ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 8, с. 1158–1162

ХРОНИКА

О СЕМИНАРЕ ПО ПРОБЛЕМАМ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ И УПРАВЛЕНИЯ ПРИ МОСКОВСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ им. М.В. ЛОМОНОСОВА*)

Ниже публикуются краткие аннотации докладов, состоявшихся в весеннем семестре 2022 г. (предыдущее сообщение о работе семинара дано в журнале “Дифференц. уравнения”. 2022. Т. 58. № 2; за дополнительной информацией обращаться по адресу: nds@cs.msu.su)**).

DOI: 10.31857/S0374064122080155, EDN: CHILHW

А. С. Фурсов, П. А. Крылов (МГУ ВМК, Москва, Россия) “Об устойчивости переключаемой аффинной системы для некоторого класса переключающих сигналов” (14.02.2022).

В настоящее время теория кусочно-линейных систем является динамично развивающимся направлением в рамках современной теории автоматического управления. И, в первую очередь, это объясняется эффективностью использования таких систем для аппроксимации нелинейных аффинных систем управления [1]. Алгоритмы управления, разработанные для кусочно-линейных аппроксимаций, позволяют успешно применять их и для исходных нелинейных систем [2, с. 97; 3]. Если для нелинейной системы рассматривается некоторое семейство аппроксимирующих кусочно-линейных систем, то такое семейство фактически представляет собой переключаемую аффинную систему с заданным множеством переключающих сигналов. Исследование свойств таких систем, в частности, устойчивости, является одной из актуальных задач в рамках современной теории стабилизации динамических систем.

Прежде чем перейти к постановке задачи, введём некоторые необходимые понятия. Рассмотрим разбиение евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ на m замкнутых выпуклых многогранников $\overline{M}_i$ $(i=\overline{1,m})$. При этом считаем, что $0\in M_1$ (через M_i обозначаем множество внутренних точек многогранника $\overline{M}_i$). Так как пара выпуклых многогранников, не имеющих общих внутренних точек, может иметь не более одной общей грани, то в описанном разбиении каждый многогранник имеет не более $m-1$ граней. Обозначим через P_{ij} $(i\neq j)$ плоскость, разделяющую соприкасающиеся многогранники $\overline{M}_i$ и $\overline{M}_j$. Тогда $P_{ij}=\{x\in\mathbb{R}^n:\langle n_{ij},x\rangle=d_{ij}\}$, где n_{ij} – нормаль к плоскости P_{ij}, направленная в сторону многогранника $\overline{M}_j$, $d_{ij}\in\mathbb{R}$. Для определённости будем полагать, что $n_{ij}=\mathbf{0}$, $d_{ij}=1$, если многогранники $\overline{M}_i$ и $\overline{M}_j$ не пересекаются. Таким образом, $\overline{M}_i=\{x\in\mathbb{R}^n:\langle n_{ij},x\rangle\leqslant d_{ij},\ \ j=\overline{1,m}\}$. Определим общую для многогранников $\overline{M}_i$, $\overline{M}_j$ грань $\overline{\Gamma}_{ij}$ и её внутренность Γ_{ij} следующим образом: $\overline{\Gamma}_{ij}=\overline{M}_i\bigcap\overline{M}_j$, $\Gamma_{ij}=\overline{\Gamma}_{ij}\setminus\bigcup_{k\neq i,j}\overline{M}_k$. Пусть $\Gamma(Z,D)=\bigcup_{i,j}\overline{\Gamma}_{ij}$. Обозначим через $Z=\big[n_{ij}\big]_{i,j=1}^{n}$ массив размера $m\times m$, состоящий из векторов $n_{ij}\in\mathbb{R}^n$, через $D=\big(d_{ij}\big)$ – матрицу из $\mathbb{R}^{m\times m}$ (при этом для удобства полагаем, что $n_{ii}=0$, $d_{ii}=1$) и, наконец, через F – множество всевозможных пар (Z,D), задающих различные разбиения пространства $\mathbb{R}^n$ на m выпуклых многогранников.

Теперь рассмотрим переключаемую скалярную по входу аффинную систему

$$\dot{x}=A_\sigma x+v_\sigma+b_\sigma u,\quad \sigma\in S(F), \tag{1}$$

где $\sigma(x;Z,D):R^n\to I=\{1,\ldots,m\}$ – кусочно-постоянная функция (переключающий сигнал), принимающая постоянное значение i на каждом открытом выпуклом многограннике M_i,

*) Семинар основан академиками РАН С.В. Емельяновым и С.К. Коровиным.

**) Составитель хроники А.В. Ильин.

задаваемом парой (Z, D); $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $u \in \mathbb{R}$ – управляющий вход; $A_\sigma = A \circ \sigma$ – композиция отображения $A : I \to \{A_1, \ldots, A_m\}$ и переключающего сигнала σ; $b_\sigma = b \circ \sigma$ и $v_\sigma = v \circ \sigma$ – аналогичные композиции для отображений $b : I \to \{b_1, \ldots, b_m\}$, $v : I \to \{v_1, \ldots, v_m\}$, причём считаем, что $v_1 = 0$.

Значение функции $\sigma(x; Z, D)$ в каждой точке x определяет активный режим (подсистему) функционирования (A_i, b_i, v_i) переключаемой системы (1), описываемый аффинной системой

$$\dot{x} = A_i x + v_i + b_i u.$$

Замкнём систему (1) обратной связью $u = -kx$:

$$\dot{x} = A_\sigma x + v_\sigma - b_\sigma k x, \quad \sigma \in S(F). \tag{2}$$

Рассматриваемую обратную связь будем считать допустимой, если в каждой точке общей границы любых двух соприкасающихся многогранников существует единственный способ выбрать режим i (соответствующий одному из этих многогранников) таким образом, чтобы векторное поле выбранного режима в данной точке было направлено строго внутрь соответствующего многогранника $\overline{M}_i$. Указанное ограничение на допустимые управления позволяет доопределить переключающий сигнал $\sigma(x; Z, D)$ (положив его равным i) на гиперплоскостях переключения таким образом, что решение системы (2) существует и единственно для любых начальных условий.

Будем говорить, что нулевое решение системы (2) глобально равномерно устойчиво, если для любого $\sigma \in S(F)$ нулевое решение соответствующей системы глобально асимптотически устойчиво.

Постановка задачи. Исследуем нулевое решение замкнутой системы (2) на глобальную равномерную устойчивость.

Сопоставим системе (2) множество ориентированных графов $G(\sigma)$, вершинами каждого из которых (для данного σ) являются номера режимов этой системы, а наличие ребра $i \to j$ будет означать существование траектории соответствующей системы (для данного σ), при движении вдоль которой режим i сменяется режимом j.

Теорема. *Пусть матрицы* $(A_i - b_i k)$ $(i = \overline{1, m})$ *не имеют чисто мнимых собственных значений и при всех* $\sigma \in S(F)$ *соответствующий ориентированный граф* $G(\sigma)$ *является слабо-связным и не содержит циклов. Пусть подсистема системы (2) с индексом единица устойчива, а для остальных режимов* $(i = \overline{2, m})$ *и для любого* $\sigma \in S(F)$ *выполнены следующие условия:*

1) либо матрица $(A_i - b_i k)$ *устойчива, либо область функционирования режима* i *(многогранник* M_i*) ограничена;*

2) $x_0^i \notin \Gamma(Z, D)$, *где* $x_0^i \equiv (A_i - b_i k)^{-1} v_i$ *– стационарное решение аффинной системы, являющейся* i*-м режимом переключаемой системы (2);*

3) $\sigma(x_0^i; Z, D) \neq i$.

Тогда нулевое решение системы (2) глобально равномерно устойчиво.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00162) и Министерства науки и высшего образования Российский Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение № 075-15-2022-284).

Литература. 1. Rewienski M., White J. Model order reduction for nonlinear dynamical systems based on trajectory piecewise-linear approximations // Linear Algebra and its Appl. 2006. V. 415. P. 426–454. 2. Johansson M. Piecewise Linear Control System. Berlin; Heidelberg, 2003. 3. Rodrigues L., How J. Synthesis of piecewise-affine controllers for stabilization of nonlinear systems // Proc. of the IEEE Conf. on Decision and Control. January, 2004. V. 3. P. 2071–2076.

В. В. Фомичев, Н. И. Денисова (МГУ ВМК, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия) “Подходы к построению наблюдателей для нестационарных систем при внешних возмущениях” (14.03.2022).

В современной теории управления хорошо известны подходы для построения наблюдателей как для линейных стационарных систем [1], так и для нестационарных [2–4].

Куда интереснее обстоит вопрос о синтезе наблюдателей для систем с возмущениями. Для нестационарного случая задача ещё недостаточно изучена.

В данной работе была предпринята попытка перенести некоторые результаты, полученные для линейных стационарных систем с возмущением, на нестационарный случай. Итак, имеем систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + Df, \quad y = C(t)x,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^k$, $f \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^l$; известные матрицы $A(t)$, $C(t)$, $D(t)$ имеют соответствующие порядки, непрерывны, а при необходимости – достаточно гладкие по переменной t; возмущение f мажорируется известной константой.

Так как влияние известного управления всегда можно компенсировать в наблюдателе, то далее для упрощения дальнейших выкладок будем полагать, что $u \equiv 0$.

Требуется по информации об известном выходе $y(t)$ построить асимптотическую оценку $\tilde{x}(t)$ вектора состояния $x(t)$.

Рассматривается гипервыходная система, т.е. система при условии $l > m$, когда число известных выходов больше числа неизвестных входов. Кроме того, будем предполагать, что $\operatorname{rank}(C(t)D) = m$, $\operatorname{rank} D = m$ и $\operatorname{rank} C(t) = l$ (подразумевается равномерная полнота ранга, т.е. в указанных матрицах можно выделить миноры максимального порядка, невырожденные при всех $t > 0$). Более того, считаем что условие “равномерно по выходам”. Это означает, что путём перенумерации можно разделить выход:

$$y = \begin{pmatrix} C' \\ C'' \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix}, \quad \det(C'(t)D(t)) \not\equiv 0 \quad \text{для любого} \quad t.$$

Применяя сначала стационарное преобразование координат произвольной стационарной матрицей F такой, что $FD = 0$ и

$$T = \begin{pmatrix} F \\ C' \end{pmatrix} : \det(T) \neq 0 \quad \text{при всех} \quad t, \quad Tx = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow \ x = T'x' + T''y',$$

получаем систему

$$\dot{x}' = A_{11}(t)x' + A_{12}(t)y', \quad \dot{y}' = A_{21}(t)x' + A_{22}(t)y' + C'(t)Df.$$

Рассмотрим “запасные” выходы, которые после преобразований принимают вид

$$y'' = C''(t) = C''(t)T'(t)x' + C''(t)T''(t)y' \ \Rightarrow \ \tilde{y} = C''(t)T'(t)x' = y'' - C''(t)T''(t)y'.$$

Переобозначив $\tilde{C}(t) = C''(t)T'(t)$, получаем полностью определённую систему

$$\dot{\tilde{x}}' = A_{11}(t)\tilde{x}' + A_{12}(t)y', \quad \tilde{y} = \tilde{C}(t)\tilde{x}',$$

для которой в случае наблюдаемости пары $\{A_{11}(t), \tilde{C}(t)\}$ можно строить асимптотический наблюдатель.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российский Федерации в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение № 075-15-2022-284).

Литература. 1. Fomichev V.V., Vysotskii A.O. Algorithm for designing a cascade asymptotic observer for a system of maximal relative order // Differ. Equat. 2019. V. 67. № 3. P. 553–560. 2. Куок Дат Во, Бобцов А.А. Адаптивный наблюдатель переменных состояния линейных нестационарных систем с параметрами, заданными не точно // Автоматика и телемеханика. 2020. Т. 12. С. 100–110. 3. Гайшун И.В. Об асимптотическом оценивании состояний линейных нестационарных систем со скалярным выходом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12. № 2. С. 45–51. 4. Андриевский Б.Р., Фуртат И.Б. Наблюдатели возмущений: методы и приложения. Ч. 1. Методы // Автоматика и телемеханика. 2020. Т. 9. С. 3–61.

А. К. Деменчук (ИМ НАН Беларуси, Минск) "Управление асинхронным спектром линейных периодических систем с вырожденным блоком усреднения матрицы коэффициентов" (16.05.2022).

Будем рассматривать линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geqslant 2, \tag{1}$$

в которой $A(t)$– непрерывная ω-периодическая $n \times n$-матрица, B– постоянная $n \times r$-матрица $(r \leqslant n)$, $u(t)$ – управление. Вопросы управляемости линейных систем изучались во многих работах (см., например [1]), при этом в периодическом случае, как правило, множества частот решения и самой системы предполагались совпадающими.

Вместе с тем, как показали Х. Массера [2], Я. Курцвейль и О. Вейвода [3], и др., система обыкновенных дифференциальных периодических (почти периодических) уравнений может допускать решения, пересечение частотного модуля которых с модулем частот системы тривиально. Такого рода решения позднее были названы *сильно нерегулярными*, их частотный спектр – *асинхронным*, а описываемые ими колебания – *асинхронными*. Отметим, что случае периодических систем нерегулярность означает несоизмеримость периодов решения и системы.

Задача синтеза периодических дифференциальных систем, обладающих сильно нерегулярными решениями, была сформулирована в работе [4] как *задача управления асинхронным спектром*. В монографии [5, гл. III] исследована разрешимость такой задачи для некоторых классов линейных периодических систем с линейной по фазовым переменным периодической обратной связью.

В дальнейшем в качестве управляющего воздействия $u(\cdot)$ в системе (1) будем использовать непрерывные на вещественной оси периодические r-вектор-функции, множество показателей Фурье которых содержится в модуле частот матрицы коэффициентов $A(t)$. Тогда применительно к системе (1) задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L состоит в следующем: выбрать такое программное управление $u(t)$ из указанного допустимого множества, чтобы система (1) имела сильно нерегулярное периодическое решение с заданным спектром частот L (целевым множеством).

Вопросы разрешимости сформулированной задачи для системы (1) с программным управлением и нулевым средним значением матрицы коэффициентов исследованы в статье [6]. В настоящем докладе приведём решение задачи управления асинхронным спектром для системы (1), среднее значение матрицы коэффициентов которой имеет вырожденный ненулевой левый верхний диагональный блок, а остальные её блоки являются нулевыми.

Пусть $P = (p_{ij})$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, – некоторая матрица и $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_s \leqslant n$, $1 \leqslant l_1 < < \ldots < l_q \leqslant m$ – две упорядоченные последовательности натуральных чисел. Через $P_{k_1 \ldots k_s}^{l_1 \ldots l_q}$ обозначим $s \times q$-матрицу, образованную из элементов матрицы P, стоящих на пересечении строк с номерами $k_1, \ \ldots, \ k_s$ и столбцов с номерами $l_1, \ \ldots, \ l_q$.

Для непрерывной на всей числовой оси ω-периодической вещественнозначной матрицы $F(t)$ определим её среднее значение $\hat{F} = \omega^{-1} \int_0^\omega F(t)\,dt$ и осциллирующую часть $\tilde{F}(t) = = F(t) - \hat{F}$. Через $\operatorname{rank}_{\mathrm{col}} F$ обозначим столбцовый ранг матрицы $F(t)$, т.е. наибольшее число её линейно независимых столбцов. Подобным образом можно определить и строчный ранг матрицы. Отметим, что в общем случае строчный и столбцовый ранги матрицы $F(t)$ не обязаны совпадать.

Далее считаем, что ранг постоянной матрицы B при управлении не является максимальным и строки с номерами $k_1, \ \ldots, \ k_d$, $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_d \leqslant n$ – нулевые:

$$\operatorname{rank} B = r_1 < r, \quad B_{k_1 \ldots k_d}^{1 \ldots r} = 0 \quad (d = n - r_1). \tag{2}$$

Последнее ограничение не является потерей общности рассуждений, так как этого можно добиться с помощью линейного неособенного преобразования системы (1), используя алгоритмы элементарных преобразований строк матрицы.

Будем также предполагать, что среднее значение матрицы коэффициентов в результате перестановки её строк и столбцов представимо в виде

$$\begin{pmatrix} \hat{A}^{k_1\ldots k_d}_{k_1\ldots k_d} & \hat{A}^{k_{d+1}\ldots k_n}_{k_1\ldots k_d} \\ \hat{A}^{k_1\ldots k_d}_{k_{d+1}\ldots k_n} & \hat{A}^{k_{d+1}\ldots k_n}_{k_{d+1}\ldots k_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A}^{k_1\ldots k_d}_{k_1\ldots k_d} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}^{k_1\ldots k_d}_{k_1\ldots k_d} = \operatorname{diag}(\hat{a}_{k_1\,k_1}, \ldots, \hat{a}_{k_d\,k_d}), \tag{3}$$

причём $\hat{a}_{k_1\,k_1}\cdots\hat{a}_{k_d\,k_d} = 0$. Последнее условие означает, что среди диагональных элементов блока $\hat{A}^{k_1\ldots k_d}_{k_1\ldots k_d}$ имеются нулевые. Для определённости можно считать, что они расположены

$$\hat{a}_{k_{1+i-1}\,k_1+i-1} = 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad 1 \leqslant m < d, \tag{4}$$

а остальные элементы ненулевые. В противном случае этого можно добиться с помощью линейного невырожденного преобразования системы (1), равносильного перестановке первых d её уравнений в требуемом порядке.

Пусть $k_{d+1}, \ldots, k_n$, $1 \leqslant k_{d+1} < \ldots < k_n \leqslant n$ – номера ненулевых строк матрицы B. С учётом нумерации нулевых и ненулевых строк этой матрицы для упрощения записи введём следующие обозначения: $A_{11}(t) = A^{k_1\ldots k_d}_{k_1\ldots k_d}(t)$, $A_{12}(t) = A^{k_{d+1}\ldots k_n}_{k_1\ldots k_d}(t)$, $\tilde{A}^{(1)}_{11}(t)$ – $d\times m$-матрица, составленная из первых m столбцов $d\times d$-блока $A_{11}(t)$. Построим $d\times(m+r_1)$-матрицу $\tilde{A}_*(t) = [\tilde{A}^{(1)}_{11}(t), A_{12}(t)]$.

Справедлива

Теорема. *Для линейных систем (1)–(4) задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L разрешима тогда и только тогда, когда $L = \{0\}$ и выполняется неравенство* $\operatorname{rank}_{\mathrm{col}} \tilde{A}_*(t) < r_1 + m$.

Литература. 1. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М., 1975. 2. Massera J.L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales // Bol. de la Facultad de Ingenieria. 1950. V. 4. № 1. P. 37–45. 3. Курцвейль Я., Вейвода О. О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Чехосл. мат. журн. 1955. Т. 5. № 3. С. 362–370. 4. Деменчук А.К. Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53. № 4. С. 37–42. 5. Деменчук А.К. Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Saarbrücken, 2012. 6. Деменчук А.К. Управление асинхронным спектром линейных систем с нулевым средним значением матрицы коэффициентов // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2018. Т. 26. № 1. С. 31–34.