zeta, z_0)$, и убедимся, что при $\zeta \to z_0$ они принимают ограниченные значения. Согласно асимптотике (4.1) имеем

$$\Phi_1(\zeta, z_0) \sim \frac{1}{2\pi P(z_0)}\ln\frac{1}{|\zeta - z_0|}, \quad \Psi_1(\zeta, z_0) \sim -\frac{P(\zeta)}{2\pi P(z_0)}\arg(\zeta - z_0) \quad \text{при} \quad \zeta \to z_0.$$

Так как

$$\lim_{\zeta \to z_0}[|\zeta - z_0|^\varepsilon \Phi_1(\zeta, z_0)] = 0, \quad \text{то} \quad \Phi_1(\zeta, z_0) = O(1/|\zeta - z_0|^\varepsilon) \quad \text{при} \quad \zeta \to z_0, \tag{4.6}$$

где ε – сколь угодно малое положительное число ($\varepsilon < 1$). Функция $\Psi_1(\zeta, z_0)$ принимает при $\zeta \to z_0$ конечные значения. Поэтому интегралы, содержащие $\Phi_1(\zeta, z_0)$ и $\Psi_1(\zeta, z_0)$, сходятся (существуют) и, следовательно, комплексные потенциалы (4.4) и (4.5) удовлетворяют уравнению (1.4).

Комплексные потенциалы (4.4) и (4.5) удовлетворяют условиям (2.9), так как решения $F_k(z,\zeta)$, $k = 1, 2$, удовлетворяют условиям (4.2). Поскольку эти комплексные потенциалы представлены обобщёнными интегралами типа Коши, то согласно [11, с. 144] они удовлетворяют на бесконечности условию

$$W_*(z) = O(1/|z|) \quad \text{при} \quad |z| \to \infty. \tag{4.7}$$

Согласно монографии [10, с. 158] непрерывно продолжим комплексные потенциалы (4.4) и (4.5) на контур L. Положив, что $g(\zeta)$ и $h(\zeta)$ – функции класса Гёльдера, находим предельные значения во всех точках контура L, кроме точки $z_0 \in L$:

$$W_*^\pm(z) = -\int\limits_L P(\zeta) w_2'(z,\zeta)[g(\zeta) + A_0\Phi_1(\zeta, z_0)]\,dl_\zeta \pm \frac{g(z) + A_0\Phi_1(z, z_0)}{2}, \quad z \in L, \quad z \neq z_0, \tag{4.8}$$

$$W_*^{\pm}(z)=\int\limits_L P(\zeta)w_1'(z,\zeta)\left[h(\zeta)+B_0\frac{\Psi_1(\zeta,z_0)}{P(\zeta)}\right]dl_\zeta \pm\frac{i}{2}\left[h(z)+\frac{B_0\Psi_1(z,z_0)}{P(z)}\right],\quad z\in L,\quad z\neq z_0,\ (4.9)$$

где интегралы понимаются в смысле главных значений по Коши.

Применим представления (4.4) и (4.5) комплексных потенциалов возмущений для исследования задач с границами Γ и σ_2, которые моделируем гладкими замкнутыми кривыми (контурами) класса Ляпунова.

Теорема 3 (сопряжения на произвольном гладком контуре). *Пусть течение в слое проводимости $P(z)$ характеризуется в плоскости z комплексным потенциалом (4.3), в котором Π_0 – мощность стока, расположенного в точке z_0 произвольного гладкого замкнутого контура Γ. Другие источники течения расположены вне и внутри контура Γ и характеризуются сингулярностями функции $f(z)$. Тогда течение в областях D_1 и D_2 (вне и внутри контура Γ), проводимости слоя в которых равны P_1 и P_2 ($P_\nu = k_\nu P(z)$, $k_\nu = \mathrm{const} > 0$, $\nu = 1, 2$), описывают комплексные потенциалы $W_1(z)$ и $W_2(z)$:*

$$W_\nu(z) = \Pi_0 F_1(z,z_0)+f(z)-\int\limits_\Gamma P(\zeta)w_2'(z,\zeta)[g(\zeta)+2\lambda\Pi_0\Phi_1(\zeta,z_0)]\,dl_\zeta,\quad z\in D_\nu,\quad \nu=1,2,\ (4.10)$$

если функция $g(z)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$g(z)+2\lambda\int\limits_\Gamma \mathcal{K}_1(z,\zeta)g(\zeta)\,dl_\zeta+4\lambda^2\Pi_0\int\limits_\Gamma \mathcal{K}_1(z,\zeta)\Phi_1(\zeta,z_0)\,dl_\zeta = 2\lambda\operatorname{Re} f(z),\quad z\in\Gamma,\quad z\neq z_0.\ (4.11)$$

Здесь

$$\mathcal{K}_1(z,\zeta) = P(\zeta)\operatorname{Re} w_2'(z,\zeta) = -P(\zeta)\frac{\partial\Phi_1(z,\zeta)}{\partial n_\zeta} = \frac{\partial\Phi_2(z,\zeta)}{\partial l_\zeta},$$

орт нормали $\vec{n}_\zeta\in\Gamma$ направлен внутрь области D_1, $\lambda = (k_1-k_2)/(k_1+k_2)$, $\lambda\in(-1,1)$.

Доказательство. Согласно представлению (4.4) имеем в случае контура Γ комплексный потенциал возмущений

$$W_*(z) = -\int\limits_\Gamma P(\zeta)w_2'(z,\zeta)[g(\zeta)+A_0\Phi_1(\zeta,z_0)]\,dl_\zeta,\quad z\notin\Gamma.$$

Комплексный потенциал $W_*(z)$ является решением уравнения (1.4), удовлетворяющим условию (2.9), а также условию (4.7), поскольку возможные на бесконечности источники течения заданы сингулярностями комплексного потенциала $W_0(z)$ из (4.3).

Найдём константу A_0, подставив комплексный потенциал $W_*(z)$ в условия (2.8). С учётом его предельных значений (4.8) на контуре Γ получим равенство

$$g(z)+2\lambda\int\limits_\Gamma P(\zeta)\operatorname{Re} w_2'(z,\zeta)[g(\zeta)+A_0\Phi_1(z,\zeta)]\,dl_\zeta+(A_0-2\lambda\Pi_0)\Phi_1(z,z_0) =$$

$$= 2\lambda\operatorname{Re} f(z),\quad z\in\Gamma,\quad z\neq z_0.$$

Это равенство тождественно выполняется, если $A_0 = 2\lambda\Pi_0$, а функция $g(z)$ удовлетворяет интегральному уравнению (4.11). Подставив $A_0 = 2\lambda\Pi_0$ в комплексный потенциал $W_*(z)$ и учтя равенства (2.3), имеем искомые комплексные потенциалы (4.10). Теорема доказана.

Исследуем интегральное уравнение (4.11). Оценим его ядро

$$\mathcal{K}_1(z,\zeta) = -P(\zeta)\frac{\partial\Phi_1(z,\zeta)}{\partial n_\zeta}$$

при условии, что функцию $\Phi_1(z,\zeta)$ можно представить в виде [10, с. 111]

$$\Phi_1(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi\sqrt{P(z)P(\zeta)}}\left[f_1(z,\zeta)\ln\frac{1}{|z-\zeta|}+g_1(z,\zeta)\right].$$

Здесь P – проводимость слоя, $f_1(z,\zeta)$ и $g_1(z,\zeta)$ – гладкие (непрерывно дифференцируемые) функции переменных z и ζ в областях D_1, D_2 и на контуре Γ, причём $f_1(z,z)=1$. Так как контур Γ моделируется кривой класса Ляпунова, то согласно монографии [10, с. 398] для ядра $\mathcal{K}_1(z,\zeta)$ справедлива оценка $|\mathcal{K}_1(z,\zeta)=O(|z-\zeta|^{1-\mu})|$, $\mu\in(0,1]$, при $\zeta\to z$. Тогда с учётом оценки (4.6) для функции $\Phi_1(\zeta,z_0)$ находим

$$|\mathcal{K}_1(z,\zeta)\Phi_1(\zeta,z_0)|=O(|z-\zeta|^{1-\mu-\varepsilon})\quad\text{при}\quad \zeta\to z=z_0\in\Gamma.$$

Поскольку $g(\zeta)$ – функция класса Гёльдера, то подынтегральное выражение в уравнении (4.11) имеет согласно оценок слабые (интегрируемые) особенности и, следовательно, интегралы сходятся (существуют).

Таким образом, исследование задачи сопряжения редуцируется к граничному неоднородному интегральному уравнению второго рода со слабой сингулярностью (типа Фредгольма).

Представление (4.10) задачи сопряжения получено для произвольно заданных источников течения. В частности, когда сток на границе Γ отсутствует $(\Pi_0=0)$, то [10, с. 390]

$$W_\nu(z)=f(z)-\int\limits_\Gamma P(\zeta)w_2'(z,\zeta)g(\zeta)\,dl_\zeta,\quad z\in D_\nu,\quad \nu=1,2,$$

если функция $g(z)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$g(z)+2\lambda\int\limits_\Gamma \mathcal{K}_1(z,\zeta)g(\zeta)\,dl_\zeta=2\lambda\mathrm{Re}\,f(z),\quad z\in\Gamma.$$

Когда имеется сток мощности Π_0 только на границе Γ, а другие источники вне границы Γ отсутствуют $(f(z)=0)$, то

$$W_\nu(z)=\Pi_0F_1(z,z_0)-\int\limits_\Gamma P(\zeta)w_2'(z,\zeta)[g(\zeta)+2\lambda\Pi_0\Phi_1(\zeta,z_0)]\,dl_\zeta,\quad z\in D_\nu,\quad \nu=1,2,$$

если для функции $g(z)$ справедливо интегральное уравнение

$$g(z)+2\lambda\int\limits_\Gamma \mathcal{K}_1(z,\zeta)g(\zeta)\,dl_\zeta+4\lambda^2\Pi_0\int\limits_\Gamma \mathcal{K}_1(z,\zeta)\Phi_1(\zeta,z_0)\,dl_\zeta=0,\quad z\in\Gamma,\quad z\ne z_0,$$

которое неоднородно в силу последнего слагаемого, стоящего слева.

Пусть теперь замкнутый контур L моделирует непроницаемую границу σ_2 $(L=\sigma_2)$. Течение в слое проводимости $P(z)$ характеризуется комплексным потенциалом (4.3), в котором Π_0 – мощность стока, расположенного в точке z_0 контура σ_2, а сингулярности функции $f(z)$ моделируют другие источники течения, лежащие вне либо внутри контура σ_2. В силу уравнения неразрывности комплексный потенциал (4.3) должен удовлетворять условию (2.11), т.е.

$$\int\limits_{\sigma_2} P(\zeta)\frac{\partial}{\partial n_\zeta}[\Pi_0\Phi_1(\zeta,z_0)+\mathrm{Re}\,f(\zeta)]\,dl_\zeta=0,\tag{4.12}$$

где функция $f(\zeta)$ имеет сингулярности внутри контура σ_2.

Теорема 4. *Пусть течение в слое проводимости $P(z)$ характеризует комплексный потенциал (4.3), сингулярности которого моделируют сток мощности Π_0, расположенный* *на контуре* σ_2, *а также другие источники, лежащие вне либо внутри контура (функция* $f(z)$*). Причём этот комплексный потенциал удовлетворяет условию (4.12). Если контур* σ_2 *– непроницаемый для жидкости, то течение в области* D *(вне или внутри контура* σ_2*) описывает комплексный потенциал*

$$W(z) = \Pi_0 F_1(z, z_0) + f(z) + \int\limits_{\sigma_2} P(\zeta) w_1'(z, \zeta) \left[h(\zeta) - \frac{2\Pi_0 \Psi_1(\zeta, z_0)}{P(\zeta)} \right] dl_\zeta, \quad z \in D, \tag{4.13}$$

если функция $h(z)$ *удовлетворяет интегральному уравнению*

$$h(z) + 2\int\limits_{\sigma_2} \mathcal{K}_2(z, \zeta) h(\zeta)\, dl_\zeta - 4\Pi_0 \int\limits_{\sigma_2} \mathcal{K}_2(z, \zeta) \frac{\Psi_1(\zeta, z_0)}{P(\zeta)} dl_\zeta =$$

$$= 2\left[\frac{\alpha_2}{P(z)} - \operatorname{Im} f(z) \right], \quad z \in \sigma_2, \quad z \neq z_0. \tag{4.14}$$

Здесь

$$\mathcal{K}_2(z, \zeta) = P(\zeta) \operatorname{Im} w_1'(z, \zeta) = -\frac{P(\zeta)}{P(z)} \frac{\partial \Psi_1(z, \zeta)}{\partial l_\zeta} = -\frac{1}{P(z)} \frac{\partial \Psi_2(z, \zeta)}{\partial n_\zeta},$$

орт $\vec{n}_\zeta \in \sigma_2$ *направлен внутрь области* D.

Доказательство. Согласно представлению (4.5) комплексный потенциал возмущений $W_*(z)$ запишем в виде

$$W_*(z) = \int\limits_{\sigma_2} P(\zeta) w_1'(z, \zeta) \left[h(\zeta) + B_0 \frac{\Psi_1(\zeta, z_0)}{P(\zeta)} \right] dl_\zeta, \quad z \in D,$$

где контур σ_2 обходится по часовой стрелке для внешней задачи и против часовой стрелки для внутренней задачи. Комплексный потенциал $W_*(z)$ есть решение уравнения (1.4), которое удовлетворяет условию (2.9), а также условию (4.7) в случае внешней задачи.

Найдём константу B_0, подставив комплексный потенциал $W_*(z)$ в условие (2.7). С учётом его предельных значений (4.9) на контуре σ_2 находим равенство

$$h(z) + 2\int\limits_{\sigma_2} P(\zeta) \operatorname{Im} w_1'(z, \zeta) \left[h(\zeta) + B_0 \frac{\Psi_1(\zeta, z_0)}{P(\zeta)} \right] dl_\zeta + (B_0 + 2\Pi_0) \frac{\Psi_1(z, z_0)}{P(z)} =$$

$$= 2\left[\frac{\alpha_2}{P(z)} - \operatorname{Im} f(z) \right], \quad z \in \sigma_2, \quad z \neq z_0,$$

которое обращается в тождество, если $B_0 = -2\Pi_0$, а функция $h(z)$ удовлетворяет уравнению (4.14). Подставив $B_0 = -2\Pi_0$ в комплексный потенциал $W_*(z)$, согласно представлению (2.3) имеем искомый комплексный потенциал (4.13). Теорема доказана.

Интегральное уравнение (4.14) имеет слабую сингулярность. Действительно, оценим ядро уравнения

$$\mathcal{K}_2(z, \zeta) = -\frac{1}{P(z)} \frac{\partial \Psi_2(z, \zeta)}{\partial n_\zeta},$$

исходя из представления функции [10, с. 111]

$$\Psi_2(z, \zeta) = -\frac{\sqrt{P(z)P(\zeta)}}{2\pi} \left[f_2(z, \zeta) \ln \frac{1}{|z - \zeta|} + g_2(z, \zeta) \right].$$

Здесь P – проводимость слоя, $f_2(z,\zeta)$ и $g_2(z,\zeta)$ – гладкие функции переменных z и ζ, причём $f_2(z,z)=1$. Тогда в случае контура σ_2 класса Ляпунова справедлива такого же порядка сингулярности оценка

$$|\mathcal{K}_2(z,\zeta)| = O(|z-\zeta|^{1-\mu}), \quad \mu \in (0,1],$$

при $\zeta \to z$, что и для ядра $\mathcal{K}_1(z,\zeta)$ уравнения (4.11). Так как функция $\Psi_1(\zeta,z_0)$ при $\zeta \to z_0$ ограничена, а $h(\zeta)$ – функция класса Гёльдера, то подынтегральные выражения в уравнении (4.14) имеют слабую (интегрируемую) особенность и, следовательно, интегралы существуют.

Итак, исследование второй внешней и внутренней краевых задач редуцируется к граничному неоднородному интегральному уравнению второго рода со слабой сингулярностью.

Рассмотрим частные случаи представления (4.13) решения второй краевой задачи в зависимости от задания источников течения. Пусть на границе σ_2 сток отсутствует $(\Pi_0 = 0)$. Тогда [10, с. 392]

$$W(z) = f(z) + \int\limits_{\sigma_2} P(\zeta) w_2'(z,\zeta) h(\zeta)\, dl_\zeta, \quad z \in D,$$

если функция $h(z)$ является решением интегрального уравнения

$$h(z) + 2\int\limits_{\sigma_2} \mathcal{K}_2(z,\zeta) h(\zeta)\, dl_\zeta = 2\left[\frac{\alpha_2}{P(z)} - \operatorname{Im} f(z)\right], \quad z \in \sigma_2.$$

Когда имеется сток мощности Π_0 только на границе σ_2, а вне границы σ_2 нет источников течения $(f(z)=0)$, то

$$W(z) = \Pi_0 F_1(z,z_0) + \int\limits_{\sigma_2} P(\zeta) w_2'(z,\zeta)\left[h(\zeta) - \frac{2\Pi_0 \Psi_1(\zeta,z_0)}{P(\zeta)}\right] dl_\zeta, \quad z \in D,$$

если функция $h(z)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$h(z) + 2\int\limits_{\sigma_2} \mathcal{K}_2(z,\zeta) h(\zeta)\, dl_\zeta - 4\Pi_0 \int\limits_{\sigma_2} \mathcal{K}_2(z,\zeta) \frac{\Psi_1(\zeta,z_0)}{P(\zeta)}\, dl_\zeta = \frac{2\alpha_2}{P(z)}, \quad z \in \sigma_2, \quad z \neq z_0.$$

Задачу сопряжения и вторую краевую задачу нетрудно обобщить согласно принципу наложения течений на случай, когда на границах Γ и σ_2 располагаются несколько дискретных источников течения, характеризуемых сингулярностями логарифмического типа.

Заключение. Подводя итоги, отметим, что решения первой и второй краевых задач и задачи сопряжения с произвольно расположенными дискретными источниками течения удаётся представить в конечном виде для слоёв некоторых классов проводимостей. Это продемонстрировано на примере слоя, проводимость которого моделируется степенной функцией координат, а границы – прямолинейные. В общем случае, когда проводимость слоя моделируется произвольной гладкой функцией координат, а границы – произвольными гладкими замкнутыми кривыми, вторая краевая задача и задача сопряжения редуцированы к граничным сингулярным интегральным уравнениям. Эти уравнения могут быть решены, например, численным методом дискретных особенностей [1, с. 433].

Исследованные задачи являются математическими моделями двумерных фильтрационных процессов, имеющих место, например, при разработке водоносных (нефтеносных) неоднородных пластов грунта. Они могут представлять интерес при изучении процессов теплопроводности, электропроводности, электро- и магнитостатики в слоистых структурах, характеризующихся законами и граничными условиями, аналогичными законам (1.1) и указанным граничным условиям фильтрационных процессов.

Автор благодарит А.В. Сетуху за содержательное и полезное обсуждение результатов статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., 1995.
2. *Dimitroglo M.G., Setukha A.V., Lifanov I.K.* On numerical modeling of a three-dimensional flow past a wing with external flow suction and on the effect of flow suction on trailing vortices // Rus. J. of Numer. Anal. and Math. Model. 2004. V. 19. № 2. P. 109–129.
3. *Лифанов И.К., Сетуха А.В.* О сингулярных решениях некоторых краевых задач и сингулярных интегральных уравнений // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 9. С. 1227–1241.
4. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М., 1977.
5. *Пивень В.Ф., Костин О.В.* Фильтрационные течения с источниками на непроницаемых канонических границах // Тр. Междунар. школ-семинаров “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики”. Вып. 8. Орёл, 2009. С. 92–98.
6. *Деткова Ю.В., Никольский Д.Н.* Исследование работы водозабора вблизи источника загрязнения, расположенного на окружности // Тр. Междунар. школ-семинаров “Методы дискретных особенностей в задачах математической физики”. Вып. 8. Орёл, 2009. С. 46–51.
7. *Пивень В.Ф.* Задачи о плоскопараллельных фильтрационных течениях с источниками на границах // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 9. С. 1214–1225.
8. *Пивень В.Ф.* Исследование трёхмерных задач фильтрации жидкости с источниками на границах // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. № 9. С. 1238–1254.
9. *Голубева О.В.* Курс механики сплошных сред. М., 1972.
10. *Пивень В.Ф.* Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости. Орёл, 2006.
11. *Векуа И.А.* Обобщенные аналитические функции. М., 1988.
12. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М., 1973.

Орловский государственный университет
имени И.С. Тургенева

Поступила в редакцию 02.03.2022 г.
После доработки 24.04.2022 г.
Принята к публикации 05.07.2022 г.