ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2022, том 58, № 9, с. 1165–1185

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.927.25

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

 З. С. Алиев, К. Ф. Абдуллаева

Рассмотрена задача на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений четвёртого порядка со спектральным параметром, содержащимся в одном из граничных условий. Найдена общая характеристика расположения собственных значений на вещественной оси (комплексной плоскости). Изучены структуры корневых подпространств, осцилляционные свойства собственных функций, базисные свойства собственных функций в пространстве L_p, $1<p<\infty$, и равномерная сходимость рядов Фурье по собственным функциям этой задачи.

DOI: 10.31857/S0374064122090011, EDN: CHIYEC

Введение. В данной статье исследуется граничная задача

$$\ell(y)(x)\equiv y^{(4)}(x)-(q(x)y'(x))'=\lambda y(x),\quad 0<x<l, \tag{1}$$

$$U_1(\lambda,y)\equiv y'(0)\cos\alpha-y''(0)\sin\alpha=0, \tag{2}$$

$$U_2(\lambda,y)\equiv y(0)\cos\beta+Ty(0)\sin\beta=0, \tag{3}$$

$$U_3(\lambda,y)\equiv (a\lambda+b)y'(l)+(c\lambda+d)y''(l)=0, \tag{4}$$

$$U_4(\lambda,y)\equiv y(l)\cos\delta-Ty(l)\sin\delta=0, \tag{5}$$

где $\lambda\in\mathbb{C}$ – спектральный параметр; $Ty\equiv y'''-qy'$, q – положительная абсолютно непрерывная на отрезке $[0,l]$ функция; α, β, δ, a, b, c, d – действительные постоянные, такие, что $0\leqslant\alpha,\beta\leqslant\pi/2$, $\pi/2\leqslant\delta<\pi$ (за исключением случая $\beta=\delta=\pi/2$), $\sigma=bc-ad>0$.

Отметим, что задача (1)–(5) возникает при описании малых изгибных колебаний упругой консольной однородной балки, в поперечных сечениях которой действует продольная сила, а к свободному концу посредством невесомого стержня прикреплён груз, удерживающийся в равновесии при помощи упругой пружины (см., например, [1, с. 152–154] и [2, с. 256–258]).

Целью настоящей работы является изучение базисных свойств собственных функций в пространстве $L_p(0,l)$, $1<p<\infty$, и равномерной сходимости спектральных разложений по собственным функциям задачи (1)–(5).

Базисные свойства в $L_p(0,l)$, $1<p<\infty$, и равномерная сходимость рядов Фурье по корневым функциям задач Штурма–Лиувилля исследованы в работах [3–13], а в задачах для обыкновенных дифференциальных уравнений четвёртого порядка – в статьях [14–23].

Задача (1)–(5) в случае $\alpha=\beta=0$ исследована в [15], где, в частности, доказано, что её собственные значения являются вещественными простыми и образуют неограниченно возрастающую последовательность. Кроме того, изучено расположение собственных значений на вещественной оси, исследованы осцилляционные свойства собственных функций, получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций, установлена базисность в пространстве $L_p(0,1)$, $1<p<\infty$, системы собственных функций этой задачи с одной произвольно удалённой функцией.

1. Операторная трактовка краевой задачи (1)–(5). Известно (см. [15, с. 386]), что спектральная задача (1)–(5) сводится к задаче на собственные значения для линейного оператора L в гильбертовом пространстве $H = L_2(0,l) \bigoplus \mathbb{C}$ со скалярным произведением

$$(\hat{y}, \hat{v})_H = (\{y, m\}, \{v, s\})_H = \int\limits_0^1 y(x)\overline{v(x)}\,dx + \sigma^{-1} m\bar{s},$$

где оператор

$$L\hat{y} = L\{y, m\} = \{\ell(y)(x), -(by'(l) + dy''(l))\}$$

определён в области

$$D(L) = \{\hat{y} = \{y(x), m\} \in H : y \in W_2^4(0,l), \quad \ell(y) \in L_2(0,l), \quad y'(0)\cos\alpha - y''(0)\sin\alpha = 0,$$
$$y(0)\cos\beta + Ty(0)\sin\beta = 0, \quad y(l)\cos\delta - Ty(l)\sin\delta = 0, \quad m = ay'(l) + cy''(l)\},$$

которая всюду плотна в H. Очевидно, что оператор L корректно определён в H. При этом задача (1)–(5) приобретает вид

$$L\hat{y} = \lambda\hat{y}, \quad \hat{y} \in D(L), \tag{6}$$

т.е. собственные значения λ_k, $k \in \mathbb{N}$, задач (1)–(5) и (6) совпадают между собой с учётом их кратности, а между корневыми функциями имеется взаимнооднозначное соответствие

$$y_k(x) \leftrightarrow \{y_k(x), m_k\}, \quad m_k = ay_k'(l) + cy_k''(l).$$

Теорема 1 [15, с. 386]. *Оператор L является дискретным самосопряжённым полуограниченным снизу в пространстве H. Система $\{y_k\}_{k=1}^\infty$, $\hat{y}_k = \{y_k, m_k\}$, $m_k = ay_k'(l) + cy_k''(l)$, собственных векторов этого оператора образует ортогональный базис в H.*

2. Некоторые вспомогательные утверждения. Введём краевое условие

$$y'(l)\cos\gamma + y''(l)\sin\gamma = 0, \tag{7}$$

где $\gamma \in [0, \pi/2]$.

Краевая задача (1)–(3), (5), (7) при $\delta \in [0, \pi)$ исследована в работах [24, 25], где установлен следующий результат.

Теорема 2 [24, теоремы 5.4 и 5.5; 25, теорема А, замечание 1 и теорема 2]. *Собственные значения спектральной задачи (1)–(3), (5), (7) при $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi/2]$ и $\delta \in [0, \pi)$ являются вещественными простыми и образуют неограниченно возрастающую последовательность $\{\lambda_k(\alpha, \beta, \delta, \gamma)\}_{k=1}^\infty$ такую, что $\lambda_k(\alpha, \beta, \gamma, \delta) > 0$ при $k \geqslant 2$, причём для каждых α, β, γ существует $\delta_0(\alpha, \beta, \gamma) \in [\pi/2, \pi)$ такое, что $\lambda_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) > 0$, если $\delta \in [0, \delta_0(\alpha, \beta, \gamma))$, $\lambda_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0$, если $\delta = \delta_0(\alpha, \beta, \gamma)$ и $\lambda_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) < 0$, если $\delta \in (\delta_0(\alpha, \beta), \pi)$. Кроме того, собственная функция $y_{k,\alpha,\beta,\gamma,\delta}(x)$, соответствующая собственному значению $\lambda_k(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, при $k \geqslant 2$ имеет в точности $k-1$ простых нулей; при $k = 1$ не имеет нулей, если $\delta \in$ $\in [0, \delta_0(\alpha, \beta, \gamma)]$, имеет произвольное число нулей, если $\delta \in (\delta_0(\alpha, \beta, \gamma), \pi)$.*

Для исследования спектральных свойств задачи (1)–(5) изучим свойства решения начально-краевой задачи (1)–(3), (5) при $\alpha, \beta \in [0, \pi/2]$ и $\delta \in [\pi/2, \pi)$.

Имеет место следующая

Лемма 1. *При каждом фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ существует единственное с точностью до постоянного множителя нетривиальное решение $y(x, \lambda)$ задачи (1)–(3), (5).*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2.3 в [15].

Пусть $y(x, \lambda)$ – решение задачи (1)–(3), (5), нормированное условием

$$|y(0)| + |Ty(0)| = 1$$

при $\lambda > 0$ и условием

$$|y'(l)| + |y''(l)| = 1$$

при $\lambda \leqslant 0.$ Заметим, что если $\lambda > 0$ и $y(0,\lambda) = Ty(0,\lambda) = 0,$ то в силу условия (2) из первой части леммы 2.1 работы [24] следует, что $y(l,\lambda)Ty(l,\lambda) > 0,$ что противоречит условию (5). Пусть теперь $\lambda \leqslant 0$ и $y'(l,\lambda) = y''(l,\lambda) = 0.$ Тогда λ является собственным значением задачи (1)–(3), (5), (7) как при $\gamma = 0,$ так и при $\gamma = \pi/2,$ что противоречит свойству 1 в [24, с. 64].

Поскольку уравнение (1) линейно зависит от $\lambda,$ из общей теории линейных дифференциальных уравнений (см., например, [26, гл. 1]) следует, что для каждого фиксированного $x \in [0,l]$ функция $y(x,\lambda)$ является целой функцией параметра $\lambda.$

Пусть $\alpha, \beta \in [0,\pi/2],$ $\delta \in [\pi/2,\pi)$ – произвольные и фиксированные числа. При этом для упрощения изложения обозначим $\mu_k = \lambda_k(\alpha,\beta,0,\delta)$ и $\nu_k = \lambda_k(\alpha,\beta,\pi/2,\delta).$

Пусть $\mathcal{B}_k = (\mu_{k-1},\mu_k),$ $k = 1,2,\ldots,$ где $\mu_0 = -\infty.$

Собственные значения μ_k и $\nu_k,$ $k \in \mathbb{N},$ спектральной задачи (1)–(3), (5), (7) при $\gamma = 0$ и $\gamma = \pi/2$ являются нулями целых функции $y'(l,\lambda)$ и $y''(l,\lambda)$ соответственно. Заметим, что функция

$$F(\lambda) = \frac{y''(l,\lambda)}{y'(l,\lambda)}$$

определена для значений $\lambda \in \mathcal{B} \equiv (\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}_k) \bigcup (\mathbb{C}\backslash\mathbb{R})$ и является мероморфной функцией конечного порядка, собственные значения ν_k и $\mu_k,$ $k \in \mathbb{N},$ краевой задачи (1)–(3), (5), (7) при $\gamma = \pi/2$ и $\gamma = 0$ являются нулями и полюсами этой функции соответственно.

Лемма 2. *Имеет место следующая формула:*

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{1}{y'^2(l,\lambda)} \int\limits_0^l y^2(x,\lambda)\,dx, \quad \lambda \in \mathcal{B}. \tag{8}$$

Доказательство этой леммы дословно повторяет доказательство формулы (30) работы [15].

Лемма 3. *Справедливо соотношение*

$$\lim_{\lambda \to -\infty} F(\lambda) = +\infty. \tag{9}$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2.8 в [15].

В силу [24, свойство 1] и формул (8), (9) имеет место соотношение

$$\nu_1 < \mu_1 < \nu_2 < \mu_2 < \ldots < \nu_k < \mu_k < \ldots \tag{10}$$

Пусть $m(\lambda) = ay'(l,\lambda) + cy''(l,\lambda).$

Лемма 4. *Если $\tilde\lambda$ – собственное значение задачи (1)–(5), то $m(\tilde\lambda) \neq 0.$*

Доказательство. Предположим, что $\tilde\lambda$ – собственное значение задачи (1)–(5) такое, что $m(\tilde\lambda) = ay'(l,\tilde\lambda) + cy''(l,\tilde\lambda) = 0.$ Если $c \neq 0,$ то отсюда следует, что $y''(l,\tilde\lambda) = -ay'(l,\tilde\lambda)/c.$ Тогда в силу (4) имеем

$$(a\tilde\lambda + b)y'(l,\tilde\lambda) + (c\tilde\lambda + d)\left(-\frac{a}{c}\right)y'(l,\tilde\lambda) = \frac{\sigma}{c}y'(l,\tilde\lambda) = 0.$$

Так как $\sigma \neq 0$ и $c \neq 0,$ то из последнего соотношения получим $y'(l,\tilde\lambda) = 0.$ Если же $c = 0,$ то $\sigma = -ad \neq 0.$ Следовательно, из равенства $m(\tilde\lambda) = ay'(l,\tilde\lambda) = 0$ получим $y'(l,\tilde\lambda) = 0.$ Тогда в обоих случаях из граничного условия (4) следует, что $y''(l,\tilde\lambda) = 0,$ что противоречит соотношению (10). Лемма доказана.

3. Осцилляционные свойства решения $y(x,\lambda)$ задачи (1)–(3), (5). Рассмотрим уравнение

$$y(x,\lambda) = 0, \quad x \in [0,l], \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Очевидно, что корни этого уравнения являются функциями параметра $\lambda.$

Лемма 5. *Каждый корень $x(\lambda) \in (0,l)$ уравнения (11) является простой и непрерывно-дифференцируемой функцией параметра λ.*

Доказательство. Пусть существуют $x_0 \in (0,l)$ и $\lambda_0 > 0$ такие, что $y(x_0,\lambda_0) = y'(x_0,\lambda_0) = 0$. Тогда очевидно, что $|y''(x_0,\lambda_0)| + |Ty(x_0,\lambda_0)| > 0$. Если $y''(x_0,\lambda_0)Ty(x_0,\lambda_0) \geqslant 0$, то в силу первой части леммы 2.1 в [24] получим $y(l,\lambda_0)Ty(l,\lambda_0) > 0$, что противоречит условию (5), поскольку $\delta \in [\pi/2,\pi)$, а если $y''(x_0,\lambda_0)Ty(x_0,\lambda_0) < 0$, то в силу второй части леммы 2.1 в [24] получим $y'(0,\lambda_0)y''(0,\lambda_0) < 0$, что противоречит условию (2), поскольку $\alpha \in [0,\pi/2]$.

Пусть теперь существуют $x_0^* \in (0,l)$ и $\lambda_0^* \leqslant 0$ такие, что $y(x_0^*,\lambda_0^*) = y'(x_0^*,\lambda_0^*) = 0$. Тогда, умножив обе части равенства

$$y^{(4)}(x,\lambda_0^*) - (q(x)y'(x,\lambda_0^*))' = \lambda_0^* y(x,\lambda_0^*), \quad 0 < x < x_0^*,$$

на $y(x,\lambda_0^*)$ и проинтегрировав полученное равенство в пределах от 0 до x_0^*, используя формулу интегрирования по частям, принимая во внимание граничные условия (2), (3) и $y(x_0^*,\lambda_0^*) = y'(x_0^*,\lambda_0^*) = 0$, получим

$$\int_0^{x_0^*} y''^2(x,\lambda_0^*)\,dx + \int_0^{x_0^*} q(x)y^2(x,\lambda_0^*)\,dx + \tilde{N}[y(x,\lambda_0^*)] = \lambda_0^* \int_0^{x_0^*} y^2(x,\lambda_0^*)\,dx,$$

где

$$\tilde{N}[y(x,\lambda_0^*)] = \begin{cases} y'^2(0,\lambda_0^*)\operatorname{ctg}\alpha + y^2(0,\lambda_0^*)\operatorname{ctg}\beta, & \text{если } \alpha,\beta \in (0,\pi/2], \\ y'^2(0,\lambda_0^*)\operatorname{ctg}\alpha, & \text{если } \alpha \in (0,\pi/2], \quad \beta = 0, \\ y^2(0,\lambda_0^*)\operatorname{ctg}\beta, & \text{если } \alpha = 0, \quad \beta \in (0,\pi/2], \\ 0, & \text{если } \alpha = 0, \quad \beta = 0. \end{cases}$$

Так как $q(x) > 0$ при $x \in [0,l]$ и $\alpha,\beta \in [0,\pi/2]$, то из последнего соотношения следует, что $\lambda_0^* > 0$, что противоречит условию $\lambda_0^* \leqslant 0$.

Далее, непрерывная дифференцируемость функции $x(\lambda)$ следует из хорошо известной теоремы о неявной функции. Лемма доказана.

Следствие 1. *При изменении параметра λ, $\lambda > 0$ $(\lambda \leqslant 0)$, функция $y(x,\lambda)$ может потерять нуль или приобрести новый, если она окажется внутри интервала $(0,l)$ или вне его за краевой точкой $x = l$ $(x = 0)$.*

Доказательство. При изменении λ, $\lambda > 0$, нули функции $y(x,\lambda)$ не могут принадлежать интервалу $(0,l)$ или оказаться вне его за краевой точкой $x = 0$. Действительно, если это не так, то при некотором $\lambda_0 > 0$ имеем $y(0,\lambda_0) = y'(0,\lambda_0) = y''(0,\lambda) = 0$, если $\beta = 0$, $y(0,\lambda_0) = Ty(0,\lambda_0) = 0$, если $\beta \in (0,\pi/2]$. Тогда, на основании первой части леммы 2.1 работы [24], получим $y(l,\lambda_0)Ty(l,\lambda_0) > 0$, что противоречит условию (5).

Если $\lambda \leqslant 0$, то при изменении λ нули функции $y(x,\lambda)$ не могут лежать в интервале $(0,l)$ или лежать вне его за краевой точкой $x = l$. Действительно, в противном случае, в силу (5) при некотором $\tilde{\lambda}_0 \leqslant 0$ имеет место $y(l,\tilde{\lambda}_0) = Ty(l,\tilde{\lambda}_0) = 0$. Определим угол $\tilde{\gamma}_0 \in [0,\pi)$ из равенства

$$\tilde{\gamma}_0 = \begin{cases} -\operatorname{arctg}\dfrac{y'(l,\tilde{\lambda}_0)}{y''(l,\tilde{\lambda}_0)}, & \text{если } y''(l,\tilde{\lambda}_0) \neq 0, \\ 0, & \text{если } y''(l,\tilde{\lambda}_0) = 0. \end{cases}$$

Тогда $\tilde{\lambda}_0$ является собственным значением задачи (1)–(3), (5), (7) как при $\gamma = \tilde{\gamma}_0$, $\delta = \pi/2$, так и при $\gamma = \tilde{\gamma}_0$, $\delta = 0$, что противоречит свойству 1 в [24, с. 64] (поскольку в силу леммы 2 все собственные значения этих задач являются простыми). Лемма доказана.

Замечание 1. Следуя соответствующим рассуждениям, проведённым при доказательствах лемм 2.6, 2.9 и 2.10 из [15], убеждаемся, что их утверждения справедливы также и для функции $y(x,\lambda)$.

Через $s(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, обозначим число нулей функции $y(x,\lambda)$, содержащихся в интервале $(0,l)$.

В силу леммы 5, следствия 1, замечания 1 и теоремы 2 имеет место следующая осцилляционная теорема для функции $y(x,\lambda)$ при $\lambda > 0$.

Теорема 3. *Если $\lambda \in (\mu_{k-1}, \nu_k)$ при $k \geqslant 3$, то $k-2 \leqslant s(\lambda) \leqslant k-1$, а если $\lambda \in [\nu_k, \mu_k]$ при $k \geqslant 3$, то $s(\lambda) = k-1$. Кроме того, если $\delta \in [\pi/2, \delta_0(\alpha,\beta,0)]$, то $s(\lambda) = 0$ при $\lambda \in [0,\mu_1]$, $0 \leqslant s(\lambda) \leqslant 1$ при $\lambda \in (\mu_1,\nu_2)$ и $s(\lambda) = 1$ при $\lambda \in [\nu_2,\mu_2]$; если $\delta \in [\delta_0(\alpha,\beta,0), \delta_0(\alpha,\beta,\pi/2))$, то $0 \leqslant s(\lambda) \leqslant 1$ при $\lambda \in [0,\nu_2)$, $s(\lambda) = 1$ при $\lambda \in [\nu_2,\mu_2]$; а если $\delta \in [\delta_0(\alpha,\beta,\pi/2,\pi))$, то $s(\lambda) = 1$ при $\lambda \in [0,\mu_2]$.*

В силу следствия 1 при изменении λ, $\lambda < 0$, функция $y(x,\lambda)$ может приобрести новый нуль, если она окажется внутри интервала $(0,l)$ через краевую точку $x = 0$, причём если функция $y(x,\lambda)$ приобретает новый нуль при некотором $\tilde\lambda < 0$, то $y(0,\tilde\lambda) = y'(0,\tilde\lambda) = y''(0,\tilde\lambda) = 0$ при $\beta = 0$, $y(0,\tilde\lambda) = Ty(0,\tilde\lambda) = 0$ при $\beta \in (0,\pi/2]$.

Лемма 6. *Пусть $\lambda^* < \lambda^{**} < 0$ такие, что $s(\lambda^*) \neq s(\lambda^{**})$. Тогда в интервале (λ^*,λ^{**}) содержится собственное значение спектральной задачи, порождённой уравнением (1) с граничными условиями $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ и (5) при $\beta = 0$; и уравнением (1) с граничными условиями $y(0) = Ty(0) = 0$ и (5) при $\beta \in (0,\pi/2]$.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 5 в [27].

Пусть $\epsilon > 0$ – достаточно малое фиксированное число, $\lambda < 0$ и μ – вещественное собственное значение уравнения (1) с граничными условиями $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ и (5), если $\beta = 0$, (2), $y(0) = Ty(0) = 0$ и (5), если $\beta \in (0,\pi/2]$. *Индексом осцилляции* собственного значения μ называется разность между числом нулей, содержащихся в интервале $(0,l)$, функции $y(x,\lambda)$ при $\lambda \in (\mu-\epsilon,\mu)$ и числом таких же нулей при $\lambda \in (\mu,\mu+\epsilon)$ (см. [28, с. 51]). Из этого определения видно, что число нулей функции $y(x,\lambda)$, содержащихся в интервале $(0,l)$, равно сумме индексов осцилляции всех собственных значений, принадлежащих интервалу $(\lambda,0)$, задачи (1), $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, (5), если $\beta = 0$; (1), (2), $y(0) = Ty(0) = 0$, (5), если $\beta \in (0,\pi/2]$.

Имеет место следующая

Лемма 7. *Существует число $\varsigma < 0$ такое, что все вещественные собственные значения ρ_k, $k = 1,2,\ldots$, краевой задачи (1), $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, (5), если $\beta = 0$, (1), (2), $y(0) = Ty(0) = 0$, (5), если $\beta \in (0,\pi/2]$, лежат на интервале $(-\infty,\varsigma)$, являются простыми, образуют неограниченно убывающую последовательность и имеют индекс осцилляции, равный единице.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству теоремы 4.1 в [28].

Пусть $i(\rho_k)$ – индекс осцилляции собственного значения ρ_k, $k \in \mathbb{N}$, задачи (1), $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$, (5), если $\beta = 0$; (1), (2), $y(0) = Ty(0) = 0$, (5), если $\beta \in (0,\pi/2]$. Тогда из сказанного выше следует, что число нулей, содержащихся в интервале $(0,l)$, функции $y(x,\lambda)$ при $\lambda < 0$ определяется формулой

$$s(\lambda) = \sum_{\rho_k \in (\lambda,0)} i(\rho_k). \tag{12}$$

4. Структуры корневых подпространств, расположение собственных значений на вещественной оси (комплексной плоскости) и осцилляционные свойства собственных функций задачи (1)–(5). Введём следующее краевое условие:

$$ay'(l) + cy''(l) = 0. \tag{13}$$

Заметим, что краевое условие (13) в случае $a = 0$ $(c = 0)$ совпадает с условием (7) при $\gamma = \pi/2$ $(\gamma = 0)$. В случае $ac \neq 0$ собственные значения краевой задачи (1)–(3), (5), (13) совпадают с корнями уравнения $F(\lambda) = -a/c$. В силу формулы (8) это уравнение имеет только простые корни и, следовательно, собственные значения спектральной задачи (1)–(3), (5), (13) являются простыми. На основании (8) и (9) уравнение $F(\lambda) = -a/c$ для каждого $k \in \mathbb{N}$ в интервале $\mathcal{B}_k$ имеет единственное решение τ_k такое, что

$$\nu_1 < \tau_1 < \mu_1 < \nu_2 < \tau_2 < \mu_2 < \ldots \tag{14}$$

при $a/c > 0$ и

$$\tau_1 < \nu_1 < \mu_1 < \tau_2 < \nu_2 < \mu_2 < \ldots \tag{15}$$

при $a/c < 0$.

В случае $a \neq 0$ $(c \neq 0)$ определим число k_a (k_c) из неравенства

$$\lambda_{k_a-1} \leqslant -b/a < \lambda_{k_a} \quad (\lambda_{k_c-1} < -d/c \leqslant \lambda_{k_c}).$$

Замечание 2. Если $ac \neq 0$, то $k_a \leqslant k_c + 1$ при $ac > 0$, $k_a \geqslant k_c$ при $ac < 0$.

Замечание 3. Очевидно, что μ_{k_c} является собственным значением задачи (1)–(5) в случае $c \neq 0$ и $-d/c = \mu_{k_c}$, а в случаях $c = 0$ и $c \neq 0$, $-d/c \in (\mu_{k_c-1}, \mu_{k_c})$, в силу леммы 4 собственные значения задачи (1)–(5) являются корнями уравнения

$$F(\lambda) = -\frac{a\lambda + b}{c\lambda + d}. \tag{16}$$

Теорема 4. *Собственные значения задачи (1)–(5) являются вещественными простыми и образуют неограниченно возрастающую последовательность* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такую, что* $\lambda_k > 0$ *при* $k \geqslant 3 + \operatorname{sgn}|c|$. *Кроме того, имеет место следующее расположение собственных значений:*

а) если $c = 0$, *то*

$$\nu_1 < \lambda_1 < \mu_1 < \nu_2 < \lambda_2 < \mu_2 < \ldots < \mu_{k_a-2} < \nu_{k_a-1} \leqslant \lambda_{k_a-1} < \mu_{k_a-1} < \lambda_{k_a} < \nu_{k_a} < \\ < \mu_{k_a} < \ldots < \mu_{k-1} < \lambda_k < \nu_k < \mu_k < \ldots; \tag{17}$$

б) если $a = 0$, *то*

$$\lambda_1 < \nu_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \nu_2 < \mu_2(0) < \ldots < \mu_{k_c-1} < \lambda_{k_c} < \nu_{k_c} < \lambda_{k_c+1} \leqslant \nu_{k_c+1} < \lambda_{k_c+2} < \\ \leqslant \mu_{k_c} < \mu_{k_c+1} < \ldots < \mu_{k-2} < \nu_{k-1} < \lambda_k < \mu_{k-1} < \ldots; \tag{18}$$

в) если $ac \neq 0$, *то*

в$_1$*) в случае* $ac > 0$

$$\nu_1 < \lambda_1 < \tau_1 < \mu_1 < \nu_2 < \lambda_2 < \tau_2 < \mu_2 < \ldots < \mu_{k_c-2} < \nu_{k_c-1} \leqslant \lambda_{k_c-1} < \tau_{k_c-1} < \\ < \mu_{k_c-1} < \lambda_{k_c} < \nu_{k_c} < \tau_{k_c} < \lambda_{k_c+1} \leqslant \mu_{k_c} < \nu_{k_c+1} < \tau_{k_c+1} < \lambda_{k_c+2} < \mu_{k_c+1} < \ldots < \\ < \mu_{k-2} < \nu_{k-1} < \tau_{k-1} < \lambda_k < \mu_{k-1} < \ldots \quad \text{при} \quad k_a = k_c, \tag{19}$$

$$\nu_1 < \lambda_1 < \tau_1 < \mu_1 < \nu_2 < \lambda_2 < \tau_2 < \mu_2 < \ldots < \mu_{k_c-1} < \nu_{k_c} \leqslant \lambda_{k_c} < \tau_{k_c} < \lambda_{k_c+1} \leqslant \\ \leqslant \mu_{k_c} < \nu_{k_c+1} < \tau_{k_c+1} < \lambda_{k_c+2} < \mu_{k_c+1} < \ldots < \mu_{k-2} < \nu_{k-1} < \tau_{k-1} < \\ < \lambda_k < \mu_{k-1} < \ldots \quad \text{при} \quad k_a = k_c + 1, \tag{20}$$

$$\nu_1 < \lambda_1 < \tau_1 < \mu_1 < \nu_2 < \lambda_2 < \tau_2 < \mu_2 < \ldots < \mu_{k_a-2} < \nu_{k_a-1} \leqslant \lambda_{k_a-1} < \tau_{k_a-1} < \\ < \mu_{k_a-1} < \lambda_{k_a} < \nu_{k_a} < \tau_{k_a} < \mu_{k_a} < \ldots < \mu_{k_c-1} < \lambda_{k_c} < \nu_{k_c} < \tau_{k_c} < \lambda_{k_c+1} \leqslant \mu_{k_c} < \\ < \nu_{k_c+1} < \tau_{k_c+1} < \lambda_{k_c+2} < \mu_{k_c+1} < \ldots < \mu_{k-2} < \nu_{k-1} < \tau_{k-1} < \lambda_k < \\ < \mu_{k-1} < \ldots \quad \text{при} \quad k_a < k_c, \tag{21}$$

в$_2$*) в случае* $ac < 0$

$$\lambda_1 < \tau_1 < \nu_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \tau_2 < \nu_2 < \mu_2 < .. < \mu_{k_c-1} < \lambda_{k_c} < \tau_{k_c} < \lambda_{k_c+1} < \nu_{k_c} < \\ < \mu_{k_c} < \tau_{k_c+1} < \lambda_{k_c+2} < \nu_{k_c+1} < \mu_{k_c+1} < \ldots < \mu_{k-2} < \tau_{k-1} < \lambda_k < \nu_{k-1} < \\ < \mu_{k-1} < \ldots \quad \text{при} \quad k_a = k_c, \tag{22}$$

$$\lambda_1 < \tau_1 < \nu_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \tau_2 < \nu_2 < \mu_2 < .. < \mu_{k_c-1} < \lambda_{k_c} < \tau_{k_c} < \nu_{k_c} \leqslant$$
$$\leqslant \lambda_{k_c+1} \leqslant \mu_{k_c} << \tau_{k_c+1} < \lambda_{k_c+2} < \nu_{k_c+1} < \mu_{k_c+1} < \ldots < \mu_{k-2} < \tau_{k-1} < \lambda_k <$$
$$< \nu_{k-1} < \mu_{k-1} < \ldots \quad \text{при} \ \ k_a = k_c + 1, \tag{23}$$
$$\lambda_1 < \tau_1 < \nu_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \tau_2 < \nu_2 < \mu_2 < \ldots < \mu_{k_c-1} < \lambda_{k_c} < \tau_{k_c} < \nu_{k_c} <$$
$$< \lambda_{k_c+1} \leqslant \mu_{k_c} < \tau_{k_c+1} < \nu_{k_c+1} < \lambda_{k_c+2} < \mu_{k_c+1} < \ldots < \mu_{k_a-2} < \tau_{k_a-1} < \nu_{k_a-1} \leqslant$$
$$\leqslant \lambda_{k_a} < \mu_{k_a-1} < \tau_{k_a} < \lambda_{k_a+1} < \nu_{k_a} < \mu_{k_a} < \ldots < \mu_{k-2} < \tau_{k-1} < \lambda_k <$$
$$< \nu_{k-1} < \mu_{k-1} < \ldots \quad \text{при} \ \ k_a > k_c + 1. \tag{24}$$

Доказательство. Следуя соответствующим рассуждениям, проведённым при доказательстве леммы 2.4 работы [15], можно показать, что собственные значения задачи (1)–(5) являются вещественными и простыми.

Из леммы 2 следует, что функция $F(\lambda)$ является строго убывающей на каждом интервале $B_k = (\mu_{k-1}, \mu_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Кроме того, для функции $H(\lambda) = -(a\lambda + b)/(c\lambda + d)$ имеем $H'(\lambda) = \sigma/(c\lambda + d)^2$, откуда следует, что эта функция при $c = 0$ строго возрастает на интервале $(-\infty, +\infty)$, а при $c \neq 0$ строго возрастает на интервалах $(-\infty, -d/c)$ и $(-d/c, +\infty)$, причём

$$\lim_{\lambda \to -d/c-0} H(\lambda) = +\infty, \qquad \lim_{\lambda \to -d/c+0} H(\lambda) = -\infty. \tag{25}$$

Так как $y'(l, \mu_k) = 0$ для каждого $k \in \mathbb{N}$, в силу лемм 2 и 3 (см. формулы (8) и(9)) имеем

$$\lim_{\lambda \to \mu_{k-1}+0} F(\lambda) = +\infty, \qquad \lim_{\lambda \to \mu_k - 0} F(\lambda) = -\infty.$$

Следовательно, в случае $c = 0$, либо $c \neq 0$, и $-d/c \notin (\mu_{k-1}, \mu_k)$ уравнение

$$F(\lambda) = H(\lambda) \tag{26}$$

в интервале (μ_{k-1}, μ_k) имеет единственное решение $\lambda = \tilde{\lambda}_k$ и, следовательно, в силу замечания 3 $\tilde{\lambda}_k$ является собственным значением задачи (1)–(5). Очевидно, что если $c = 0$, либо $c \neq 0$, $-d/c \in (\mu_{k_c-1}, \mu_{k_c})$ и $k < k_c$, либо $c \neq 0$, $-d/c = \mu_{k_c}$ и $k \leqslant k_c$, то $\tilde{\lambda}_k$ является k-м собственным значением спектральной задачи (1)–(5), т.е. $\tilde{\lambda}_k = \lambda_k$. Кроме того, если $c \neq 0$, $-d/c = \mu_{k_c}$, то $\mu_{k_c} = \lambda_{k_c+1}$ и $\tilde{\lambda}_k = \lambda_{k+1}$ при $k > k_c$.

Заметим, что в случае $c \neq 0$ и $-d/c \in (\mu_{k_c-1}, \mu_{k_c})$ уравнение (26) ((16)) в каждом из интервалов $(\lambda_{k_c-1}, -d/c)$ и $(-d/c, \lambda_{k_c})$ имеет единственное решение: $\tilde{\lambda}_{k_c} = \lambda_{k_c}$ и $\tilde{\lambda}^*_{k_c} = \lambda_{k_c+1}$ соответственно. В этом случае имеет место также соотношение $\tilde{\lambda}_k = \lambda_{k+1}$ при $k > k_c$.

Покажем, что $\lambda_k > 0$ при $k \geqslant 3 + \operatorname{sgn}|c|$. Действительно, если $ac < 0$, $\delta > \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ (при этом $\nu_1 < \mu_1 < 0 < \nu_2$), $k_a = 1$ и $k_c = 1$, то из изложенного выше следует, что $\lambda_1, \lambda_2 \in (-\infty, \mu_1]$, $\lambda_k \in (\mu_{k-2}, \mu_{k-1})$ при $k \geqslant 3$. Следовательно, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_k > 0$ при $k \geqslant 4$. Кроме того, $\lambda_3 \in (\mu_1, 0)$, либо $\lambda_3 = 0$, либо $\lambda_3 \in (0, \nu_2)$, так как $H(\lambda) > 0$ и $G(\lambda) > 0$ при $\lambda \in (\mu_1, \nu_2)$. Остальные случаи рассматриваются аналогичным образом.

Теперь покажем, что выполняются соотношения (17)–(24). Рассмотрим случай $ac < 0$ (т.е. случай в$_2$) при $k_a = k_c = 1$. Так как $\lim\limits_{\lambda \to \pm\infty} H(\lambda) = -a/c$, функция $H(\lambda)$ возрастает на каждом из интервалов $(-\infty, -d/c)$, $(-d/c, +\infty)$ и выполняются равенства (25), то имеют место соотношения $H(\lambda) > -a/c$ при $\lambda < -d/c$ и $H(\lambda) < -a/c$ при $\lambda > -d/c$. Так как $k_a = 1$, то имеем $-b/a < \nu_1$ и, следовательно, $H(\lambda) > 0$ при $\lambda > \nu_1$. Кроме того, $F(\lambda) > -a/c$ при $\lambda \in (\mu_{k-1}, \tau_k)$, $F(\lambda) < -a/c$ при $\lambda \in (\tau_k, \mu_k)$ и $F(\lambda) > 0$ при $\lambda \in (\mu_{k-1}, \nu_k)$, $F(\lambda) < 0$ при $\lambda \in (\nu_k, \mu_k)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда в силу (10), (14) и (15) из изложенного выше следует, что

$$\lambda_1 < \tau_1 < \lambda_2 < \nu_1 < \mu_1 < \tau_2 < \lambda_3 < \nu_2 < \mu_2 < \tau_3 < \lambda_4 < \nu_3 < \mu_3 < \ldots$$

Остальные случаи рассматриваются совершенно аналогично. Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть* $k_1 = \max\{k_a, k_c\} + 2$. *Тогда при* $k > k_1$ *справедливы следующие соотношения:*

$$\mu_{k-1} < \lambda_k < \nu_k < \mu_k, \quad \text{если} \;\; c = 0, \tag{27}$$

$$\mu_{k-2} < \tau_{k-1} = \nu_{k-1} < \lambda_k < \mu_{k-1}, \quad \text{если} \;\; a = 0, \tag{28}$$

$$\mu_{k-2} < \nu_{k-1} < \tau_{k-1} < \lambda_k < \mu_{k-1}, \quad \text{если} \;\; ac > 0, \tag{29}$$

$$\mu_{k-2} < \tau_{k-1} < \lambda_k < \nu_{k-1} < \mu_{k-1}, \quad \text{если} \;\; ac < 0. \tag{30}$$

Имеет место следующая осцилляционная теорема для задачи (1)–(5).

Теорема 5. *Собственная функция* $y_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, *соответствующая собственному значению* λ_k, *обладает следующими осцилляционными свойствами:*

а) если $c = 0$, *то функция* $y_k(x)$ ($k \geqslant 1$ *при* $\delta \leqslant \delta_0(\alpha, \beta, \pi/2)$ *и* $k_a \geqslant 2$; $k \geqslant 2$ *при* $\delta \leqslant \delta_0(\alpha, \beta, \pi/2)$ *и* $k_a = 1$, *при* $\delta_0(\alpha, \beta, \pi/2) < \delta \leqslant \delta_0(\alpha, \beta, 0)$, *и при* $\delta > \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *и* $k_a \geqslant 3$; $k \geqslant 3$ *при* $\delta > \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *и* $k_a \leqslant 2$) *имеет в точности* $k-1$ *простых нулей при* $k < k_a$, *имеет либо* $k-2$, *либо* $k-1$ *простых нулей при* $k \geqslant k_a$; *функция* $y_1(x)$ *при* $\delta < \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *либо не имеет нулей, либо имеет* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_1, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей; при* $\delta \geqslant \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *имеет* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_1, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей; функция* $y_2(x)$ *при* $\delta > \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *и* $k_a \leqslant 2$ *либо имеет* $s(\lambda_2) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_2, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей, либо не имеет нулей, либо имеет один простой нуль в интервале* $(0, l)$;

б) если $a = 0$, *то функция* $y_k(x)$ (*при* $k \geqslant 2$ *в случаях* $\delta < \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *и* $\delta = \delta_0(\alpha, \beta, 0)$, $k_c \geqslant 2$, *при* $k \geqslant 3$ *в случаях* $\delta = \delta_0(\alpha, \beta, 0)$, $k_c = 1$ *и* $\delta > \delta_0(\alpha, \beta, 0)$) *имеет либо* $k-2$, *либо* $k-1$ *простых нулей при* $k \leqslant k_c$, *имеет в точности* $k-2$ *простых нулей при* $k > k_c$; *в случае* $\delta < \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *функция* $y_1(x)$ *либо имеет* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_1, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей, либо не имеет нулей, в случае* $\delta \geqslant \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *функция* $y_1(x)$ *имеет* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_1, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей; в случае* $\delta = \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *и* $k_c = 1$ *функция* $y_2(x)$ *либо имеет* $s(\lambda_2) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_2, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей, либо не имеет нулей, а в случае* $\delta > \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *функция* $y_2(x)$ *либо имеет* $s(\lambda_2) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_2, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей, либо не имеет нулей, либо имеет один простой нуль в интервале* $(0, l)$;

в) если $ac \neq 0$, *то:*

в$_1$) *при* $ac > 0$ *функция* $y_k(x)$ (*при* $k \geqslant 2$ *в случаях* $\delta < \delta_0(\alpha, \beta, 0)$; $\delta = \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *и* $k_c \geqslant 2$; $\delta > \delta_0(\alpha, \beta, 0)$, $k_c \geqslant 2$ *и* $k_a \geqslant 3$; *при* $k \geqslant 3$ *в случаях* $\delta \geqslant \delta_0(\alpha, \beta, 0)$, $k_c = 1$; $\delta > \delta_0(\alpha, \beta, 0)$, $k_c \geqslant 2$ *и* $k_a \leqslant 2$) *имеет в точности* $k-1$ *простых нулей при* $k < k_a$, *имеет либо* $k-2$, *либо* $k-1$ *простых нулей при* $k_a \leqslant k \leqslant k_c$, *имеет в точности* $k-2$ *простых нулей при* $k > k_c$; *в случае* $\delta < \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *функция* $y_1(x)$ *либо имеет* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_1, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей, либо не имеет нулей, в случае* $\delta \geqslant \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *функция* $y_1(x)$ *имеет* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_1, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей; в случае* $\delta = \delta_0(\alpha, \beta, 0)$, $k_c = 1$ *функция* $y_2(x)$ *либо имеет* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_1, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей, либо не имеет нулей, в случае* $\delta > \delta_0(\alpha, \beta, 0)$, $k_c = 1$ *функция* $y_2(x)$ *имеет* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_1, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей, в случае* $\delta > \delta_0(\alpha, \beta, 0)$, $k_c = 2$ *и* $k_a \leqslant 2$ *функция* $y_2(x)$ *либо имеет* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_1, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей, либо не имеет нулей, либо имеет один простой нуль в интервале* $(0, l)$;

в$_2$) *при* $ac < 0$ *функция* $y_k(x)$ ($k \geqslant 2$ *при* $\delta < \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *в случаях* $k_c = 1$, $k_a \geqslant 2$ *и* $k_c \geqslant 2$, *при* $\delta = \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *в случае* $k_c \geqslant 2$; $k \geqslant 3$ *при* $\delta < \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *в случае* $k_c = k_a = 1$, *при* $\delta = \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *в случае* $k_c = 1$ *и при* $\delta > \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *в случаях* $k_c \leqslant 2$, $k_a \geqslant 3$ *и* $k_c \geqslant 3$; $k \geqslant 4$ *при* $\delta > \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *в случае* $k_c \leqslant k_a \leqslant 2$) *при* $k \leqslant k_c$ *имеет либо* $k-2$, *либо* $k-1$ *простых нулей, при* $k > k_a$ *имеет либо* $k-3$, *либо* $k-2$ *простых нулей, при* $k_c < k \leqslant k_a$ (*в случае* $k_c < k_a$) *имеет в точности* $k-2$ *простых нулей; функция* $y_1(x)$ *при* $\delta < \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *имеет либо* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_1, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей, либо не имеет нулей, а при* $\delta \geqslant \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *имеет* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_1, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей; функция* $y_2(x)$ *при* $\delta < \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *в случае* $k_c = k_a = 1$ *и при* $\delta = \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *в случае* $k_c = 1$ *имеет либо* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_1, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей, либо не имеет нулей, при* $\delta > \delta_0(\alpha, \beta, 0)$ *в случае* $k_c = 1$ *имеет* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_1, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей, в случае* $k_c \geqslant 2$ *имеет либо* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k \in (\lambda_1, 0)} i(\rho_k)$ *простых нулей, либо* *не имеет нулей, либо имеет один простой нуль, функция* $y_3(x)$ *при* $\delta > \delta_0(\alpha,\beta,0)$ *в случае* $k_c \leqslant k_a \leqslant 2$ *имеет либо* $s(\lambda_1) = \sum_{\rho_k\in(\lambda_1,0)} i(\rho_k)$ *простых нулей, либо не имеет нулей, либо имеет один простой нуль в интервале* $(0,l)$.

Доказательство. Рассмотрим случай а), т.е. пусть $c=0$. В силу (17) имеем

$$\lambda_k \in (\nu_k,\mu_k) \ \text{ при } \ k<k_a, \quad \lambda_k\in(\mu_{k-1},\nu_k) \ \text{ при } \ k\geqslant k_a. \tag{31}$$

Тогда из теоремы 4 следует, что $\lambda_k>0$ при $k\geqslant 3$.

Если $\delta\leqslant\delta_0(\alpha,\beta,\pi/2)$, то в силу теоремы 2 и соотношения (10) имеем $0\leqslant\nu_1<\mu_1$. Тогда из (31) следует, что $\lambda_1\geqslant 0$ при $k_a\geqslant 2$; $\lambda_1<0$ при $k_a=1$ и $-b/d>F(0)$; $\lambda_1=0$ при $k_a=1$ и $-b/d=F(0)$ и $\lambda_1>0$ при $k_a=1$ и $-b/d<F(0)$.

Пусть $\delta_0(\alpha,\beta,\pi/2)<\delta\leqslant\delta_0(\alpha,\beta,0)$. Из теоремы 2 следует, что $\nu_1<0\leqslant\mu_1$. Тогда из (31) получаем, что $\lambda_2>0$. При этом $\lambda_1<0$ при $\delta=\delta_0(\alpha,\beta,0)$ и при $\delta_0(\alpha,\beta,\pi/2)<\delta<\delta_0(\alpha,\beta,0)$ в случаях $k_a=1$ и $k_a\geqslant 2$, $-b/d>F(0)$; $\lambda_1=0$ при $\delta_0(\alpha,\beta,\pi/2)<\delta<\delta_0(\alpha,\beta,0)$, $k_a\geqslant 2$ и $-b/d=F(0)$; $\lambda_1>0$ при $\delta_0(\alpha,\beta,\pi/2)<\delta<\delta_0(\alpha,\beta,0)$, $k_a\geqslant 2$ и $-b/d<F(0)$.

Если $\delta>\delta_0(\alpha,\beta,0)$, то на основании теоремы 2 имеем $\nu_1<\mu_1<0<\nu_2$. Тогда из (31) следует, что $\lambda_1<0$ и $\lambda_3>0$, причём $\lambda_2<0$ при $k_a\leqslant 2$ и $-b/d>F(0)$; $\lambda_2=0$ при $k_a\leqslant 2$ и $-b/d=F(0)$; $\lambda_2\in(0,\nu_2)$ при $k_a\leqslant 2$ и $-b/d<F(0)$, $\lambda_2\in[\nu_2,\mu_2)$ при $k_a\geqslant 3$.

Теперь утверждение теоремы в случае п. а) следует из теоремы 3 и формулы (12) на основании приведённых выше рассуждений. Остальные утверждения теоремы доказываются аналогичным образом. Доказательство теоремы завершено.

5. Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций краевых задач (1)–(3), (5), (13) при $q(x)\equiv 0$ и (1)–(5).

Теорема 6. *Пусть* $q(x)\equiv 0$ *в уравнении (1). Тогда справедливы следующие асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций задачи (1)–(3), (5), (13):*

$$\sqrt[4]{\tau_k} = \left(k - \frac{1+3\operatorname{sgn}\beta}{4}\right)\frac{\pi}{l} + O(k^{-2})x, \quad \text{если} \ \alpha=0, \quad c=0, \tag{32}$$

$$\sqrt[4]{\tau_k} = \left(k - \frac{2+3\operatorname{sgn}\beta}{4}\right)\frac{\pi}{l} + \frac{(1+\operatorname{sgn}\beta)\operatorname{ctg}\alpha}{2k\pi} + O(k^{-2}), \quad \text{если} \ \alpha\in(0,\pi/2], \quad c=0, \tag{33}$$

$$\sqrt[4]{\tau_k} = \left(k - \frac{2+3\operatorname{sgn}\beta}{4}\right)\frac{\pi}{l} + \frac{a/c}{k\pi} + O(k^{-2}), \quad \text{если} \ \alpha=0, \quad c\neq 0, \tag{34}$$

$$\sqrt[4]{\tau_k} = \left(k - \frac{3(1+\operatorname{sgn}\beta)}{4}\right)\frac{\pi}{l} + \frac{2a/c+(1+\operatorname{sgn}\beta)\operatorname{ctg}\alpha}{2k\pi} + {} + O(k^{-2}), \quad \text{если} \ \alpha\in(0,\pi/2], \quad c\neq 0, \tag{35}$$

$$v_k(x) = \sqrt{\frac{1+\operatorname{sgn}\beta}{l}}\{(1-\operatorname{sgn}\beta)\sin(\sqrt[4]{\tau_k}x) - (-1)^{\operatorname{sgn}\beta}\cos(\sqrt[4]{\tau_k}x) + {} + (1-\operatorname{sgn}\beta)e^{-\sqrt[4]{\tau_k}x} + O(k^{-2})\}, \quad \text{если} \ \alpha=0, \quad c=0, \tag{36}$$

$$v_k(x) = \sqrt{\frac{2-\operatorname{sgn}\beta}{l}}\left\{\sin(\sqrt[4]{\tau_k}x) - \operatorname{sgn}\beta\cos(\sqrt[4]{\tau_k}x) - \operatorname{sgn}\beta e^{-\sqrt[4]{\tau_k}x} + {} + \operatorname{sgn}\beta\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{(2-\operatorname{sgn}\beta)\sqrt[4]{\tau_k}}\sin(\sqrt[4]{\tau_k}x) - (1+\operatorname{sgn}\beta)\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2\sqrt[4]{\tau_k}}\cos(\sqrt[4]{\tau_k}x) + (1+\operatorname{sgn}\beta)\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2\sqrt[4]{\tau_k}}e^{-\sqrt[4]{\tau_k}x} + {} + O(k^{-2})\right\}, \quad \text{если} \ \alpha\in(0,\pi/2], \quad c=0, \tag{37}$$

$$v_k(x) = \sqrt{\frac{1+\operatorname{sgn}\beta}{l}}\Big\{(1-\operatorname{sgn}\beta)\sin(\sqrt[4]{\tau_k}x) - (-1)^{\operatorname{sgn}\beta}\cos(\sqrt[4]{\tau_k}x) + (1-\operatorname{sgn}\beta)e^{-\sqrt[4]{\tau_k}x} +$$

$$+ (-1)^{k+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\operatorname{sgn}\beta} e^{\sqrt[4]{\tau_k}(x-l)} + (-1)^{k+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\operatorname{sgn}\beta}\frac{a/c}{\rho_k} e^{\sqrt[4]{\tau_k}(x-l)} +$$

$$+ O(k^{-2})\Bigg\}, \quad \text{если} \;\; \alpha = 0, \quad c \neq 0, \tag{38}$$

$$v_k(x) = \sqrt{\frac{2-\operatorname{sgn}\beta}{l}}\Bigg\{\sin(\sqrt[4]{\tau_k}x) - \operatorname{sgn}\beta\cos(\sqrt[4]{\tau_k}x) - \operatorname{sgn}\beta e^{-\sqrt[4]{\tau_k}x} +$$

$$+ (-1)^{k+1-\operatorname{sgn}\beta}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1-\operatorname{sgn}\beta} e^{\sqrt[4]{\tau_k}(x-l)} - \operatorname{sgn}\beta\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\rho_k}\sin(\sqrt[4]{\tau_k}x) - \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{(2-\operatorname{sgn}\beta)\rho_k}\cos(\sqrt[4]{\tau_k}x) +$$

$$+ \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{(2-\operatorname{sgn}\beta)\rho_k}e^{-\sqrt[4]{\tau_k}x} + (-1)^{k+\operatorname{sgn}\beta}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1-\operatorname{sgn}\beta}\frac{a/c}{\rho_k}e^{\sqrt[4]{\tau_k}(x-l)} +$$

$$+ O(k^{-2})\Bigg\}, \quad \text{если} \;\; \alpha \in (0,\pi/2], \quad c \neq 0, \tag{39}$$

причём соотношения (36)–(39) выполняются равномерно по $x \in [0,l]$.

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что $\tau_k > 0$ при $k \geqslant 2$.

В уравнении (1) положим $q \equiv 0$ и $\lambda = \rho^4$, $\rho > 0$. Очевидно, что это уравнение имеет четыре линейно независимых решения

$$\varphi_j(x,\rho) = e^{\rho\omega_j x}, \quad j = \overline{1,4}, \tag{40}$$

где $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = -i$, $\omega_3 = i$, $\omega_4 = 1$.

В силу (40) имеем

$$U_1(\lambda,\varphi_j) \equiv \varphi_j'(0,\rho) = \rho\omega_j, \quad \text{если} \;\; \alpha = 0, \tag{41}$$

$$U_1(\lambda,\varphi_j) \equiv \varphi_j'(0,\rho)\cos\alpha - \varphi_j''(0,\rho)\sin\alpha = -\rho^2\omega_j^2\sin\alpha\left(1 - \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\rho\omega_j}\right), \quad \text{если} \;\; \alpha \in (0,\pi/2], \tag{42}$$

$$U_2(\lambda,\varphi_j) \equiv \varphi_j(0,\rho) = 1, \quad \text{если} \;\; \beta = 0, \tag{43}$$

$$U_2(\lambda,\varphi_j) \equiv \varphi_j(0,\rho)\cos\beta + T\varphi_j(0,\rho)\sin\beta = \rho^3\omega_j^3\sin\beta(1 + O(\rho^{-2})), \quad \text{если} \;\; \beta \in (0,\pi/2], \tag{44}$$

$$U_3^1(\lambda,\varphi_j) \equiv \varphi_j'(l,\rho) = \rho\omega_j e^{\rho\omega_j l}, \quad \text{если} \;\; c = 0, \tag{45}$$

$$U_3^1(\lambda,\varphi_j) \equiv a\varphi_j'(l,\rho) + c\varphi_j''(l,\rho) = c\rho^2\omega_j^2 e^{\rho\omega_j l}\left(1 + \frac{a/c}{\rho\omega_j}\right), \quad \text{если} \;\; c \neq 0, \tag{46}$$

$$U_4(\lambda,\varphi_j) \equiv \varphi_j(l,\rho)\cos\delta - T\varphi_j(l,\rho)\sin\delta = -\rho^3\omega_j^3 e^{\rho\omega_j l}\sin\delta(1 + O(\rho^{-2})). \tag{47}$$

Очевидно, что $\lambda = \rho^4$ является собственным значением задачи (1)–(3), (5), (13), если ρ является нулём характеристического определителя

$$\Delta_0(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(\lambda,\varphi_1) & U_1(\lambda,\varphi_2) & U_1(\lambda,\varphi_3) & U_1(\lambda,\varphi_4) \\ U_2(\lambda,\varphi_1) & U_2(\lambda,\varphi_2) & U_2(\lambda,\varphi_3) & U_2(\lambda,\varphi_4) \\ U_3^1(\lambda,\varphi_1) & U_3^1(\lambda,\varphi_2) & U_3^1(\lambda,\varphi_3) & U_3^1(\lambda,\varphi_4) \\ U_4(\lambda,\varphi_1) & U_4(\lambda,\varphi_2) & U_4(\lambda,\varphi_3) & U_4(\lambda,\varphi_4) \end{vmatrix}. \tag{48}$$

Пусть $\alpha \in (0,\pi/2]$, $\beta = 0$, $c \neq 0$, $\delta \in [\pi/2,\pi)$ в граничных условиях (2), (3), (5), (13). Тогда в силу (41)–(47) из (48) имеем

$$\Delta_0(\lambda) = c\rho^7\sin\alpha\sin\delta\,\times$$

$$\times\left\{\begin{vmatrix} 1+\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{i\rho} & -\left(1+\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{i\rho}\right) & -\left(1-\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{i\rho}\right) & 1-\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{i\rho} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{-\rho l}\left(1-\dfrac{a/c}{i\rho}\right) & -e^{-i\rho l}\left(1-\dfrac{a/c}{\rho}\right) & -e^{i\rho l}\left(1+\dfrac{a/c}{i\rho}\right) & e^{\rho l}\left(1+\dfrac{a/c}{\rho}\right) \\ -e^{-\rho l} & ie^{-i\rho l} & -ie^{i\rho l} & e^{\rho l} \end{vmatrix}+O(\rho^{-2})\right\}=$$

$$=-2c\varrho^7e^{\rho l}\sin\alpha\sin\delta\times$$

$$\times\left\{(1-i)\left(1+\frac{2a/c+\operatorname{ctg}\alpha}{2i\rho}(1+i)\right)e^{i\rho l}-(1+i)\left(1-\frac{2a/c+\operatorname{ctg}\alpha}{2i\rho}(1-i)\right)e^{-i\rho l}+O(\rho^{-2})\right\}.$$

Отсюда следует, что нули определителя $\Delta(\lambda)$ являются корнями уравнения

$$e^{2i\rho l}=i-\frac{4a/c+2\operatorname{ctg}\alpha}{2\rho}+O(\rho^{-2}). \tag{49}$$

Учитывая замечание 1, из теоремы 3.1 работы [14] получим асимптотическую формулу

$$\rho_k=\sqrt[4]{\tau_k}=\left(k-\frac{3}{4}\right)\frac{\pi}{l}+\epsilon_k, \tag{50}$$

где $\epsilon_k=O(k^{-1})$ при $k\to\infty$. Согласно (50) из (49) находим

$$e^{2i\rho_k l}=ie^{2i\epsilon_k l}=i-\frac{4a/c+2\operatorname{ctg}\alpha}{2k\pi/l}+O(k^{-2}),$$

откуда получаем

$$\epsilon_k=\frac{4a/c+2\operatorname{ctg}\alpha}{4k\pi}+O(k^{-2}). \tag{51}$$

Асимптотическое равенство (35) при $\beta=0$ следует из соотношений (50) и (51).

Остальные случаи рассматриваются аналогично с учётом соотношений (41)–(47).

В силу (35) при $\beta=0$ имеем

$$e^{i\rho_k l}=-i(-1)^k\left(1-\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2i\rho_k}+O(k^{-2})\right),\quad e^{-i\rho_k l}=i(-1)^k\left(1+\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2i\rho_k}+O(k^{-2})\right). \tag{52}$$

Собственная функция $v_k(x)=v(x,\tau_k)$ задачи (1)–(3), (5), (13) при $q(x)\equiv 0$, соответствующая собственному значению $\tau_k=\rho_k^4$, может быть представлена в виде

$$v_k(x)=C_{\rho_k}\begin{vmatrix}\varphi_1(x,\rho_k) & \varphi_2(x,\rho_k) & \varphi_3(x,\rho_k) & \varphi_4(x,\rho_k)\\ U_2(\lambda,\varphi_1) & U_2(\lambda,\varphi_2) & U_2(\lambda,\varphi_3) & U_2(\lambda,\varphi_4)\\ U_3^1(\lambda,\varphi_1) & U_3^1(\lambda,\varphi_2) & U_3^1(\lambda,\varphi_3) & U_3^1(\lambda,\varphi_4)\\ U_4(\lambda,\psi_1) & U_4(\lambda,\psi_2) & U_4(\lambda,\psi_3) & U_4(\lambda,\psi_4)\end{vmatrix}, \tag{53}$$

где $C_{\rho_k}\neq 0$ – некоторая постоянная, зависящая от ρ_k.

В случае $\alpha\in(0,\pi/2]$, $\beta=0$, $c\neq 0$, $\delta\in[\pi/2,\pi)$ на основании формулы (35) при $\beta=0$ и равенств (43), (46), (47), (52) из (53) получим

$$v_k(x)=v(x,\rho_k)=-c\rho_k^5\sin\delta C_{\rho_k}\times$$

$$\times\left\{\begin{vmatrix} e^{-\rho_k x} & e^{-i\rho_k x} & e^{i\rho_k x} & e^{\rho_k x}\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ -e^{-\rho_k l}\left(1-\dfrac{a}{c\rho_k}\right) & -ie^{-i\rho_k l}\left(1-\dfrac{a}{i\rho_k}\right) & ie^{i\rho_k l}\left(1+\dfrac{a}{ic\rho_k}\right) & e^{\rho_k l}\left(1+\dfrac{a}{c\rho_k}\right)\\ e^{-\rho_k l} & ie^{-i\rho_k l} & -ie^{i\rho_k} & e^{\rho_k l}\end{vmatrix}+O(\rho_k^{-2})\right\}=$$

$$= -c\rho_k^5 e^{\rho_k l}\sin\delta\times$$

$$\times C_{\rho_k}\left\{\begin{vmatrix} e^{-\rho_k x} & e^{-i\rho_k x} & e^{i\rho_k x} & e^{\rho_k(x-l)} \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -ie^{-i\rho_k l}\left(1-\dfrac{a}{ic\rho_k}\right) & ie^{i\rho_k l}\left(1+\dfrac{a}{ic\rho_k}\right) & 1+\dfrac{a}{c\rho_k} \\ 0 & i & e^{-i\rho_k l}-ie^{i\rho_k} & 1\end{vmatrix} + O(\rho_k^{-2})\right\} =$$

$$= 2i\sqrt{2}(-1)^{k+1}c\rho_k^5 e^{\rho_k l}\sin\delta\times$$

$$\times C_{\rho_k}\left\{\sin\rho_k + (-1)^{k+1}\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\rho_k(x-l)} + \frac{a}{c\rho_k}\sin\rho_k x - \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2\rho_k}\cos\rho_k x + \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2\rho_k}e^{-\rho_k x} + O(\rho_k^{-2})\right\}.$$

Выберем постоянную C_{ρ_k} следующим образом:

$$C_{\rho_k} = \frac{i(-1)^k e^{-\rho_k l}\rho_k^{-5}}{2\sqrt{2l}c\sin\delta}\left(1-\frac{a/c}{\rho_k}\right).$$

Тогда из последнего соотношения получим асимптотическую формулу (39) при $\beta = 0$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично с учётом соотношений (32)–(35) и (41)–(47). Теорема доказана.

В силу (32)–(35) из (36)–(39) непосредственными вычислениями получим

$$\|v_k\|_2^2 = 1 + O(k^{-2}),$$

где $\|\cdot\|_2$ – норма в пространстве $L_2(0,l)$.

Замечание 4. Обозначим через $\Psi_k(x)$, $k\in\mathbb{N}$, нормированную собственную функцию задачи (1)–(3), (5), (13) при $q\equiv 0$, соответствующую собственному значению τ_k, т.е. $\Psi_k(x) = \dfrac{v_k(x)}{\|v_k\|_2}$. Тогда для $\Psi_k(x)$ имеют место асимптотические формулы (36)–(39).

Функцию $q_0(x)$, $x\in[0,l]$, и число q_0 определим следующим образом:

$$q_0(x) = \int\limits_0^x q(t)\,dt, q_0 = \int\limits_0^l q(t)\,dt.$$

Теорема 7. *Для собственных значений и собственных функций задачи (1)–(5) справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$\sqrt[4]{\lambda_k} = \left(k - \frac{5+3\operatorname{sgn}\beta}{4}\right)\frac{\pi}{l} + \frac{q_0}{4k\pi} + O(k^{-2}), \quad \textit{если}\ \ \alpha = 0, \quad c = 0, \tag{54}$$

$$\sqrt[4]{\lambda_k} = \left(k - \frac{6+3\operatorname{sgn}\beta}{4}\right)\frac{\pi}{l} + \frac{q_0 + 2(1+\operatorname{sgn}\beta)\operatorname{ctg}\alpha}{4k\pi} + O(k^{-2}), \quad \textit{если}\ \ \alpha\in(0,\pi/2], \quad c = 0, \tag{55}$$

$$\sqrt[4]{\lambda_k} = \left(k - \frac{6+3\operatorname{sgn}\beta}{4}\right)\frac{\pi}{l} + \frac{q_0 + 4a/c}{4k\pi} + O(k^{-2}), \quad \textit{если}\ \ \alpha = 0, \quad c \neq 0, \tag{56}$$

$$\sqrt[4]{\lambda_k} = \left(k - \frac{7+3\operatorname{sgn}\beta}{4}\right)\frac{\pi}{l} + \frac{q_0 + 4a/c + 2(1+\operatorname{sgn}\beta)\operatorname{ctg}\alpha}{4k\pi} +$$

$$+ O(k^{-2}), \quad \textit{если}\ \ \alpha\in(0,\pi/2], \quad c\neq 0, \tag{57}$$

$$y_k(x) = \sqrt{\frac{1+\operatorname{sgn}\beta}{l}}\left\{(1-\operatorname{sgn}\beta)\sin(\sqrt[4]{\lambda_k}x) + (-1)^{\operatorname{sgn}\beta}\cos(\sqrt[4]{\lambda_k}x) + (1-\operatorname{sgn}\beta)e^{-\sqrt[4]{\lambda_k}x} + \right.$$

$$+(-1)^{\operatorname{sgn}\beta}\frac{(1-\operatorname{sgn}\beta)q_0-q_0(x)}{4\varrho_k}\sin(\sqrt[4]{\lambda_k}x)-(-1)^{\operatorname{sgn}\beta}\frac{q_0+(1-\operatorname{sgn}\beta)q_0(x)}{4\varrho_k}\cos(\sqrt[4]{\lambda_k}x)+$$

$$+(1-\operatorname{sgn}\beta)\frac{q_0-q_0(x)}{4\varrho_k}e^{\sqrt[4]{\lambda_k}x}+O(k^{-2})\biggr\},\quad \textit{если}\;\;\alpha=0,\quad c=0, \tag{58}$$

$$y_k(x)=\sqrt{\frac{2-\operatorname{sgn}\beta}{l}}\biggl\{\sin(\sqrt[4]{\lambda_k}x)-\operatorname{sgn}\beta\cos(\sqrt[4]{\lambda_k}x)-\operatorname{sgn}\beta e^{-\sqrt[4]{\lambda_k}x}-$$

$$-\operatorname{sgn}\beta\frac{q_0(x)+4\operatorname{ctg}\alpha}{4\rho_k}\sin(\sqrt[4]{\lambda_k}x)-\frac{q_0(x)+2(1+\operatorname{sgn}\beta)\operatorname{ctg}\alpha}{4\rho_k}\cos(\sqrt[4]{\lambda_k}x)+$$

$$+\frac{\operatorname{sgn}\beta q_0(x)+2(1+\operatorname{sgn}\beta)\operatorname{ctg}\alpha}{4\rho_k}e^{-\sqrt[4]{\lambda_k}x}+O(k^{-2})\biggr\},\quad \textit{если}\;\;\alpha\in(0,\pi/2],\quad c=0, \tag{59}$$

$$y_k(x)=\sqrt{\frac{1+\operatorname{sgn}\beta}{l}}\biggl\{(1-\operatorname{sgn}\beta)\sin(\sqrt[4]{\lambda_k}x)-(-1)^{\operatorname{sgn}\beta}\cos(\sqrt[4]{\lambda_k}x)+(1-\operatorname{sgn}\beta)e^{-\sqrt[4]{\lambda_k}x}+$$

$$+(-1)^{k+\operatorname{sgn}\beta}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\operatorname{sgn}\beta}e^{\sqrt[4]{\lambda_k}(x-l)}+(-1)^{\operatorname{sgn}\beta}\frac{(1-\operatorname{sgn}\beta)(q_0+4a/c)-q_0(x)}{4\varrho_k}\sin(\sqrt[4]{\lambda_k}x)-$$

$$-(-1)^{\operatorname{sgn}\beta}\frac{q_0+4a/c+(1-\operatorname{sgn}\beta)q_0(x)}{4\varrho_k}\cos(\sqrt[4]{\lambda_k}x)+(1-\operatorname{sgn}\beta)\frac{q_0+4a/c-q_0(x)}{4\varrho_k}e^{-\sqrt[4]{\lambda_k}x}+$$

$$+(-1)^{k+\operatorname{sgn}\beta}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\operatorname{sgn}\beta}\frac{q_0(x)}{4\varrho_k}e^{\sqrt[4]{\lambda_k}(x-l)}+O(k^{-2})\biggr\},\quad \textit{если}\;\;\alpha=0,\quad c\neq0, \tag{60}$$

$$y_k(x)=\sqrt{\frac{2-\operatorname{sgn}\beta}{l}}\biggl\{\sin(\sqrt[4]{\lambda_k}x)-\operatorname{sgn}\beta\cos(\sqrt[4]{\lambda_k}x)-\operatorname{sgn}\beta e^{-\sqrt[4]{\lambda_k}x}+$$

$$+(-1)^{k+\operatorname{sgn}\beta}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\operatorname{sgn}\beta}e^{\sqrt[4]{\lambda_k}(x-l)}-\operatorname{sgn}\beta\frac{4\operatorname{ctg}\alpha+q_0(x)}{4\varrho_k}\sin(\sqrt[4]{\lambda_k}x)-$$

$$-\frac{q_0(x)+2(1+\operatorname{sgn}\beta)\operatorname{ctg}\alpha}{4\varrho_k}\cos(\sqrt[4]{\lambda_k}x)+\frac{\operatorname{sgn}\beta q_0(x)+4\operatorname{ctg}\alpha}{4\varrho_k}e^{-\sqrt[4]{\lambda_k}x}+$$

$$+(-1)^{k+\operatorname{sgn}\beta}\frac{q_0(x)-q_0+4a/c}{4\varrho_k}e^{\sqrt[4]{\lambda_k}(x-l)}+O(k^{-2})\biggr\},\quad \textit{если}\;\;\alpha\in(0,\pi/2],\quad c\neq0, \tag{61}$$

причём соотношения (58)–(61) выполняются равномерно по $x\in[0,l]$.

Доказательство. Из теоремы 4 следует, что $\lambda_k>0$ при $k\geqslant2$. Поэтому в уравнении (1) положим $\lambda=\varrho^4$, где $\varrho>0$. Известно (см. [26, с. 63–64]), что уравнение (1) во всякой области T комплексной ϱ-плоскости имеет четыре линейно независимых решения $\psi_j(x,\varrho)$, $j=\overline{1,4}$, регулярных относительно ϱ (при достаточно большом ϱ), удовлетворяющих соотношениям

$$\psi_j^{(s)}(x,\varrho)=(\varrho\omega_j)^s e^{\varrho\omega_j x}\biggl\{1+\frac{q_0(x)}{4\varrho\omega_j}+O(\varrho^{-2})\biggr\},\quad j=\overline{1,4},\quad s=\overline{0,3}, \tag{62}$$

где $\omega_1=-\omega_4=-1$, $\omega_2=-\omega_3=-i$.

В силу (62) имеем

$$U_1(\lambda,\psi_j)=\psi_j'(0,\varrho)=\varrho\omega_j(1+O(\varrho^{-2})),\quad \text{если}\;\;\alpha=0, \tag{63}$$

$$U_1(\lambda,\psi_j)=\psi_j'(0,\varrho)\cos\alpha-\psi_j''(0,\varrho)\sin\alpha=$$

$$=-\varrho^2\omega_j^2\sin\alpha\left(1-\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\varrho\omega_j}+O(\varrho^{-2})\right),\quad \text{если}\;\;\alpha\in(0,\pi/2], \tag{64}$$

$$U_2(\lambda, \psi_j) = \psi_j(0, \rho) = 1 + O(\rho^{-2}), \quad \text{если} \quad \beta = 0, \tag{65}$$

$$U_2(\lambda, \psi_j) = \psi_j(0, \rho)\cos\beta + T\psi_j(0, \rho)\sin\beta = \varrho^3 \sin\beta\,\omega_j^3(1 + O(\rho^{-2})), \quad \text{если} \quad \beta \in (0, \pi/2], \tag{66}$$

$$U_3(\lambda, \psi_j) = (a\lambda + b)\psi_j'(l, \varrho) + d\psi_j''(l, \varrho) = a\varrho^5\omega_j e^{\varrho\omega_j l}\biggl(1 + \frac{q_0}{4\varrho\omega_j} + O(\rho^{-2})\biggr), \quad \text{если} \quad c = 0, \tag{67}$$

$$U_3(\lambda, \psi_j) = (a\lambda + b)\psi_j'(l, \varrho) + (c\lambda + d)\psi_j''(l, \varrho) =$$

$$= c\varrho^6\omega_j^2 e^{\varrho\omega_j l}\biggl(1 + \frac{q_0 + 4a/c}{4\varrho\omega_j} + O(\rho^{-2})\biggr), \quad \text{если} \quad c \neq 0, \tag{68}$$

$$U_4(\lambda, \psi_j) \equiv \psi_j(l, \varrho)\cos\delta - T\psi_j(l, \varrho)\sin\delta =$$

$$= -\rho^3\omega_j^3 e^{\varrho\omega_j l}\sin\delta\biggl(1 + \frac{q_0}{4\varrho\omega_j} + O(\rho^{-2})\biggr), \quad \text{если} \quad \delta \in [\pi/2, \pi). \tag{69}$$

Пусть $\lambda = \varrho^4$ – собственное значение краевой задачи (1)–(5). Тогда ϱ является корнем характеристического определителя

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(\lambda, \psi_1) & U_1(\lambda, \psi_2) & U_1(\lambda, \psi_3) & U_1(\lambda, \psi_4) \\ U_2(\lambda, \psi_1) & U_2(\lambda, \psi_2) & U_2(\lambda, \psi_3) & U_2(\lambda, \psi_4) \\ U_3(\lambda, \psi_1) & U_3(\lambda, \psi_2) & U_3(\lambda, \psi_3) & U_3(\lambda, \psi_4) \\ U_4(\lambda, \psi_1) & U_4(\lambda, \psi_2) & U_4(\lambda, \psi_3) & U_4(\lambda, \psi_4) \end{vmatrix}. \tag{70}$$

Если $\alpha \in (0, \pi/2]$, $\beta = 0$, $c \neq 0$, $\delta \in [\pi/2, \pi)$ в граничных условиях (2)–(5), то в силу соотношений (64), (65), (68) и (69) из (70) находим

$$\Delta(\lambda) = c\varrho^{11}\sin\alpha\sin\delta \times$$

$$\times \left\{ \begin{vmatrix} 1 + \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\varrho} & -\biggl(1 + \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{i\varrho}\biggr) & -\biggl(1 - \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{i\varrho}\biggr) & 1 - \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\varrho} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{-\rho l}\biggl(1 - \dfrac{q_0 + 4a/c}{4\varrho}\biggr) & -e^{-i\varrho l}\biggl(1 - \dfrac{q_0 + 4a/c}{4i\varrho}\biggr) & -e^{i\rho l}\biggl(1 + \dfrac{q_0 + 4a/c}{4i\varrho}\biggr) & e^{\varrho l}\biggl(1 + \dfrac{q_0 + 4a/c}{4\varrho}\biggr) \\ -e^{-\varrho l}\biggl(1 - \dfrac{q_0}{4\varrho}\biggr) & ie^{-i\varrho l}\biggl(1 - \dfrac{q_0}{4i\varrho}\biggr) & -ie^{i\varrho l}\biggl(1 + \dfrac{q_0}{4i\varrho}\biggr) & e^{\varrho l}\biggl(1 + \dfrac{q_0}{4\varrho}\biggr) \end{vmatrix} + O(\varrho^{-2}) \right\} =$$

$$= c\varrho^{11}e^{\varrho l}\sin\alpha\sin\delta\biggl(1 + \frac{q_0 + 4a/c}{4\varrho}\biggr)\biggl(1 + \frac{q_0}{4\varrho}\biggr) \times$$

$$\times \left\{ \begin{vmatrix} 1 + \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\varrho} & \biggl(1 + \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{i\varrho}\biggr) & -\biggl(1 - \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{i\varrho}\biggr) & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -e^{-i\varrho l}\biggl(1 - \dfrac{q_0 + 4a/c}{4i\varrho}\biggr) & -e^{i\rho l}\biggl(1 + \dfrac{q_0 + 4a/c}{4i\varrho}\biggr) & 1 \\ 0 & ie^{-i\varrho l}\biggl(1 - \dfrac{q_0}{4i\varrho}\biggr) & -ie^{i\varrho l}\biggl(1 + \dfrac{q_0}{4i\varrho}\biggr) & 1 \end{vmatrix} + O(\varrho^{-2}) \right\} = -2c\varrho^{11}e^{\varrho l} \times$$

$$\times \biggl(1 + \frac{q_0 + 4a/c}{4\rho}\biggr)\biggl(1 + \frac{q_0}{4\varrho}\biggr)\sin\alpha\sin\delta\biggl\{(1 - i)\biggl(1 + \frac{(1 - i)q_0 + 4a/c + 2(1 + i)\operatorname{ctg}\alpha}{4i\varrho}\biggr)e^{i\varrho l} -$$

$$- (1 + i)\biggl(1 - \frac{(1 + i)q_0 + 4a/c + 2(1 - i)\operatorname{ctg}\alpha}{4i\varrho}\biggr)e^{-i\varrho l} + O(\varrho^{-2})\biggr\}.$$

Из последнего равенства следует, что нули определителя $\Delta(\lambda)$ являются корнями уравнения

$$e^{2i\varrho l} = i\left(1 - \frac{q_0 + 4a/c + 2\operatorname{ctg}\alpha}{2i\varrho} + O(\varrho^{-2})\right). \tag{71}$$

Следуя соответствующим рассуждениям, проведённым при доказательстве теоремы 2 в [26, гл. 2, с. 77–79], убеждаемся, что из уравнения $e^{2i\rho l} = i + O(\rho^{-1})$ для $\varrho_k = \sqrt[4]{\lambda_k}$ вытекает асимптотическая формула

$$\varrho_{k+m_0} = \left(k + \frac{1}{4}\right)\frac{\pi}{l} + \varepsilon_k, \tag{72}$$

где m_0 – некоторое фиксированное целое число, $\varepsilon_k = O(k^{-1})$ при $k \to \infty$. В силу теоремы 3.1 работы [2] для собственных значений задачи (1)–(3), (5), (7) при $\alpha \in (0, \pi/2]$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ и $\delta \in [\pi/2, \pi)$ имеет место асимптотическая формула

$$\sqrt[4]{\mu_k} = \left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l} + O(k^{-1}). \tag{73}$$

На основании (27)–(30) и (73) из (72) получаем, что $m_0 = 2$ и, следовательно, справедливо асимптотическое равенство

$$\varrho_k = \left(k - \frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l} + \varepsilon_k, \tag{74}$$

согласно которому из уравнения (71) находим

$$e^{2i\varrho_k l} = ie^{2i\epsilon_k l} = i(1 + 2i\epsilon_k l + O(\epsilon_k^2)) = i\left(1 - \frac{q_0 + 4a/c + 2\operatorname{ctg}\alpha}{2i\varrho_k} + O(\varrho_k^{-2})\right) =$$

$$= i\left(1 - \frac{q_0 + 4a/c + 2\operatorname{ctg}\alpha}{2ik\pi/l} + O(k^{-2})\right).$$

Отсюда получаем, что

$$\epsilon_k = \frac{q_0 + 4a/c + 2\operatorname{ctg}\alpha}{4\varrho_k l} + O(\varrho_k^{-2}) = \frac{q_0 + 4a/c + 2\operatorname{ctg}\alpha}{4k\pi} + O(k^{-2}). \tag{75}$$

Асимптотическая формула (57) при $\beta = 0$ следует из соотношений (74) и (75).

Остальные случаи рассматриваются аналогичным образом с учётом равенств (63)–(69). В силу формулы (57) при $\beta = 0$ имеем

$$e^{i\varrho_k l} = (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\left(1 - \frac{q_0 + 4a/c + 2\operatorname{ctg}\alpha}{4ik\pi} + O(k^{-2})\right), \tag{76}$$

$$e^{-i\varrho_k l} = (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\left(1 + \frac{q_0 + 4a/c + 2\operatorname{ctg}\alpha}{4ik\pi} + O(k^{-2})\right). \tag{77}$$

Собственную функцию $y(x, \lambda_k)$ задачи (1)–(5), соответствующую собственному значению $\lambda_k = \varrho_k^4$, можем представить в виде

$$y(x, \lambda_k) = D_{\varrho_k} \begin{vmatrix} \psi_1(x, \varrho_k) & \psi_2(x, \varrho_k) & \psi_3(x, \varrho_k) & \psi_4(x, \varrho_k) \\ U_2(\lambda, \psi_1) & U_2(\lambda, \psi_2) & U_2(\lambda, \psi_3) & U_2(\lambda, \psi_4) \\ U_3(\lambda, \psi_1) & U_3(\lambda, \psi_2) & U_3(\lambda, \psi_3) & U_3(\lambda, \psi_4) \\ U_4(\lambda, \psi_1) & U_4(\lambda, \psi_2) & U_4(\lambda, \psi_3) & U_4(\lambda, \psi_4) \end{vmatrix}, \tag{78}$$

где $D_{\varrho_k} \neq 0$ – некоторая постоянная, зависящая от ϱ_k.

В случае $\alpha \in (0, \pi/2]$, $\beta = 0$, $c \neq 0$, $\delta \in [\pi/2, \pi)$ на основании (57) при $\beta = 0$, (65), (68), (69), (76) и (77) из (78) получим

$$y(x, \lambda_k) = -c\varrho_k^9 e^{\varrho_k} D_{\varrho_k} \times$$

$$\times \left\{ \begin{vmatrix} e^{-\varrho_k x}\left(1 - \dfrac{q_0(x)}{4k\pi}\right) & e^{-i\varrho_k x}\left(1 - \dfrac{q_0(x)}{4ik\pi}\right) & e^{i\varrho_k x}\left(1 + \dfrac{q_0(x)}{4ik\pi}\right) & e^{\varrho_k(x-l)}\left(1 + \dfrac{q_0(x)}{4k\pi}\right) \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -e^{-i\varrho_k l}\left(1 - \dfrac{q_0 + 4a/c}{4i\varrho_k}\right) & -e^{i\varrho_k l}\left(1 + \dfrac{q_0 + 4a/c}{4i\varrho_k}\right) & 1 + \dfrac{q_0 + 4a/c}{4\varrho_k} \\ 0 & ie^{-i\varrho_k l}\left(1 - \dfrac{q_0}{4i\varrho_k}\right) & -ie^{-i\varrho_k l}\left(1 + \dfrac{q_0}{4i\varrho_k}\right) & 1 + \dfrac{q_0}{4\varrho_k} \end{vmatrix} + O(\varrho_k^{-2}) \right\} =$$

$$= 2\sqrt{2}(-1)^k ic\varrho_k^9 e^{\varrho_k l} D_{\varrho_k} \left\{ \sin(\varrho_k x) + (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\varrho_k(x-l)} + \frac{q_0 + 4a/c}{4\varrho_k} \sin(\varrho_k x) - \right.$$

$$\left. - \frac{q_0(x) + 2\operatorname{ctg}\alpha}{4\varrho_k} \cos(\varrho_k x) + \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2\varrho_k} e^{-\varrho_k x} + (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{q_0(x)}{4\varrho_k} e^{\varrho_k(x-l)} \frac{q_0(x)}{4\varrho_k} + O(\varrho_k^{-2}) \right\}.$$

Постоянную D_{ϱ_k} выберем следующим образом:

$$D_{\varrho_k} = \frac{(-1)^{k+1} i\varrho_k^{-9} e^{-\varrho_k l}}{2\sqrt{2}c} \left(1 - \frac{q_0 + 4a/c}{4\rho_k}\right).$$

Тогда из последней формулы получим равенство (61) при $\beta = 0$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично с учётом соотношений (54)–(57) и (62)–(69). Теорема доказана.

6. О базисности в $L_p(0,1)$, $1 < p < \infty$, подсистем собственных функций краевой задачи (1)–(5). Введём обозначение

$$\delta_k = \|\widehat{y}_k\|_H^2 = (\widehat{y}_k, \widehat{y}_k)_H = \|y_k\|_{L_2}^2 + \sigma^{-1} m_k^2. \tag{79}$$

Поскольку $\sigma > 0$ и $m_k \neq 0$ (см. лемма 4), из (79) имеем

$$\delta_k > 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Замечание 5. В силу теоремы 1 система $\{\widehat{\vartheta}_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\widehat{\vartheta}_k = \delta_k{}^{-1/2}\widehat{y}_k$, собственных векторов оператора L образует ортонормальный базис в пространстве H.

Замечание 6. Пусть $\{\widehat{\upsilon}_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\widehat{\upsilon}_k = \{\upsilon_k(x), s_k\}$, – система, сопряжённая к системе $\{\widehat{y}_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда каждый элемент $\widehat{\upsilon}_k$, $k \in \mathbb{N}$, этой системы определяется следующим соотношением:

$$\widehat{\upsilon}_k = \delta_k^{-1}\widehat{y}_k. \tag{80}$$

Теорема 8. *Пусть r – произвольное фиксированное натуральное число. Тогда система $\{y_k(x)\}_{k=1,\ k\neq r}^{\infty}$ собственных функций задачи (1)–(5) образует базис в пространстве $L_p(0,l)$, $1 < p < \infty$, который при $p = 2$ является базисом Рисса. Кроме того, система $\{u_k(x)\}_{k=1,\ k\neq r}^{\infty}$, сопряжённая к системе $\{y_k(x)\}_{k=1,\ k\neq r}^{\infty}$, определяется равенством*

$$u_k(x) = \upsilon_k(x) - s_k s_r^{-1} \upsilon_r(x) = \delta_k^{-1}\{y_k(x) - m_k m_r^{-1} y_r(x)\}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \neq r. \tag{81}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 6.2 в [16].

7. Равномерная сходимость разложений по системе собственных функций задачи (1)–(5). Пусть r – произвольное фиксированное натуральное число. В силу теоремы 8 разложение в ряд Фурье

$$f(x)=\sum_{\substack{k=1\\k\neq r}}^{\infty}(f,u_k)y_k(x) \tag{82}$$

любой функции $f(x)\in C[0,l]$ по системе $\{y_k(x)\}_{k=1,\ k\neq r}^{\infty}$ собственных функций спектральной задачи (1)–(5) сходится в $L_p(0,l), 1<p<\infty$, причём в $L_2(0,l)$ этот ряд сходится безусловно.

Теорема 9. *Пусть r – произвольное фиксированное натуральные число, $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[0,l]$ функция, которая имеет равномерно сходящийся ряд Фурье по системе функций $\{\Psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ на отрезке $[0,l]$. Тогда ряд (82) сходится равномерно на отрезке $[0,l]$.*

Доказательство. Пусть $\alpha\in(0,\pi/2]$, $\beta=0$ и $c\neq 0$ в граничных условиях (2)–(4) и (13). В силу замечания 4 из (35) и (39) следует, что для собственных значений и собственных функций задачи (1)–(3), (5), (13) при $q\equiv 0$ справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\sqrt[4]{\tau_k}=\left(k-\frac{3}{4}\right)\frac{\pi}{l}+\frac{2a/c+\operatorname{ctg}\alpha}{2\rho_k l}+O(k^{-2})=\left(k-\frac{3}{4}\right)\frac{\pi}{l}+\frac{2a/c+\operatorname{ctg}\alpha}{2k\pi}+O(k^{-2}), \tag{83}$$

$$\Psi_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\biggl\{\sin\rho_k x-(-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\rho_k(x-l)}-\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2\rho_k}\cos\rho_k x+\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2\rho_k}e^{-\rho_k x}+$$
$$+(-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a/c}{\rho_k}e^{\rho_k(x-l)}+O(\rho_k^{-2})\biggr\}, \tag{84}$$

причём равенство (84) выполняется равномерно по $x\in[0,l]$. Далее, на основании (83) из (84) получим

$$\Psi_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\biggl\{\sin\left(k-\frac{3}{4}\right)\frac{\pi}{l}x-(-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}\exp\left(\left(k-\frac{3}{4}\right)\frac{\pi}{l}(x-l)\right)+$$
$$+\frac{(2a/c+\operatorname{ctg}\alpha)x-l\operatorname{ctg}\alpha}{2k\pi}\cos\left(k-\frac{3}{4}\right)\frac{\pi}{l}x+\frac{l\operatorname{ctg}\alpha}{2k\pi}\exp\left(-\left(k-\frac{3}{4}\right)\frac{\pi}{l}x\right)-$$
$$-(-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(2a/c+\operatorname{ctg}\alpha)(x-l)-2la/c}{2k\pi}\exp\left(\left(k-\frac{3}{4}\right)\frac{\pi}{l}(x-l)\right)\biggr\}+O(k^{-2}). \tag{85}$$

Из (57) и (61) для собственных значений и собственных функций задачи (1)–(5) при $\alpha\in\in(0,\pi/2]$, $\beta=0$ и $c\neq 0$ имеем асимптотические формулы

$$\varrho_k=\sqrt[4]{\lambda_k}=\left(k-\frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}+\frac{q_0+4a/c+2\operatorname{ctg}\alpha}{4k\pi}+O(k^{-2}),$$

$$y_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\biggl\{\sin\varrho_k x+(-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\varrho_k(x-l)}-\frac{q_0(x)+2\operatorname{ctg}\alpha}{4\varrho_k}\cos\varrho_k x+\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2\varrho_k}e^{-\varrho_k x}+$$
$$+(-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{q_0(x)-q_0-4a/c}{4\varrho_k}e^{\varrho_k(x-l)}+O(\varrho_k^{-2})\biggr\}=$$
$$=\sqrt{\frac{2}{l}}\biggl\{\sin\left(k-\frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}x+(-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}\exp\left(\left(k-\frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}(x-l)\right)+$$
$$+\frac{(q_0+4a/c+2\operatorname{ctg}\alpha)x-(q_0(x)+2\operatorname{ctg}\alpha)l}{4k\pi}\cos\left(k-\frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}x+\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2k\pi}\exp\left(-\left(k-\frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}x\right)+$$
$$+(-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(q_0+4a/c+2\operatorname{ctg}\alpha)(x-l)-(q_1(x)+4a/c)l}{4k\pi}\exp\left(\left(k-\frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}(x-l)\right)+O(k^{-2})\biggr\}, \tag{86}$$

причём соотношение (86) выполняется равномерно по $x\in[0,l]$.

Из формул (85) и (86) следует, что при $k \geqslant 2$ справедливо равенство

$$y_k(x) = \Psi_{k-1}(x) + \sqrt{\frac{2}{l}}\left\{\frac{q_0x - q_0(x)l}{4k\pi}\cos\left(k-\frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}x + \right.$$

$$\left. + (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{q_0(x-l) - q_1(x)l}{4k\pi}\exp\left(\left(k-\frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}(x-l)\right)\right\} + O(k^{-2}). \tag{87}$$

Следуя соответствующим рассуждениям, проведённым при доказательстве теоремы 7, убеждаемся, что справедливы следующие асимптотические представления:

$$y_k'(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\left(k-\frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}\left\{\cos\left(k-\frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}x + (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}\exp\left(\left(k-\frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}(x-l)\right) - \right.$$

$$- \frac{(q_0 + 4a/c + 2\operatorname{ctg}\alpha)x - (q_0(x) + 2\operatorname{ctg}\alpha)l}{4k\pi}\sin\left(k-\frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}x - \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2k\pi}\exp\left(-\left(k-\frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}x\right) +$$

$$\left. + (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(q_0 + 4a/c + 2\operatorname{ctg}\alpha)(x-l) - (q_1(x) + 4a/c)l}{4k\pi}\exp\left(\left(k-\frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}(x-l)\right) + O(k^{-2})\right\}, \tag{88}$$

$$y_k''(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\left(k-\frac{7}{4}\right)^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^2\left\{-\sin\left(k-\frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}x + (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}\exp\left(\left(k-\frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}(x-l)\right) - \right.$$

$$- \frac{(q_0 + 4a/c + 2\operatorname{ctg}\alpha)x - (q_0(x) + 2\operatorname{ctg}\alpha)l}{4k\pi}\cos\left(k-\frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}x + \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2k\pi}\exp\left(-\left(k-\frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}x\right) +$$

$$\left. + (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(q_0 + 4a/c + 2\operatorname{ctg}\alpha)(x-l) - (q_1(x) + 4a/c)l}{4k\pi}\exp\left(\left(k-\frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}(x-l)\right) + O(k^{-2})\right\}. \tag{89}$$

Из (88) и (89) следует, что

$$y_k'(l) = (-1)^k\sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{l}}\left(k-\frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}\left(1 - \frac{a}{ck\pi} + O(k^{-2})\right),$$

$$y_k''(l) = (-1)^k\sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{l}}\left(k-\frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}\left(-\frac{a}{c} + O(k^{-1})\right).$$

Тогда в силу (4) имеем

$$m_k = ay_k'(l) + cy_k''(l) = -\frac{by_k'(l) + dy_k''(l)}{\lambda_k} = -\frac{by_k'(l) + dy_k''(l)}{\varrho_k^4} =$$

$$= (-1)^k\sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{l}}\left(\left(k-\frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}\left(\frac{\sigma}{c} + O(k^{-1})\right)\right)\left(\left(k-\frac{7}{4}\right)^4\left(\frac{\pi}{l}\right)^4(1 + O(k^{-2}))\right)^{-1} = O(k^{-3}). \tag{90}$$

Пользуясь формулами, приведёнными в работе [22, с. 296–297], убеждаемся, что справедлива формула

$$\|y_k\|_2^2 = 1 + O(k^{-2}). \tag{91}$$

Тогда в силу (90) и (91) из (79) находим

$$\delta_k = \|y_k\|_2^2 + \sigma^{-1}m_k^2 = 1 + O(k^{-2}). \tag{92}$$

Пусть r – произвольное фиксированное натуральное числа. В силу (90)–(92) и (80) из (81) получим

$$u_k(x) = \delta_k^{-1}\{y_k(x) - m_k m_r{}^{-1}y_r(x)\} = y_k(x) + O(k^{-2}). \tag{93}$$

Заметим, что для равномерной сходимости ряда (82) необходима и достаточна равномерная сходимость ряда

$$\sum_{k=r+1}^{\infty}(f,u_k)y_k(x). \tag{94}$$

На основании (93) имеем

$$\sum_{k=r+1}^{\infty}(f,u_k)y_k(x)=\sum_{k=r+1}^{\infty}(f,y_k)y_k(x)+\sum_{k=r+1}^{\infty}O(k^{-2}).$$

Асимптотическая формула (87) показывает, что справедливо соотношение

$$y_k(x)=\Psi_{k-1}(x)+O(k^{-1}),$$

согласно которому имеем

$$\sum_{k=r+1}^{\infty}(f,y_k)y_k(x)=\sum_{k=r+1}^{\infty}(f,y_k)\Psi_{k-1}(x)+\sum_{k=r+1}^{\infty}(f,y_k)O(k^{-1}).$$

Так как система $\{y_k(x)\}_{k=1,\ k\neq r}^{\infty}$ является базисом Рисса в пространстве $L_2(0,l),$ то имеет место оценка

$$\sum_{k=l+1}^{\infty}|(f,u_k)O(k^{-1})|\leqslant \mathrm{const}\left\{\sum_{k=l+1}^{\infty}|(f,u_k)|^2+\sum_{k=l+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right\}<+\infty.$$

Следовательно, для равномерной сходимости ряда (94) достаточно исследовать на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{k=r+1}^{\infty}(f,y_k)\Psi_{k-1}(x). \tag{95}$$

Введём обозначения

$$P_1(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{q_0x-q_0(x)l}{4\pi},\quad P_2(x)=(-1)^k\sqrt{\frac{2}{l}}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{q_0(x-l)-q_1(x)l}{4\pi},$$

$$e_{k,1}(x)=\cos\left(k-\frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}x,\quad e_{k,2}(x)=\exp\left(\left(k-\frac{7}{4}\right)\frac{\pi}{l}(x-l)\right),\quad x\in[0,l].$$

Тогда в силу (87) запишем

$$y_k(x)=\Psi_{k-1}(x)+k^{-1}P_1(x)e_{k,1}(x)+k^{-1}P_2(x)e_{k,2}(x)+O(k^{-2}),$$

откуда следует, что

$$\sum_{k=r+1}^{\infty}(f,y_k)\Psi_{k-1}(x)=\sum_{k=r+1}^{\infty}(f,\Psi_{k-1})\Psi_{k-1}(x)+\sum_{k=r+1}^{\infty}k^{-1}(fP_1,e_{k,1})\Psi_{k-1}(x)+$$

$$+\sum_{k=r+1}^{\infty}k^{-1}(fP_2,e_{k,2})\Phi_{k-1}(x)+\sum_{k=r+1}^{\infty}O(k^{-2})\Psi_{k-1}(x).$$

В силу [29, лемма 5] каждая из систем $\{e_{k,j}\}_{k=1}^{\infty},$ $j=1,2,$ является бесселевой. Следовательно, имеют место оценки

$$\sum_{k=l+1}^{\infty}\left|\frac{(fP_j,e_{k,j})}{k}\right|\leqslant \mathrm{const}\left(\sum_{k=l+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=l+1}^{\infty}|(fP_j,e_{k,j})|^2\right)\leqslant \mathrm{const}(1+\|f\|_2^2),\quad j=1,2.$$

Таким образом, ряд (95) сходится равномерно на отрезке $[0,l]$, поскольку в силу условия теоремы ряд $\sum_{k=r+1}^{\infty}(f,\Psi_{k-1})\Psi_{k-1}(x)$ сходится равномерно на этом же отрезке.

Остальные случаи рассматриваются аналогичным образом. Теорема доказана.

Авторы выражают искреннюю признательность рецензенту за ценные замечания и комментарии, способствовавшие значительному улучшению текста статьи и пониманию полученных в ней результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. М., 1978.
2. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. М.; Л., 1951.
3. *Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И.* О базисности в пространстве L_p систем собственных функций, отвечающих двум задачам со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 10. С. 1357–1360.
4. *Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И.* К проблеме сходимости спектральных разложений для одной классической задачи со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 12. С. 1599–1604.
5. *Моисеев Е.И., Капустин Н.Ю.* Об особенностях корневого пространства одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Докл. РАН. 2002. Т. 385. № 1. С. 20–24.
6. *Капустин Н.Ю.* О равномерной сходимости ряда Фурье для спектральной задачи с квадратом спектрального параметра в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46. № 10. С. 1504–1507.
7. *Капустин Н.Ю.* О спектральной задаче из математической модели процесса крутильных колебаний стержня со шкивами на концах // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 10. С. 1143–1145.
8. *Капустин Н.Ю.* О равномерной сходимости в классе C^1 ряда Фурье для спектральной задачи с квадратом спектрального параметра в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 10. С. 1394–1399.
9. *Алиев З.С., Дуньямалиева А.А.* Дефектная базисность системы корневых функций задачи Штурма–Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51. № 10. С. 1249–1266.
10. *Kerimov N.B., Goktas S., Maris E.A.* Uniform convergence of the spectral expansions in terms of root functions for a spectral problem // Electron. J. Differ. Equat. 2016. № 80. P. 1–14.
11. *Kerimov N.B., Maris E.A.* On the uniform convergence of the Fourier series for one spectral problem with a spectral parameter in a boundary condition // Math. Methods Appl. Sci. 2016. V. 39. № 9. P. 2298–2309.
12. *Kerimov N.B., Maris E.A.* On the uniform convergence of Fourier series expansions for Sturm–Liouville problems with a spectral parameter in the boundary conditions // Results Math. 2018. V. 73. № 3. P. 1–16.
13. *Керимов Н.Б.* О базисных свойствах в L_p оператора Штурма–Лиувилля со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55. № 2. С. 148–157.
14. *Керимов Н.Б., Алиев З.С.* О базисности системы собственных функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 7. С. 886–895.
15. *Aliyev Z.S.* Basis properties of a fourth order differential operator with spectral parameter in the boundary condition // Cent. Eur. J. Math. 2010. V. 8. № 2. P. 378–388.
16. *Алиев З.С.* Базисные свойства в пространстве L_p систем корневых функций одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 6. С. 766–777.
17. *Aliyev Z.S., Guliyeva S.B.* Properties of natural frequencies and harmonic bending vibrations of a rod at one end of which is concentrated inertial load // J. Differ. Equat. 2017. V. 263. № 9. P. 5830–5845.
18. *Aliyev Z.S., Mamedova G.T.* Some properties of eigenfunctions for the equation of vibrating beam with a spectral parameter in the boundary conditions // J. Differ. Equat. 2020. V. 269. № 2. P. 1383–1400.
19. *Курбанов В.М.* Условия абсолютной и равномерной сходимости биортогонального ряда, отвечающего дифференциальному оператору // Докл. РАН. 2008. Т. 422. № 5. С. 594–596.
20. *Kurbanov V.M., Huseynova Y.I.* On convergence of spectral expansion of absolutely continuous vector-function in eigenvector-functions of fourth order differential operator // Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. 2014. V. 34. № 1. P. 83–90.

21. *Алиев З.С., Керимов Н.Б., Мехрабов В.А.* О сходимости разложений по собственным функциям одной краевой задачи со спектральным параметром в граничных условиях. I // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 2. С. 147–161.
22. *Алиев З.С., Керимов Н.Б., Мехрабов В.А.* О сходимости разложений по собственным функциям одной краевой задачи со спектральным параметром в граничных условиях. II // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56. № 3. С. 291–302.
23. *Namazov F.M.* Uniform convergence of Fourier series expansions for a fourth-order spectral problem with boundary conditions depending on the eigenparameter // Bull. Iran. Math. Soc. 2021. V. 47. № 2. P. 225–235.
24. *Banks D.O., Kurowski G.J.* A Prüfer transformation for the equation of a vibrating beam subject to axial forces // J. Differ. Equat. 1977. V. 24. № 1. P. 57–74.
25. *Kerimov N.B., Aliyev Z.S.* On oscillation properties of the eigenfunctions of a fourth order differential operator // Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Math. 2005. V. 25. № 4. P. 63–76.
26. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
27. *Aliyev Z.S.* Structure of root subspaces and oscillation properties of eigenfunctions of one fourth order boundary value problem // Azerbaijan J. Math. 2014. V. 4. № 2. P. 108–121.
28. *Амара Ж. Бен, Владимиров А.А.* Об осцилляции собственных функций задачи четвёртого порядка со спектральным параметром в граничном условии // Фунд. и прикл. математика. 2006. Т. 12. № 4. С. 41–52.
29. *Кесельман Г.М.* О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов. Математика. 1964. № 2. С. 82–93.

Бакинский государственный университет,
Азербайджан,
Институт математики и механики НАН Азербайджана,
г. Баку,
Сумгаитский государственный университет,
Азербайджан

Поступила в редакцию 04.05.2022 г.
После доработки 04.08.2022 г.
Принята к публикации 15.08.2022 г.